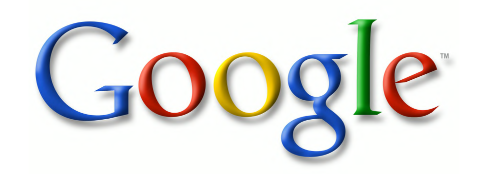
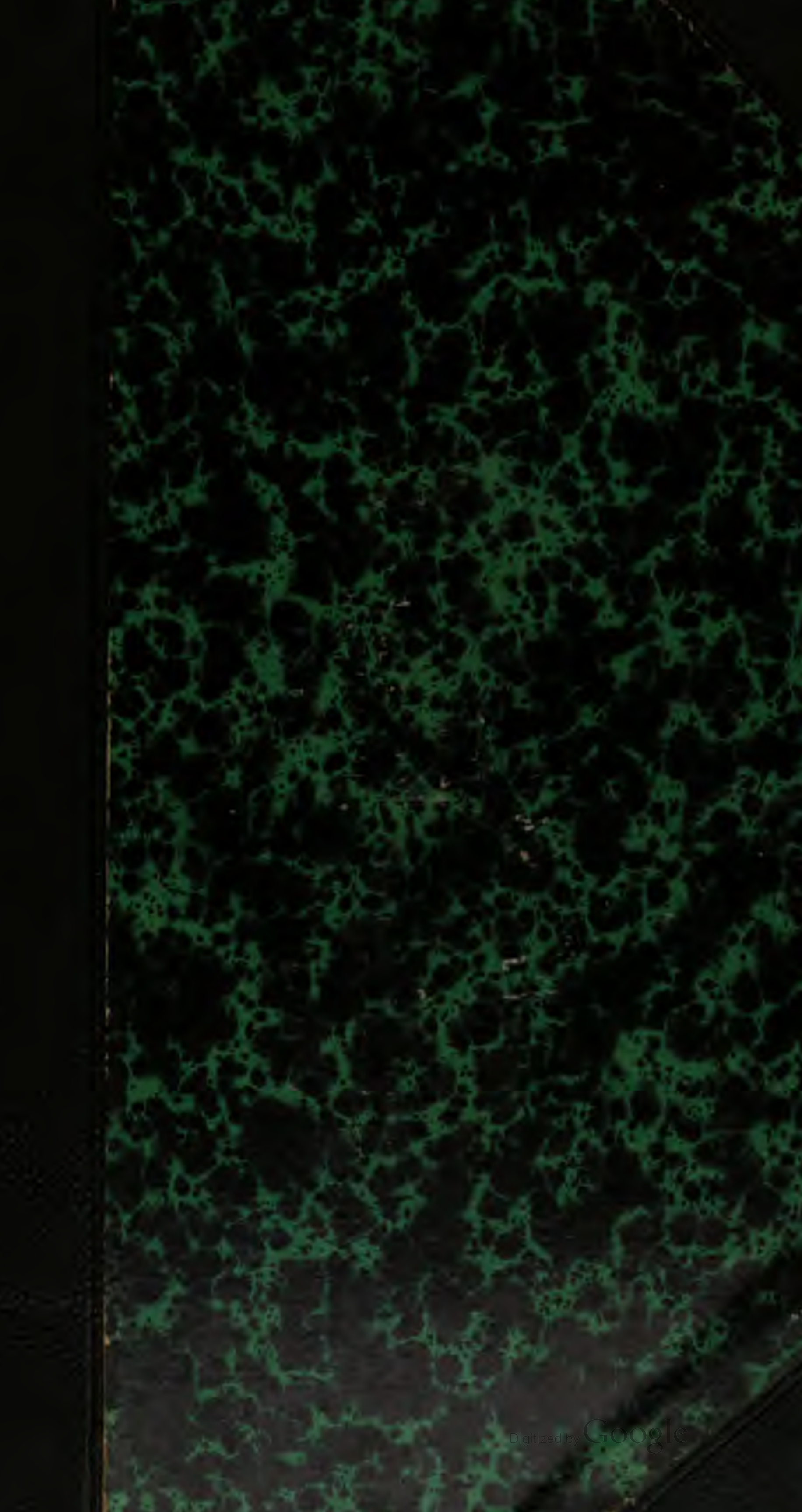
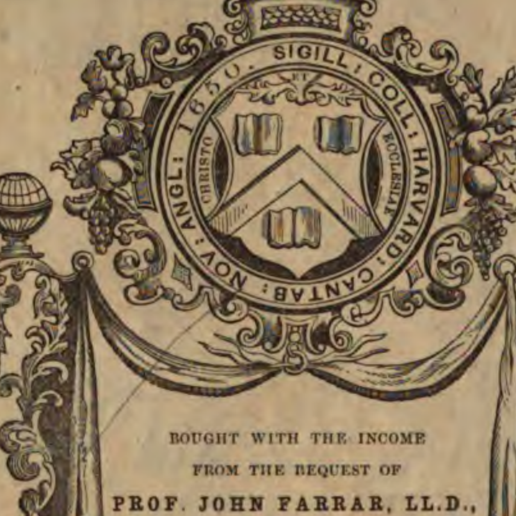





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO
ET
ECCLESIAE





ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1877.

1877, Oct. 3 – 1878, March 1.
Farrar fund.

Inhalts-Verzeichniss

des einundsechzigsten Teils.

Geometrie der Ebene.

Verschiedenes.

Litterarische Berichte.

Berichtigungen

in Teil LIX.

Seite 55	Zeile 9 v. u.	statt	$25-11\sqrt{5}$	setze	$25+11\sqrt{5}$
„ 57	„ 11 „ „	„	$\frac{1}{96}a^3\sqrt{15}$	„	$\frac{1}{32}a^3\sqrt{5}$
		„	$\frac{10}{3}r^3\sqrt{390-174\sqrt{5}}$	„	$10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$
	„ 10 „ „	„	$\frac{1}{3}\varrho^3\sqrt{15}$	„	$\varrho^3\sqrt{5}$
		„	$\frac{1}{3}R^3$	„	$\frac{1}{9}R^3$
	„ 9 „ „	„	$\frac{5}{32}r^3$	„	$\frac{5}{4}r^3$
	„ 8 „ „	„	$\frac{5}{12}\varrho^3$	„	$\frac{10}{3}\varrho^3$
„ 58	„ 5 v. o.	„	$\overline{2\sqrt{5}}$	„	$\overline{2\sqrt{3}}$

in Teil LX.

Seite 445 Zeile 6 v. u. statt $4J$ setze $2J$

in Teil LXI.

Seite 128	Zeile 5 v. o.	statt	$(p+1)$	setze	$\frac{x}{2}(p+1)$
	„ 10 „ „	„	$k_a \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$	„	$\Sigma k_a \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$
„ 130	„ 6 „ „	„	$k_1 p-1.p$	„	$k_1 \underline{p-1}.\underline{p}$
„ 131	„ 5 „ „	„	$k_2 3C_{1,r-1}$	„	$k_2 3C_{1,r-1}{}^2$
	„ 10 v. u.	„	$Z_{1,r-3}$	„	$Z_{1,r-3}{}^2$
„ 134	„ 4 v. o.	„	$C_2 = k_2$	„	$C_2 = k_1$
„ 137	„ 7 „ „	„	$\binom{r}{}$	„	$\binom{r}{e}$
„ 140	„ 9 v. u.	„	$ra^{r-2}fx_1$	„	$ra^{r-1}fx_1$
	„ 4 „ „	„	$d-1$	„	$p-1$

Seite 188 unter Zeile 2 v. o. fehlt die Zeile

p	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$	p	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$

welche die Ueberschriften der 5 Columnen enthält.

Seite 189	Zeile 7 v. u.	statt $\log x^2$	setze	$\log y^2$
„ 194	„ 7 v. o.	„ $\log(1-b)$	„	$\log(1-b')$
„ 195	„ 10 v. u.	„ y''	„	y^4
„ 200	„ 8 „ „	„ x''	„	$\log x''$
„ 201	„ 15 „ „	„ $\left[\log\frac{1}{z}\right]$	„	$\left[\lg\frac{1}{z}\right]$
„ 207	„ 11 „ „	„ §. 11.	„	§. 12.
„ 209	„ 7 „ „	„ 3,1159572	„	3,1157402
„ 211	„ 6 „ „	„ §. 12.	„	§. 13.

Die Tafel auf Seite 188 beginnt nun:

I. Tafel der Lamda-Function.

$$\Lambda(p+y) = \Lambda(p) + [1 + (1 + ay)by]cy$$

p	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$	p	$\Lambda(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
0.0	0.00000	∞	$-\infty$	0.30103	1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechszigster Teil. Erstes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1877.

I.

Rationale ebene Curven dritter Ordnung.

Schluss zu N. IV. T. LVIII.

Von

Dr. **K. Zahradnik,**

Universitätsprofessor zu Agram.

Anwendung auf das Descartes'sche Blatt.

Die Gleichung des Descartes'schen Blattes [1]) ist bekanntlich

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{1}$$

Die Coordinatenachsen sind die Tangenten des Doppelpunktes dieser Curve. Die Gleichung (1) können wir durch das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} x &= \frac{3au}{1+u^3} \\ y &= \frac{3au^2}{1+u^3} \end{aligned} \tag{2}$$

ersetzen, das heisst, wir können die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes rational mittelst des Parameters u ausdrücken. Jedem Curvenpunkte u_i entspricht ein Parameter u_i und umgekehrt, und die Bedeutung des Parameters ist bekanntlich, wenn wir die Verbindungslinie des Punktes u_i mit dem Anfangspunkte der Coordinaten mit U_i bezeichnen,

$$\operatorname{tg}(U_i X) = u_i \tag{3}$$

1) Diese Entwickelung erschien zum Teile in Sitzungsberichten der kg. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 7. 11. 1873. Prag.

2. Als die Bedingungsgleichung für die Lage dreier Punkte des Blattes auf einer Geraden ergibt sich

$$u_1 u_2 u_3 = -1 \tag{4}$$

Für einen Inflexionspunkt wird

$$u_1 = u_2 = u_3 = u$$

und die Gleichung (4) geht in diesem Falle über in

$$u^3 = -1,$$

deren drei Wurzeln

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 \\ u_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ u_3 &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

die Parameter der Inflexionspunkte ergeben. Das Product der Parameter der Inflexionspunkte ist gleich -1, d. h. dieselben liegen auf einer Geraden.

3. Die Parameter der unendlich fernen Punkte des Blattes erhalten wir, wenn wir den Nenner (2)

$$1 + u^3 = 0$$

setzen, und wir erkennen sogleich, dass die drei unendlich fernen Punkte des Blattes dessen Inflexionspunkte sind, demnach fallen die Inflexionstangenten mit den Asymptoten des Blattes zusammen.

Secante und Tangente.

4. Für die Secante, als Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2 des Blattes ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 3a \\ u_1 & u_1^2 & 1+u_1^3 \\ u_2 & u_2^2 & 1+u_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

welche wir nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor $(u_1 - u_2)$, schreiben können:

$$x[u_1^2 u_2^2 - (u_1 + u_2)] + y[1 - u_1 u_2(u_1 + u_2)] + 3au_1 u_2 = 0 \tag{6}$$

Für $u_1 = u_2 = u$ geht die Secante in eine Tangente über, und wir erhalten als deren Gleichung

$$u(u^3 - 2)x + (1 - 2u^3)y + 3au^2 = 0 \tag{7}$$

Die Gleichung (7) liefert uns die Parameter der Berührungspunkte der vom Punkte (xy) an das Blatt gelegten Tangenten, wenn wir x, y als bekannt und u als unbekannt nehmen. Nun ist die Gl. (7) in Bezug auf u vom vierten Grade, d. h. von jedem Punkte (xy) kann man an das Blatt vier Tangenten legen, das Blatt ist somit eine Curve vierter Classe und dritter Ordnung, und die Vergleichung mit

$$x\zeta + y\eta + 1 = 0 \tag{8}$$

liefert uns die Coordinaten ihrer Tangenten, nämlich

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{u^3-2}{3au} \\ \eta &= \frac{1-2u^3}{3au^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Aus der Gl. (7) erkennen wir, dass vier Tangenten des Blattes durch *einen* Punkt hindurchgehen, wenn deren Parameter nachstehenden zweien Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} (u)_3 &= 2 \\ (u)_1 &= 2(u)_4 \end{aligned}$$

genügen.

Führen wir aus Gl. (5) die Parameter der unendlich fernen Punkte in die Gl. (7) der Tangente ein, so erhalten wir die Gleichungen der drei Asymptoten

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv x + y + a = 0 \\ A_2 &\equiv (1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})y - 2a = 0 \\ A_3 &\equiv (1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})y - 2a = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Die reelle Asymptote A_1 schneidet auf den Coordinatenachsen gleiche Stücke ab, nämlich $-a$, und die übrigen zwei imaginären Asymptoten schneiden sich in einem reellen Punkte, dessen Coordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ y_1 &= a \end{aligned}$$

sind.

Involutionskegelschnitt.

5. Der Involutionskegelschnitt für das Descartes'sche Blatt ist eine Hyperbel, deren Gleichung

$$xy = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \tag{11}$$

ist. Die Asymptoten der Hyperbel sind die Doppelpunktstangenten des Blattes.

Normale, Evolute.

6. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt u der Curve hindurchgeht, lautet

$$y-\frac{3au^2}{1+u^3}=A\left(x-\frac{3au}{1+u^3}\right) \tag{12}$$

Dieselbe wird zur Normalen, wenn wir

$$A=-\frac{2u^3-1}{u(u^3-2)} \tag{13}$$

setzen, was aus Gl. (7) erhellt. Setzen wir nun den Wert für A in die Gl. (12), so erhalten wir als Gleichung der Normalen

$$u(u^3-2)(u^3+1)y+(2u^3-1)(u^3+1)x-3au\{u^5+2u^3-2u^2-1\}=0 \tag{14}$$

Da der Parameter des Fusspunktes in dieser Gleichung der Normalen im siebenten Grade erscheint, folgt, dass wir aus einem jeden Punkte der Ebene des Blattes sieben Normalen fällen können[1]).

Die Anzahl der Normalen bestimmt die Classe der Evolute. Setzen wir die Gleichung der Normalen

$$N=0,$$

so erhalten wir die Gleichung der Evolute in Punktcoordinaten, wenn wir aus

$$N=0 \tag{15}$$

und deren Derivation nach u,

$$\frac{dN}{du}=0 \tag{16}$$

den Parameter u climiniren als $F(x,y)=0$, oder in anderer Form, wenn wir die Gleichungen (15) und (16) nach x und y auflösen als

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u)\\ y&=\psi(u) \end{aligned} \tag{17}$$

Die Evolute ist somit eine rationale Curve siebenter Classe und zwölfter Ordnung.

---

1) Bekanntlich hat Chasles gezeigt, dass die Anzahl der Normalen gleich der Summe der Ordnungszahl und Classenzahl einer Curve ist, hier:

$$7=3+4$$

Aehnlich wie in Art. 4. können wir die Gleichung der Evolute in Taugentialcoordinaten ausdrücken

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{(2u^3-1)(u^3+1)}{3au(u^5-3u^3-2u^2+1)}, \\ \eta &= \frac{u(u^3-2)(u^3+1)}{3au(u^5+3u^3-2u^2-1)} \end{aligned} \tag{18}$$

Dass sich die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes so wie auch der Krümmungshalbmesser leicht als Functionen des Parameters u ergeben, ist klar, da es bloss darauf ankommt, die ersten und zweiten Differentialquotienten von x und y nach u zu berechnen und in bekannte Formeln die Werte einzuführen.

Aber der Krümmungsmittelpunkt ist schon durch Gl. (17) angedeutet, somit können wir von einer zweiten Berechnung der Gl. (17) Umgang nehmen, und zwar schon aus dem Grunde, dass die zweite Berechnung gegen die erste keinen Vorteil böte.

Quadratur.

7. Die Fläche der Schleife (des Blattes im engeren Sinne) ist ausgedrückt durch das Integral:

$$P = 9a^2 \int \frac{(1-2u^3)u^2\,du}{(1+u^3)^3}.$$

Setzen wir

$$1+u^3 = z,$$

so geht dieses Integral über in

$$P = 3a^2 \int \frac{3-2z}{z^3}\,dz$$

Die zur Y Achse parallele Tangente des Blattes berührt dasselbe im Punkte B (Fig. 1.), dessen Coordinaten OC und OB sind. Entspricht nun der Punkt A dem Parameter $u = 1$, so ist die Fläche des Blattes $OABO$ gleich $OABC - OBC$, daher ist

$$P = 3a^2 \left\{ \int_\infty^{\frac{3}{2}} \frac{3-2z}{z^3}\,dz - \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{3-2z}{z^3}\,dz \right\}$$

daher

$$P = 3a^2 \int_\infty^1 \frac{3-2z}{z^3}\,dz = \frac{3a^2}{2} \tag{19}$$

Die Fläche der Schleife ist demnach gleich einem Rechtecke, dessen Basis die Länge der Schleife OA und dessen Höhe der Abstand des Doppelpunktes von der reellen Asymptote ist,

$$P = OA.OD,$$

oder auch: die Fläche der Schleife ist gleich der dreifachen Fläche des Dreiecks, den die Asymptote mit den Doppelpunktstangenten bildet.

Um die Fläche zu finden, welche die reelle Asymptote mit den beiden Aesten bildet, wollen wir die Coordinaten transformiren. Drehen wir die Coordinatenachsen um 45°, so wird die neue X Achse auf der reellen Asymptote senkrecht stehen, und die frühere Gleichung des Blattes geht über in

$$x(x^2+3y^2) - \frac{3a}{\sqrt{2}}(x^2-y^2) = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{3a}{\sqrt{2}} = c,$$

so können wir die Gleichung ersetzen durch

$$x = \frac{c(1-u^2)}{1+3u^2}$$

$$y = \frac{cu(1-u^2)}{1+3u^2}$$

und für die Fläche erhalten wir den Ausdruck:

$$P = 8c^2 \int \frac{(1-u^2)\,u^2\,du}{(1+3u^2)^3}$$

Setzen wir

$$3u^2 = z^2,$$

so erhalten wir

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}} \int \frac{(3-z^2)z^2\,dz}{(1+z^2)^3}$$

oder

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}} \left\{ 3\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^3)^3} - \int \frac{z^4\,dz}{(1+z^2)^3} \right\}$$

Bezeichnen wir

$$J_{m,n} = \int \frac{z^m\,dz}{(1+z^2)^n},$$

so ist

$$J_{m,n} = - J_{m-2,n} + J_{m-2,n-1}$$

und

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}$$

Dieser Bezeichnung zufolge ist

$$P = \frac{8c^2}{9\sqrt{3}}(3J_{2,3} - J_{4,3}).$$

Nun ist aber

$$3J_{2,3} - J_{4,3} = -4J_3 + 5J_2 - J_1 = \frac{z^3}{(1+z^2)^2} = \frac{3\sqrt{3}.u^3}{(1+3u^2)^2},$$

somit

$$P = \frac{8c^2}{3}\Big|_{-1}^{+1} \frac{u^3}{(1+3u^2)^2} = \frac{c^2}{3} = \frac{3a^2}{2}$$

derselbe Ausdruck, den wir früher für die Fläche der Schleife erhalten haben. Da nun unser Integral in den Grenzen ∞ und 1, -1 und 0 der Grösse nach gleich bleibt, so sehen wir, dass die reelle Asymptote das Blatt dermassen abgrenzt, dass dasselbe durch den Doppelpunkt und durch dessen Symmetrieachse DA in vier gleiche Teile geteilt wird; der Flächeninhalt der von der Asymptote begrenzten Fläche sammt der Schleife ist (Fig. 3.)

$$P' = 3a^2 = 2P = FGHJ \tag{20}$$

wenn P wie früher den Flächeninhalt der Schleife bedeutet.

Constructionen des Blattes.

8. Beschreiben wir mit $3a$ als Halbmesser einen Kreis, und setzen $3a = OB = 1$, was immer erlaubt ist, da wir die Längeneinheit beliebig wählen können. Ziehen wir nun den Strahl OA, welcher mit OB (Fig. 3.) einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich u ist, und durch AB gemessen wird, so dass

$$u = AB.$$

Beschreiben wir nun um den Punkt B mit dem Halbmesser AB einen Bogen, der OB im Punkte D trifft, und ziehen aus diesem Punkte zu OA eine Parallele, welche auf AB den Punkt A_2 bestimmt, so ist

$$A_2B = u^2.$$

Ziehen wir ferner aus dem Punkte D zu OA_2 eine Parallele, so erhalten wir auf AB den Punkt A_3 und

$$A_3B = u^3.$$

Tragen wir die Strecke A_3B auf OB in ihrer Verlängerung über B auf, so dass $A_3B = BC$ ist, so haben wir

$$OC = 1 + u^3$$

Um $\frac{3a.u}{1+u^3}$ zu construiren, machen wir auf OA

$$OA_1' = AB$$

und ziehen aus dem Punkte C eine Parallele zu BA_1', so erhalten wir auf OA den Punkt R und

$$OR = x = \frac{3au}{1+u^3}$$

Machen wir nun auf OA

$$OA_2' = A_2B$$

und ziehen aus dem Punkte C eine Parallele zu BA_2', so erhalten wir auf OA den Punkt S und

$$OS = y = \frac{3au^2}{1+u^3}$$

Beschreiben wir nun mit OR aus dem Punkte O einen Bogen, der OB im Punkte P trifft, und errichten in P eine Senkrechte, so schneidet dieselbe den Strahl OA im Punkte M, welcher ein Punkt des Blattes ist. Bei Construction mehrerer Curvenpunkte treten natürlich verschiedene Erleichterungen auf, so ist die separate Construction des Punktes S oder der y nicht erforderlich, wir finden aber in ihr mittelst

$$OA_2' = MP$$

eine Probe der Zeichnung.

Eine zweite Construction möge noch kurz erwähnt werden.

Das Descartes'sche Blatt zeigt sich als das Erzeugniss eines Kegelschnittsbüschels und eines ihm projectivischen Strahlenbüschels. Die Lage dieser Büschel ist bestimmt durch nachstehende Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - by + \lambda y^2 &= 0 \\ y - \lambda x &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Für jeden Wert von λ erhalten wir einen Punkt der Curve (ausser dem jedem λ zukommenden Coordinatenanfang, der als Doppelpunkt des Erzeugnisses auftritt) als Durchschnitt der entsprechenden Elemente beider Büschel. Die Coordinaten des Durchschnittes erhalten wir, wenn wir die Gleichung des Kegelschnittsbüschels mit λ^2 multipliciren und in dieselbe aus der Gleichung des Strahlenbüschels für λx den Wert einführen. Wir erhalten so nach kurzer Reduction

$$y = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^3}$$

somit vermöge der zweiten Gleichung (21):

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda^3}$$



welche wir als das Gleichungspaar des Blattes wieder erkennen. Die Mittelpunkte des Kegelschnittsbüschels, dem die X Achse als gemeinschaftliche Tangente zukommt, liegen auf der Y Achse.

Für jedes positive λ haben wir mit einer Ellipse des Büschels zu tun, welche für $\lambda = 1$ in einen Kreis übergeht. Negativen λ entsprechen Hyperbeln des Büschels und als Uebergangsfall haben wir für $\lambda = 0$ eine Parabel des Büschels. Die Punkte des Blattes im engeren Sinne sind also Durchschnitte der Ellipsen des Büschels mit den entsprechenden Geraden des Strahlenbüschels, während die Punkte der beiden Aeste als Durchschnitte der Hyperbeln des Büschels mit den entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels, der Doppelpunkt entspricht der Parabel des Büschels ($\lambda = 0$) und X Achse ($\lambda = \infty$), welche als eine Doppellinie auftritt mit den ihnen entsprechenden Grundstrahlen des Strahlenbüschels.

Gegeben sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 4.) und die Gerade

$$L_i \equiv y - \lambda_i x = 0.$$

Auf der Y Achse trage man $OB = \frac{OH}{2} = \frac{b}{2}$ (wo $b = 3a$ kurz gesetzt ist) auf, und ziehe durch B eine Parallele zur X Achse, welche die Gerade $L = 0$ im Punkte C schneidet, so ist

$$BC = \frac{b}{2\lambda}.$$

Bezeichnen wir nun die in der Y Achse gelegene Achse des Kegelschnittes mit 2β und die andere mit 2α, so ist bekanntlich

$$\beta = \frac{b}{2\lambda} \tag{22}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{b^2}{4\lambda}} = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \beta} \tag{23}$$

Es ist somit $BC = \beta$ für den Kegelschnitt λ. Wir finden α, wenn wir AO über den Punkt O um OB' verlängern und mit $B'E = EA = \frac{B'A}{2}$ einen Halbkreis beschreiben, der die Y Achse in F trifft, so ist $OF = \alpha$. Der Zusammenhang zwischen α und β, welcher durch die Gleichung (23) gegeben ist, nämlich

$$\alpha^2 = \frac{b}{2} \cdot \beta \tag{24}$$

lässt eine einfache Construction von α und β zu. Man construire zu diesem Behufe die Parabel (24), und die Coordinaten ihrer Punkte

geben die entsprechenden Achsenpaare α, β. Sind nun für einen Kegelschnitt λ sein Mittelpunkt, seine Achsen bekannt, so können wir denselben construiren und sein Durchschnitt mit $L=0$ ist der λ entsprechende Curvenpunkt.

Anwendung auf die Strophoide.

1. Bekanntlich ist die Gleichung der Strophoide

$$x^3+xy^2+a(x^2-y^2)=0 \tag{1}$$

oder mit Hinzunahme des rationalen Parameters u

$$x=\frac{a(u^2-1)}{u^2+1}$$
$$y=\frac{a(u^2-1)u}{u^2+1} \tag{2}$$

Als Bedingungsgleichung für die Lage dreier Curvenpunkte auf einer Geraden ist

$$(u)_2=-1 \tag{3}$$

demnach sind die Parameter der Inflexionspunkte

$$u_1=\infty,\quad u_2=+\sqrt{-\tfrac{1}{3}},\quad u_3=-\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$$

und als Parameter der unendlich fernen Punkte erkennen wir aus Gl. (2)

$$u_1=\infty,\quad u_2=+i,\quad u_3=-i \tag{5}$$

woraus erhellt, dass zwei der unendlich fernen Punkte die imaginären Kreispunkte sind, durch welche die Strophoide hindurchgeht, und der dritte ist der reelle Inflexionspunkt (a, ∞).

Secante und Tangente.

2. Für die Secante als Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2, der Curve ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ u_1{}^2-1 & u_1(u_1{}^2-1) & u_1{}^2+1 \\ u_2{}^2-1 & u_2(u_2{}^2-1) & u_2{}^2+1 \end{vmatrix}=0,$$

welche nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor (u_1-u_2) geschrieben werden kann

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ u_1^2-1 & u_1(u_1^2-1) & u_1^2+1 \\ u_1+u_2 & u_1^2+u_1u_2+u_2^2-1 & u_1+u_2 \end{vmatrix} = 0$$

Für $u_1 = u_2 = u$ geht die Secante in eine Tangente über, und wir erhalten nach kleiner Reduction für dieselbe

$$4uy+(1-4u^2-u^4)x+a(u^2-1)^2=0 \tag{7}$$

Diese Gleichung gibt uns bekanntlich eine Relation zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes (xy) auf der Tangente und dem Parameter ihres Berührungspunktes an. Fassen wir den Punkt (x, y) als gegeben, so erhalten wir die Parameter der Berührungspunkte aus Gl. (7) als Wurzeln dieser Gleichung in Bezug auf u. Da nun die Gleichung (7) in u vom vierten Grade ist, so folgt, dass die Strophoide eine Curve vierter Classe ist, welche wir in Tangentialcoordinaten schreiben können

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1-4u^2-u^4}{a(u^2-1)^2} \\ \eta &= \frac{4u}{a(u^2-1)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Führen wir in die Gleichung der Tangente die Parameter der Inflexionspunkte ein, so erhalten wir als Gleichungen der Inflexionstangenten

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv x-a=0 \\ J_2 &\equiv 5x+3i\sqrt{3}.y+4a=0 \\ J_3 &\equiv 5x-3i\sqrt{3}.y+4a=0 \end{aligned} \tag{9}$$

Wir erkennen, dass den zwei imaginären Inflexionstangenten ein reeller Schnittpunkt zukommt, dessen Coordinaten

$$x = -\tfrac{4}{5}a$$
$$y = 0$$

sind. Führen wir nun die Parameter der unendlich fernen Punkte in die Gleichung der Tangente ein, so erhalten wir die Gleichungen der Asymptoten:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv x-a=0 \\ A_2 &\equiv x+iy+a=0 \\ A_3 &\equiv x-iy+a=0 \end{aligned} \tag{10}$$

Die reelle Asymptote ist demnach eine Inflexionstangente der Curve und die beiden imaginären Asymptoten schneiden sich in einem reellen Punkte in dem Pole der Strophoide, dessen Coordinaten

$$x = -a$$
$$y = 0$$

sind.



Normale, Evolute.

3. Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Curvenpunkt u hindurchgeht, lautet:

$$y - \frac{au(u^2-1)}{u^2+1} = A\left(x - \frac{a(u^2-1)}{u^2+1}\right)$$

Dieselbe wird zu einer Normalen, wenn nach Gl. (7)

$$A = \frac{4u}{1-4u^2-u^4}$$

somit erhalten wir, wenn wir den Wert A einführen nach einiger Reduction

$$(1+u^2)\{(1-4u^2-u^4)y-4ux\}+au(u^2-1)\{3+4u^2+u^4\}=0$$

Diese Gleichung können wir mit dem gemeinschaftlichen Factor $(1+u^2)$ kürzen, was seinen Grund in den imaginären Kreispunkten hat, durch welche die Curve hindurchgeht. Wir erhalten demnach schliesslich für die Normale im Punkte u die Gleichung

$$(1-4u^2-u^4)y-4ux+4a(u^2-1)(u^2+3)=0\;. \tag{11}$$

Wir werden die Fusspunktquadrupel der Normalen nicht näher untersuchen, da wir es schon in diesem Archiv allgemein für rationale Curven an anderer Stelle durchgeführt haben und bemerken bloss, dass die Fusspunkte der Normalen, welche man aus der Y Achse an die Strophoide fällt, in einem Kreise liegen, und dass der Ort der Punkte, deren Normalenfusspunkte äquianharmonische Punkte bilden, ein in zwei Gerade degenerirter Kegelschnitt ist.

Aus der Gl. (11) erkennen wir, dass die Evolute eine rationale Curve vierter Classe ist, deren Tangentialgleichung

$$\xi = \frac{-4u}{4a(u^2-1)(u^2+3)}$$
$$\eta = \frac{1-4u^2-u^4}{4a(u^2-1)(u^2+3)} \tag{12}$$

Wir erhalten ihre Gleichung in Punktcoordinaten, wenn wir aus der Gleichung der Normalen

$$N=0$$

und deren Derivation nach u, somit

$$\frac{dN}{du}=0$$

den veränderlichen Parameter u climiniren, als



$$F(x, y) = 0 \tag{13}$$

oder in Form

$$x = \varphi(u)$$
$$y = \psi(u) \tag{14}$$

wenn wir die Gleichungen $N = 0$ und $\frac{dN}{du} = 0$ nach x und y auflösen. Zu der letzteren Form gelangen wir noch auf einem anderen Wege, wo wir dieselben entwickeln werden. Sowohl die Entwickelung (13) wie (14) führt uns zum Resultate, dass die Evolute der Strophoide eine rationale Curve sechster Ordnung und vierter Classe ist.

Durchschnitte eines Kreises mit der Strophoide.

4. Führen wir in die Gleichung eines Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0$$

statt x und y die Werte aus (2) ein, so erhalten wir

$$a^2u^4 + 2a\beta u^3 + (m^2 - 2a^2 - 2a\alpha)u^2 + 2a\beta u + a^2 + 2a\alpha + m^2 = 0 \tag{15}$$

Der Kreis schneidet demnach die Strophoide ausser den imaginären Kreispunkten in weiteren vier Punkten, deren Parameter sich als Wurzeln der Gleichung (15) ergeben. Da aber drei der Schnittpunkte die Lage des Kreises vollständig bestimmen, so muss zwischen den Parametern der vier Schnittpunkte eine Relation bestehen, vermöge deren wir aus den drei Punkten den vierten linear bestimmen können. Dieselbe folgt aus der Form der Gl. (15), nämlich

$$(u)_1 + (u)_3 = 0 \tag{16}$$

Für den Fall, dass $u_1 = u_2 = u'$, $u_3 = u_4 = u''$ wird, erhalten wir einen doppelt berührenden Kreis in den Punkten u' und u'' und die Gleichung (16) geht über in

$$u'u'' = -1 \tag{17}$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir, dass die Berührungspunkte u', u'' vom Doppelpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen werden [1]).

Ziehen wir die Gerade $\overline{u'u''}$, so schneidet diese die Strophoide noch in einem Punkte u''' und da nach der Gleichung (3)

$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = -1$$

---

1) Dasselbe gilt bei der Focale allgemein, siehe Dr. Em. Weyr „Ueber Durchschnittspunkte von Focalen mit Kreisen und Lemniscaten". Sitzb. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 23. 5. 1873. Prag.



ist, so folgt daraus

$$u''' = 0$$

d. i. „Die Verbindungslinien der Berührungspunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise gehen durch einen festen Punkt u''', den Pol der Curve.“

„Die Berührungspunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise bilden eine centrale Involution.“

Aus der Gleichung (15) folgt

$$(u)_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$(u)_2 - (u)_4 = -3 - \frac{4\alpha}{a}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (17) gehen diese Gleichungen über in

$$u' + u'' = \frac{\beta}{a}$$

$$u'^2 + u''^2 = 2 - \frac{4\alpha}{a}$$

Erheben wir die erste zur zweiten Potenz und subtrahiren davon mit Rücksicht auf die Gl. (17) die zweite Gleichung, so erhalten wir

$$\beta^2 + 4a\alpha = 0 \tag{18}$$

woraus wir ersehen, dass „der geometrische Ort der Mittelpunkte der die Strophoide doppelt berührenden Kreise eine Parabel ist, die den Pol der Curve zu ihrem Brennpunkte hat.“

Ziehen wir $\overline{u'u''u'''}$, so haben wir nach der Gleichung (17)

$$\overline{u'''o}^2 = \overline{u'''u'} . \overline{u'''u''} = a^2$$

welche Gleichung uns besagt, dass alle die Strophoide doppelt berührenden Kreise von einem Kreise rechtwinklig geschnitten werden, der zum Centrum den Pol u''' und zum Radius dessen Abstand a von der Y Achse hat.

Wir erkennen demnach die Strophoide als die Enveloppe aller Kreise, welche zum Orte ihrer Mittelpunkte eine Parabel haben und einen Kreis rechtwinklig schneiden[1]).

---

1) C. Küpper „Beiträge zur Theorie der Curven 3. und 4. Ordnung“. Abhandl. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag. 1872.

Krümmungskreis, Evolute.

Geht der Kreis durch drei benachbarte Punkte hindurch, d. i. wird $u_2 = u_3 = u_4 = u$, so erhalten wir einen Krümmungskreis im Punkte u, und die Gleichung (16) geht in diesem Falle über in

$$u_1(1+3u^2)+u(3+u^2) = 0 \tag{19}$$

d. i. durch jeden Punkt der Strophoide können wir drei sie osculirende Krümmungskreise [1]) legen.

Die Tripel der Osculationspunkte bilden auf der Strophoide eine cubische Punktinvolution, deren Gleichung durch (19) ausgedrückt ist.

Die Parameter der Doppelpunkte erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung (19) und ihrer Derivation nach u den veränderlichen Parameter der Involution u_1 eliminiren. Wir erhalten so

$$(u^2-1)^2 = 0$$

daher

$$u = \pm 1$$

Je zwei der vier Doppelpunkte fallen zusammen. Die cubische Involution (19) hat demnach zwei dreifache Punkte, deren Parameter $u = +1$, $u = -1$ sind, es sind dies die Nachbarpunkte des Doppelpunktes.

Aus der Gleichung (15) folgt

$$(u)_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$(u)_4-(u)_2 = 3+\frac{4\alpha}{a}$$

Für einen Krümmungskreis gehen diese Gleichungen über wegen $u_2 = u_3 = u_4 = u$ in

$$3u+u_1 = \frac{2\beta}{a}$$

$$u^3u_1-3u^2-3uu_1 = 3+\frac{4\alpha}{a}$$

---

1) Wählen wir die Tangenten des Doppelpunktes zu Coordinatenachsen, dann gehen die Gleichungen (16) und (19) über in

$$u_1u_2u_3u_4 = 1$$
$$u_1u^3 = 1$$

und wir sehen, dass die drei Osculationspunkte mit dem ursprünglichen Punkte auf einem Kreise liegen.

Eliminiren wir nun mit Hilfe der Gleichung (19) den Parameter u_1 des Punktes, in welchem der Krümmungskreis die Strophoide schneidet, so erhalten wir als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\beta = \frac{4au^3}{1+3u^2}$$
$$\alpha = -\frac{a(u^6+9u^4+3u^2+3)}{4(1+3u^2)} \tag{20}$$

Die Gleichungen (20) sind eben nichts anderes als die Gleichungen (14), welche dort nur angedeutet und hier entwickelt sind.

Die Parameter des Doppelpunktes sind $+1$, -1, und die Coordinaten der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte $(-a, a)$, $(-a, -a)$.

Aus den Gleichungen (20) erkennen wir wieder, dass die Evolute der Strophoide eine rationale Curve sechster Ordnung ist, und wie früher gezeigt wurde vierter Classe. Eliminiren wir aus den Gleichungen (20) den Parameter u, so erhalten wir die Gleichung der Evolute als $F(\alpha, \beta) = 0$.

Die Gleichung des Involutionskegelschnittes bekommen wir nach früher gegebener allgemeiner Entwickelung, wenn wir die Coordinatenachsen um 45^0 umdrehen, d. h. wenn wir die Tangenten des Doppelpunktes als Coordinatenachsen annehmen. Für diese Lage der Coordinatenachsen ist die Gleichung der Strophoide

$$(x-y)(x^2+y^2)-2\sqrt{2}.axy = 0$$

und demnach die Gleichung des Involutionskegelschnittes

$$(x+y)^2+4\sqrt{2}\,a(x-y)+8a^2 = 0 \tag{21}$$

aus welcher wir erkennen, dass derselbe eine Parabel ist.

Quadratur.

Für den Flächeninhalt der Strophoide finden wir den Ausdruck

$$P = \int y dx = 4a^2 \int \frac{(u^2-1)u^2 du}{(1+u^2)^3}$$

oder der früheren Bezeichnung gemäss

$$P = 4a^2(J_{4,3}-J_{2,3})$$

Nun ist

$$J_{4,3}-J_{2,3} = 2J_3-3J_2+J_1 = J$$



Die Fläche der Strophoide besteht nun aus zwei Teilen, aus der Schleife und aus dem spitzen Teile, der durch den Doppelpunkt von der Schleife getrennt und von der reellen Asymptote begrenzt wird, demnach ist die ganze Fläche

$$P = \text{Schleife} + \text{Spitze}$$

Nach den bei dem Descartes'schen Blatte angeführten Reductionsformeln ist

$$4J = \operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2}$$

somit bekommen wir für den Flächeninhalt der Schleife, den wir mit P_1 bezeichnen wollen,

$$P_1 = 2a^2 \Big|_0^{-1} \left(\operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2}\right)$$

$$P_1 = 2a^2 - 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{22}$$

und für den Flächeninhalt der Spitze, den wir kurz P_2 bezeichnen wollen, ist

$$P_2 = 2a^2 \Big|_{+1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} u - \frac{u(1+3u^2)}{(1+u^2)^2}\right)$$

$$P_2 = 2a^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{23}$$

und für den Flächeninhalt der ganzen Strophoide in angegebener Begrenzung

$$P = P_1 + P_2 = (2a)^2 \tag{24}$$

Wir können demnach die Flächenteile folgendermassen construiren (Fig. 6). Construiren wir uns ein Quadrat $BCDE$, dessen Seite gleich $2a$ ist, verbinden die Mittelpunkte der Seiten G, H, J, K, so entsteht ein neues Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich ist $2a^2$. Schreiben wir nun diesem Quadrate einen Kreis ein, so wird dessen Radius gleich sein $\frac{a}{\sqrt{2}}$, demnach sein Flächeninhalt $\frac{\pi a^2}{2}$. Schattiren wir nun die Winkelräume bei G, H, J, K, welche vom Kreise $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ begrenzt werden, so ist

$P = BCDE$

$P_1 =$ der schattirte Winkelraum

$P_2 =$ der übrigbleibende Teil von $BCDE$.

Construction der Strophoide.

1) Gegeben sei $u'''O$ als Durchmesser eines Kreises (Fig. 5.) und $u'''A$, OC seine Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers. Man ziehe durch den Punkt O eine Gerade OA, welche den Kreis im Punkte B schneidet. Machen wir nun auf OB

$$Bu' = BA$$

so ist u' ein Punkt der Strophoide.

2) Man ziehe die Gerade $u'''C$ und beschreibe mit OC als Halbmesser aus C Mittelpunkt einen Kreis; derselbe trifft die Gerade in den Punkten u' und u'', welche Punkte der Strophoide angehören als Ort solcher Punkte.

3) Für die Strophoide als specieller Fall der Focale aufgefasst, ergibt sich nachstehende weitere Construction. Es sei $u'''H$ der Durchmesser eines Cylinders, und $Au'''HJ$ sein Achsenschnitt. Im Punkte u''' denken wir uns eine Senkrechte zum Achsenschnitte errichtet, welche demnach auch eine Tangente des Erzeugungscylinders sein wird. Diese Senkrechte fassen wir als Achse eines Ebenenbüschels auf. Jede Ebene des Büschels schneidet den Cylinder in einer Ellipse und der Ort der Brennpunkte dieser Ellipsen ist eine ebene Curve die Strophoide. Die Ebene des Büschels, welche zur Achse des Cylinders senkrecht steht, schneidet den Cylinder in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O der Doppelpunkt des Ortes ist, da sich in demselben die beiden Brennpunkte der Schnittcurve vereinigen. Da nun, wie erwähnt, die Brennpunkte der Schnitte des Ebenenbüschels im Achsenschnitt $Au'''HJ$ gelegen sind, können wir die Strophoide folgendermassen construiren: Man ziehe durch den Punkt u''' einen Strahl $u'''J$ und construire die zwei Kreise, welche die Geraden Au''', HJ und den Strahl $u'''J$ berühren. Es sei K der Mittelpunkt eines solchen Kreises, so ist sein Berührungspunkt u' mit dem Strahl $u'''J$ ein Punkt der Strophoide.

4) Eine vierte Construction ergibt sich aus dem Art. 4, wo wir die Strophoide als Enveloppe aller Kreise erkannt haben, welche die Punkte der Parabel (18) zu Mittelpunkten haben und den festen Kreis mit u''' als Mittelpunkt und $u'''O$ als Halbmesser rechtwinklig schneiden.

Alle diese Constructionen sind zum Teil in früherer Entwickelung gelegen und wir können von ihrem Beweise Umgang nehmen, zumal dieselben hinlänglich bekannt sind.

Agram, März 1877.

II.

Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten.

Fortsetzung von N. XIV. T. LIX.

Von

Hans Naegelsbach.

Erst nach dem Druck der ersten unter obigem Titel in diesem Archiv (59. T. 2. H.) veröffentlichten Abhandlung hat der Verfasser die geistreiche Arbeit des Herrn Prof. E. Schröder „Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen", Math. Ann. II. 2, kennen gelernt. In derselben erscheint die Fürstenau'sche Methode als ein specieller Fall einer viel allgemeineren Methode. Es entstand daher die Frage, ob die Studien fortzusetzen seien, und der Verfasser hat sich dafür entschieden in der Ueberlegung, dass, nachdem man für die praktische Anwendung sich doch für einen der in Schröder's allgemeinerer Methode enthaltenen speciellen Fälle entscheiden muss, gerade die Fürstenau'sche Methode, wegen der geradezu elementaren Entwicklung und übersichtlichen Darstellung, deren sie fähig ist, eine Zukunft zu haben verspricht. Die Resultate der Untersuchung aber sind dann so ausgefallen, dass sie jedenfalls der Beachtung wert sind.

Eine dem Inhalt nach verwandte Arbeit ist die in den mathem. Annalen (IX. Bd. 4. H.) erschienene Abhandlung des Herrn J. König in Budapest über einen allgemeinen Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung $n$ten Grades. Dort wird

ebenfalls für die Gleichung $fx = 0$ $\frac{1}{fx}$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt, und der Ausdruck für die kleinste Wurzel abhängig gemacht von der Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Coefficienten dieser Entwicklung. Der theoretisch sehr interessante Ausdruck dürfte in Bezug auf praktische Anwendbarkeit den Mangel haben, dass allzuviel Coefficienten wirklich entwickelt werden müssen um ein einigermassen genaues Resultat zu geben.

Was nun den Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung betrifft, so steht er zu dem der ersten in folgender Beziehung: In der ersten Abhandlung sind die Fürstenau'schen Näherungswerte der grössten resp. kleinsten, reellen oder complexen, Wurzeln einer numerischen Gleichung durch Divisionscoefficienten ausgedrückt worden. Durch dieselben liess sich auch der genaue Wert des Fehlers ausdrücken und mit Hülfe dieses genauen Wertes angeben, welchem Werte sich der Fehler bei wachsender Annäherung immer mehr nähert. Die Form dieses Fehlers hängt wesentlich davon ab, ob die zweitgrössten resp. kleinsten Wurzeln reell oder complex sind, so dass sich im Ganzen vier Fälle ergeben. Aus der Form des Fehlers aber konnte dann geschlossen werden, in welcher Weise sich die Annäherung in jedem der vier Fälle vollzieht. Dies zu untersuchen war der hauptsächlichste Zweck der ersten Abhandlung. Im Folgenden gehen wir einen Schritt weiter.

Unter der Voraussetzung, dass die Annäherung ins Unendliche getrieben ist, lässt sich dieser Grenzwert des Fehlers in allen Fällen durch eine Reihe aufeinanderfolgender Näherungswerte der Wurzeln selbst ausdrücken. Der so gefundene Wert ist allerdings bei endlicher Annäherung selbst nur wieder ein Näherungswert, aber er lässt sich in doppelter Weise sehr vorteilhaft verwenden. Erstens kann man ihn direct als Correctur an dem durch das erste Verfahren gefundenen Näherungswert anbringen. Der nach dieser Correctur noch vorhandene Fehler lässt sich dann wieder genau durch Divisionscoefficienten ausdrücken und dann die Form des Grenzwertes angeben, dem er sich immer mehr nähert. Es ergibt sich, dass, wie der erste Fehler im Allgemeinen abnahm mit den Potenzen des Verhältnisses der zweitgrössten Wurzel zur ersten, so der zweite Fehler abnimmt mit den Potenzen des Quadrats dieses Verhältnisses, oder mit den Potenzen des Verhältnisses der drittgrössten Wurzel zur grössten, je nachdem das eine oder das andere grösser ist. Dieser zweite Fehler ist also kleiner als der erste auch bei endlicher Annäherung. Zweitens kann man das Doppelte des gefundenen Wertes als Correctur anwenden, und erhält so zu dem ersten Näherungswert einen zweiten, der den gleichen Grad der Annäherung besitzt, aber auf der entgegengesetzten Seite vom wahren Werte abweicht.

Was die praktische Verwendbarkeit des Verfahrens zur wirklichen numerischen Berechnung der Wurzeln anlangt, so wird diese allerdings umständlich, wenn die grössten Wurzeln zwei Paare complexer Werte sind. Es geht dann nämlich die Berechnung auf eine Determinante 5ten Grades hinaus. Sind die grössten Wurzeln eine reelle und ein Paar complexe, so kommt man auf Determinanten 3ten Grades, die sich ziemlich bequem berechnen lassen. Wenn die beiden ersten Wurzeln reell sind, wird die Berechnung der Correctur sehr einfach, und dies ist gerade der einzige Fall, wo diese Berechnung unbedingt erforderlich ist; denn in diesem Fall allein kann es vorkommen, dass bei dem ersten Verfahren die Näherungswerte sich einseitig nähern, in den drei anderen Fällen liefert schon das erste Verfahren zu grosse und zu kleine Werte.

Es sind im Folgenden nur die vier, resp. acht wichtigsten Fälle untersucht, also abgesehen von vielfachen Wurzeln auch die Fälle nicht berücksichtigt, wo ein Paar reelle Wurzeln gleich und entgegengesetzt sind, oder wo eine reelle Wurzel dem Modul eines complexen Wurzelpaares gleich ist, oder wo endlich zwei complexe Wurzelpaare gleiche Moduln haben.

§ 1.

Sind α_n und α_{n-1} einzelne reelle Werte, so ist nach Abh. I.

$$1)\quad x_r = \frac{(\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n)} = \alpha_n + \frac{(\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_{n-1})}{(\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n)} = \alpha_n + \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-1}}$$

Das Letztere für grosse r, wenn man statt der Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte nimmt. Ist nun

$$x_{r+1} - x_r = \Delta x_r, \quad \Delta x_{r+1} - \Delta x_r = \Delta^2 x_r,$$

so hat man

$$\Delta x_{r-2} = \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3} \cdot \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n} \cdot \frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-1}} \quad \text{und}$$

$$2)\quad \frac{\Delta x_{r-1}}{\Delta x_{r-2}} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Das Verhältniss $\frac{\Delta x_{r-1}}{\Delta x_{r-2}}$ nähert sich also bei wachsendem r immer mehr dem $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. Es liesse sich auch hier leicht angeben, wie diese Annäherung von den Wurzelwerten abhängt, doch ist dies im Folgenden nicht nötig zu wissen. Wir wenden die Gleichung 2) an um zu erkennen, ob wirklich der erste Fall vorliegt, und ob r gross

genug ist, dass die Näherung den durch die Formel gegebenen Gang einhält. Es ist dann weiter

$$\frac{\Delta^2 x_{r-2}}{\Delta x_{r-2}} = \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n}; \qquad \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3} \cdot \frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-1}} = \frac{(\Delta x_{r-2})^2}{\Delta^2 x_{r-2}};$$

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \cdot \frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-1}} = \frac{(\Delta x_{r-1})^2}{\Delta^2 x_{r-2}};$$

und der gesuchte Näherungswert ist

$$3)\qquad x'_r = x_r - \frac{(\Delta x_{r-1})^2}{\Delta^2 x_{r-2}} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & x_r \\ \Delta x_{r-2}, & x_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & 1 \end{vmatrix}}.$$

Der genaue Wert des Fehlers ergibt sich, wenn ich die x_r durch die Divisionscoefficienten ausdrücke. Sei zur Abkürzung $(\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) = (r)$, und $(\alpha_1{}^r \ldots \alpha_{n-1}) = (\bar{r})$, so erhält man

$$x_r = \alpha_n + \frac{(\overline{r+1})}{(r)}, \quad \Delta x_r = \frac{(\overline{r+2})}{(r+1)} - \frac{(\overline{r+1})}{(r)} = -\frac{\begin{vmatrix} (r+1), & (\overline{r+2}) \\ (r), & (\overline{r+1}) \end{vmatrix}}{(r)(r+1)}.$$

Demnach ist

$$4)\qquad x'_r = \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, & (r-1)(r).\alpha_n + (r-1)(\overline{r+1}) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2)(r-1).\alpha_n + (r-2)(\bar{r}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, & (r-1)(r) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2)(r-1) \end{vmatrix}} =$$

$$= \alpha_n + \frac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, & (r-1)(\overline{r+1}) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2)(\bar{r}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (r), & (\overline{r+1}) \\ (r-1), & (\bar{r}) \end{vmatrix}, & (r-1)(r) \\ \begin{vmatrix} (r-1), & (\bar{r}) \\ (r-2), & (\overline{r-1}) \end{vmatrix}, & (r-2)(r-1) \end{vmatrix}}.$$

Den nämlichen Fehler geben auch die Näherungswerte

$$x_{r-1} - \frac{\Delta x_{r-1} \cdot \Delta x_{r-2}}{\Delta^2 x_{r-2}} \text{ und } x_{r-2} - \frac{(\Delta x_{r-2})^2}{\Delta^2 x_{r-2}}.$$

Ich habe für die grösste Wurzel der ersten Form des Näherungswertes den Vorzug gegeben, weil dabei zur Correctur von x_r kein späterer Näherungswert nötig ist. Aus demselben Grunde ist für die kleinste Wurzel die letzte Form des Näherungswertes gewählt. Uebrigens kann diese Gleichheit des Fehlers bei numerischen Berechnungen mit Vorteil als Rechenprobe benützt werden. Analoges wiederholt sich bei den drei übrigen Fällen, und mag diese Bemerkung einfürallemal gemacht sein.

Es ist nun zu untersuchen, welchem Wert sich der Fehler für grosse r nähert.

Der Nenner erhält, wenn man für die Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte, d. h.

$$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n} \text{ und } (\alpha_1{}^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}}$$

setzt, leicht den Wert

$$-\frac{\alpha_n{}^{3r+3n-7}\alpha_{n-1}{}^{r+n-3}}{f'\alpha_n{}^3 g'\alpha_{n-1}}(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2.$$

Dagegen wird der Zähler für dieselben Werte identisch null, und man muss daher zu den zweiten Näherungswerten übergehen. Es ist hier zu unterscheiden, ob α_{n-2} ein einzelner reeller Wert ist, oder ob α_{n-2} und α_{n-3} ein Paar complexe Wurzeln sind.

Im ersten Fall müssen wir setzen

$$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-1}} \text{ und}$$

$$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}}.$$

Es wird dann

$$(r)(\bar{r}) = \left(\frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}\alpha_{n-1}{}^{r+n-2}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}{}^{2r+2n-3}}{f'\alpha_{n-1} g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-2}},$$



$$(r-1)(r+1)=\left(\frac{\alpha_n{}^{r+n-2}}{f'\alpha_n}+\frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-2}}{f'\alpha_{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-1}}{g'\alpha_{n-1}}+\frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{g'\alpha_{n-2}}\right)=$$

$$=\frac{\alpha_n{}^{r+n-2}\alpha_{n-1}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-1}}+\frac{\alpha_{n-1}{}^{2r+2n-3}}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}+\frac{\alpha_n{}^{r+n-2}\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-2}};$$

Die vierten Glieder sind weggelassen, da sie jedenfalls bei grossen r gegen die vorhergehenden verschwinden. Setzt man diese und die analogen Ausdrücke im Zähler ein, nachdem man die letzte Colonne zur ersten addirt hat, so erhält man eine Determinante, welche sich in die Summe von 9 Determinanten zerlegen lässt, von welchen jedoch wieder vier bei grossen r gegen die übrigen verschwinden. Es bleibt erstens die Determinante, welche in allen Colonnen die ersten Glieder der obigen Ausdrücke enthält, aber sie wird identisch null. Die beiden Determinanten ferner, welche je in einer Colonne die ersten, in der andern die zweiten Glieder enthalten, geben die Summe

$$\frac{\alpha_n{}^{r+n-3}\alpha_{n-1}{}^{3r+3n-7}(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2}{f'\alpha_n f'\alpha_{n-1}\,g'\alpha_{n-1}{}^2}$$

Die beiden Determinanten endlich, welche je in einer Colonne die ersten, in der andern die dritten Glieder enthalten, geben die Summe

$$-\frac{\alpha_n{}^{2r+2n-4}\alpha_{n-1}{}^{r+n-3}\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})^2}{f'\alpha_n{}^2 g'\alpha_{n-1}\,g'\alpha_{n-2}}.$$

Es wird sonach für grosse r der Fehler

$$5)\quad -\frac{\alpha_{n-1}{}^{2r+2n-4}}{\alpha_n{}^{2r+2n-4}}\cdot\frac{f'\alpha_n{}^2}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}+\frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}}{\alpha_n{}^{r+n-3}}\cdot\frac{(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})^2}{(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2}\cdot\frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-2}}$$

Von diesen beiden Gliedern verschwindet noch das zweite gegen das erste oder umgekehrt, je nachdem $\frac{\alpha_{n-1}{}^2}{\alpha_n{}^2}>\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$ oder umgekehrt, wenn die r gross genug sind. Diese Bemerkung gilt analog auch bei den übrigen Fällen und mag hier einfürallemal gemacht sein.

Man hat also jetzt für grosse r

$$6)\quad x'_r=\alpha_n-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{2r+2n-4}\cdot\frac{f'\alpha_n{}^2}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}+$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3}\cdot\frac{(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})^2}{(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2}\,\frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-2}}$$

Hier mag noch bemerkt werden, dass die Determinante des Zählers identisch so transformirt werden kann, dass die ersten Näherungswerte den Ausdruck 5) ergeben. Man hat nämlich

$$(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_{n-1}) = (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_{n-2}) +$$
$$+(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}) =$$
$$= (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_{n-2}) +$$
$$+\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1})(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}) +$$
$$+\alpha_n\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r-2}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}),$$

und ebenso

$$(\alpha_1^{r}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}) = (\alpha_1^{r}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-2}) +$$
$$+\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1})(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1}) +$$
$$+\alpha_n\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1}).$$

Setze ich diese Werte in der ersten Zeile ein, so kommt

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_n) & (\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-2}), & (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1}), & & (\alpha_1^{r-2}\dots\alpha_n)(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1})\end{vmatrix} +$$
$$+\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1})(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1})\,.\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}), & (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_{n-1}) \\ (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-2}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}.$$

und dies gibt für

$$(\alpha_1^{r}\dots\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n}, \quad (\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}},$$
$$(\alpha_1^{r}\dots\alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}}$$

den angegebenen Wert.

Ist zweitens

$$\alpha_{n-2} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \alpha_{n-3} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

so setze ich, wie in Abh. I.,

$$A_r = R^{n-4}\sin r\varphi + Q_1\,.\,R^{n-5}\sin(r+1)\varphi + \dots$$
$$B_r = R^{n-4}\cos r\varphi + Q_1\,.\,R^{n-5}\cos(r+1)\varphi + \dots$$

Es ist dann

$$A_{r+1} = A_r\cos\varphi + B_r\sin\varphi, \quad B_{r+1} = B_r\cos\varphi - A_r\sin\varphi,$$
$$A_{r-1} = A_r\cos\varphi - B_r\sin\varphi, \quad B_{r-1} = B_r\cos\varphi + A_r\sin\varphi,$$
$$A_{r+1} + A_{r-1} = 2A_r\cos\varphi.$$

Ferner

$$q\alpha_{n-2} = B_{-n+4} - i\,.\,A_{-n+4}, \quad q\alpha_{n-3} = B_{-n+4} + i\,.\,A_{-n+4},$$
$$q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3} = A^2_{-n+4} + B^2_{-n+4} = A^2_r + B^2_r,$$
$$\begin{vmatrix}A_r, & A_{r+1} \\ A_{r-1}, & A_r\end{vmatrix} = q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin^2\varphi,$$
$$\begin{vmatrix}A_r, & A_{r+2} \\ A_{r-1}, & A_{r+1}\end{vmatrix} = q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin^2\varphi\,.\,2\cos\varphi.$$

Ich habe hier die wichtigsten Identitäten für die A und B zusammengestellt, obwol sie teilweise erst später zur Anwendung kommen. Sie gelten übrigens analog für alle analogen Ausdrücke.

Die zweiten Näherungswerte sind nun:

$$(a_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-1}},$$

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-3}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-2}(\cos(r+n-2)\varphi + i\sin(r+n-2)\varphi)}{(R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \alpha_{n-1})\, 2Ri\sin\varphi \,.\, q\alpha_{n-2}}$$

$$- \frac{R^{r+n-2}(\cos(r+n-2)\varphi - i\sin(r+n-2)\varphi)}{(R(\cos\varphi - i\sin\varphi) - \alpha_{n-1})\, 2Ri\sin\varphi \,.\, q\alpha_{n-3}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-3}}{q\alpha_{n-2}\, q\alpha_{n-3}\sin\varphi} \cdot \frac{RA_{r+1} - \alpha_{n-1}A_{r+2}}{(R^2 - 2R\alpha_{n-1}\cos\varphi + \alpha^2_{n-1})}.$$

Unter Vernachlässigung der verschwindenden Glieder hat man dann wieder

$$(r).(\bar{r}) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}$$

$$+ \frac{\alpha_n^{r+n-1}R^{r+n-3}}{f'\alpha_n q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi} \cdot \frac{RA_{r+1} - \alpha_{n-1}A_{r+2}}{R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha^2_{n-1}},$$

$$(r-1)(\overline{r+1}) = \frac{\alpha_n^{r+n-2}\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f'\alpha_n g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}^{2r+2n-3}}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}$$

$$+ \frac{\alpha_n^{r+n-2}R^{r+n-2}}{f'\alpha_n q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi} \cdot \frac{RA_{r+2} - \alpha_{n-1}A_{r+3}}{R^2 - 2R\alpha_{n-1}\cos\varphi + \alpha_{n-1}^2}$$

Werden diese Ausdrücke in die Zahlendeterminante eingesetzt, so verschwinden wieder die vier letzten Determinanten bei grossen r, und die erste identisch. Die zweite und dritte behalten denselben Wert wie vorhin, die vierte und fünfte aber ergeben sich folgendermassen:

$$\frac{\alpha_n^{2r+2n-4}\alpha_{n-1}^{r+n-3}R^{r+n-4}}{f'\alpha_n^2 g'\alpha_{n-1}q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi(R^2 - 2R\alpha_{n-1}\cos\varphi + \alpha_{n-1}^2)} \times$$

$$\times \left\{ R.\begin{vmatrix} \alpha_{n-1}, & R(RA_{r+2} - \alpha_{n-1}A_{r+3}) \\ 1, & (RA_{r+1} - \alpha_{n-1}A_{r+2}) \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \alpha_{n-1}\begin{vmatrix} \alpha_{n-1}, & R(RA_{r+1} - \alpha_{n-1}A_{r+2}) \\ 1, & (RA_r - \alpha_{n-1}A_{r+1}) \end{vmatrix} \right\};$$

die Klammer wird, wenn man die Determinanten zusammenfasst:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1}, & RA_{r+2}(R^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+\alpha_{n-1}^2) \\ 1, & A_{r+1}(R^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+\alpha_{n-1}^2) \end{vmatrix}$$
$$=(R^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+\alpha_{n-1}^2)\,\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}A_{r+1}-RA_{r+2}).$$

Demnach ist jetzt der ganze Fehler

$$-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{2r+2n-4}\frac{f'\alpha_n^2}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}-\frac{R^{r+n-4}}{\alpha_n^{r+n-3}}\cdot\frac{f'\alpha_n}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi}\times$$
$$\times\frac{\alpha_{n-1}A_{r+1}-RA_{r+2}}{(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2}$$

Ich setze noch

$$\alpha_{n-1}A_{r+1}-RA_{r+2}=(\alpha_{n-1}-R\cos\varphi).A_{r+1}-R\sin\varphi.B_{r+1}=$$
$$=((\alpha_{n-1}-R\cos\varphi)A_{-n+4}-R\sin\varphi\,B_{-n+4})\cos(r+n-3)\varphi+$$
$$+((\alpha_{n-1}-R\cos\varphi)B_{-n+4}+R\sin\varphi.A_{-n+4}).\sin(r+n-3)\varphi=$$
$$=A.\cos(r+n-3)\varphi+B.\sin(r+n-3)\varphi=\sqrt{A^2+B^2}.\sin(\chi+(r+n-3)\varphi),$$

wobei

$$\operatorname{tang}\chi=\frac{A}{B}=\frac{(\alpha_{n-1}-R\cos\varphi)A_{-n+4}-R\sin\varphi.B_{-n+4}}{(\alpha_{n-1}-R\cos\varphi)B_{-n+4}+R\sin\varphi.A_{-n+4}}=$$
$$=\frac{\dfrac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}}-\dfrac{R\sin\varphi}{\alpha_{n-1}-R\cos\varphi}}{1+\dfrac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}}\cdot\dfrac{R\sin\varphi}{\alpha_{n-1}-R\cos\varphi}},$$

also

$$\chi=\alpha-\beta,$$

wenn

$$\frac{A_{-n+4}}{B_{-n+4}}=\operatorname{tang}\alpha,\quad\frac{R\sin\varphi}{\alpha_{n-1}-R\cos\varphi}=\operatorname{tang}\beta$$

gesetzt wird.

Zugleich wird

$$A^2+B^2=(\alpha_{n-1}^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+R^2)(A_{-n+4}^2+B_{-n+4}^2)=$$
$$=(\alpha_{n-1}^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+R^2).q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}.$$

Man hat sonach

$$8)\quad x'_r=\alpha_n-\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{2r+2n-4}\frac{f'\alpha_n^2}{f'\alpha_{n-1}g'\alpha_{n-1}}-\frac{R^{r+n-4}}{\alpha_n^{r+n-3}}\,\frac{f'\alpha_n}{(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2\sin\varphi}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\alpha_{n-1}^2-2R\alpha_{n-1}\cos\varphi+R^2}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}}}.\sin(\chi+(r+n-3)\varphi).$$

Für die kleinste Wurzel hat man nach Abh. I.

$$x_{-r}=\frac{(\alpha_1^{-r+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)}$$

und wenn

$$x_{-r+1} - x_{-r} = \Delta x_{-r}, \quad \text{und} \quad \Delta x_{-r+1} - \Delta x_{-r} = \Delta^2 x_{-r}$$

gesetzt wird,

$$9) \qquad x'_{-r} = x_{-r} - \frac{(\Delta x_{-r})^2}{\Delta^2 x_{-r}}.$$

Von den in Abh. I. gerechneten Beispielen gehört hierher das erste. Für den grössten Wert α_8 hat man

$$x_{16} = -\frac{643}{211} = -3{,}047393\,36, \quad \Delta x_{16} = -0{,}002373\,35,$$

$$x_{17} = -\frac{1961}{643} = -3{,}049766\,71, \quad \Delta x_{17} = \quad 0{,}001322\,04,$$

$$x_{18} = -\frac{5978}{1961} = -3{,}048444\,67, \quad \Delta x_{18} = -0{,}000735\,65.$$

$$x_{19} = -\frac{2604}{854} = -3{,}049180\,32,$$

$$\frac{\Delta x_{17}}{\Delta x_{16}} = -0{,}557\ldots, \quad \frac{\Delta x_{18}}{\Delta x_{17}} = -0{,}556\ldots,$$

$$\frac{(\Delta x_{17})^2}{\Delta^2 x_{16}} = 0{,}000472\,96, \quad x'_{18} = -3{,}048917\,63,$$

und als zu kleinen Wert $x^0_{18} = -3{,}049390\,59$;

$$\frac{(\Delta x_{18})^2}{\Delta^2 x_{17}} = -0{,}000263\,00, \quad x'_{19} = -3{,}048917\,32,$$

und als zu grossen Wert $x^0_{19} = -3{,}048654\,32$.

Der kleinsten Wurzel α_1 nähern sich die Werte einseitig von unten. Hier ist es also von Wichtigkeit, einen zu grossen Wert zu kennen. Man hat

$$x_{-20} = \frac{435}{322} = 1{,}350931\,67, \quad \Delta x_{-21} = -0{,}001197\,89,$$

$$x_{-21} = \frac{2254}{1667} = 1{,}352129\,57 \quad \Delta x_{-22} = -0{,}000954\,84,$$

$$x_{-22} = \frac{1667}{1232} = 1{,}353084\,41, \quad \Delta x_{-23} = -0{,}000761\,73;$$

$$x_{-23} = \frac{1232}{910} = 1{,}353846\,15,$$

$$\frac{\Delta x_{-21}}{\Delta x_{-22}} = 1{,}254\,\ldots, \quad \frac{\Delta x_{-22}}{\Delta x_{-23}} = 1{,}253\,\ldots,$$

$$\frac{(\Delta x_{-22})^2}{\Delta^2 x_{-22}} = -\,0{,}003751\,07, \quad x'_{-22} = 1{,}356835\,48,$$

und als zu grossen Wert $x^0_{-22} = 1{,}360586\,55$;

$$\frac{(\Delta x_{-23})^2}{\Delta^2 x_{-23}} = -\,0{,}003004\,84, \quad x'_{-23} = 1{,}356850\,99,$$

und als zu grossen Wert $x^0_{-23} = 1{,}359855\,83$.

§ 2.

Sei α_n ein einzelner absolut grösster Wert, aber

$$\alpha_{n-1} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{und} \quad \alpha_{n-2} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Ist jetzt

$$A_r = R^{n-3}\sin r\varphi + J_1 . R^{n-4}\sin(r+1)\varphi + \ldots,$$
$$B_r = R^{n-3}\cos r\varphi + J_1 . R^{n-4}\cos(r+1)\varphi + \ldots,$$

so gelten für diese die nämlichen Gleichungen wie im vorigen Paragraphen, nur beziehen sie sich jetzt auf die Gleichung $i_x = 0$.

Nun ist nach Abh. I.

$$x_r = \frac{(\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)} = \alpha_n + \frac{(\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_{n-1})}{(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)} =$$

$$= \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n{}^{r+n-1}}\;\frac{f'\alpha_n}{i\alpha_{n-1}\,i\alpha_{n-2}\sin\varphi} . A_{r+2} =$$

$$= \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n{}^{r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{i\alpha_{n-1}\,i\alpha_{n-2}\sin\varphi} . (A_{-n+3}\cos(r+n-1)\varphi +$$
$$+ B_{-n+3}\sin(r+n-1)\varphi),$$

oder wenn ich

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \operatorname{tang}\psi$$

setze:

$$10)\quad x_r = \alpha_n + \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n{}^{r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi\sqrt{i\alpha_{n-1}\,i\alpha_{n-2}}} . \sin(\psi + (r+n-1)\varphi).$$

Aus dieser Form des Fehlers erkennt man, nebenbei bemerkt, das in Abh. I. auf einem andern Weg bewiesene Gesetz wieder, dass die Näherungswerte sich reihenweise oder auf- und abspringend nähern, je nachdem $\varphi \lessgtr 90^0$ und $\alpha_n = \pm$ ist, da das Vorzeichen

des Fehlers mit dem des Sinus eines Winkels sich ändert, der constant um φ wächst.

Weiter ist nun

$$\Delta x_{r-1} = \frac{R^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-2}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi . \sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} \cdot \left(\frac{R}{\alpha_n} \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) \right.$$
$$\left. - \sin(\psi + (r+n-2)\varphi)\right)$$

$$= \frac{R^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-2}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi . \sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} \cdot \left(\left(\frac{R}{\alpha_n} - \cos\varphi\right) . \sin(\psi(r+n-1)\varphi) \right.$$
$$\left. + \sin\varphi . \cos(\psi + (r+n-1)\varphi)\right);$$

$$\Delta x_r = \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi . \sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} \left(\left(\frac{R}{\alpha_n} \cos\varphi - 1\right) . \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{R}{\alpha_n} \sin\varphi . \cos(\psi + (r+n-1)\varphi)\right).$$

Dann ist weiter

$$\Delta x_r - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-1} = - \frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi . \sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} \times$$
$$\times \frac{R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2} \cdot \sin(\psi + (r+n-1)\varphi),$$

ebenso

$$\Delta x_{r+1} - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_r = - \frac{R^{r+n-1}}{\alpha_n^{r+n}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi . \sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} \times$$
$$\times \frac{R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2} \cdot \sin(\psi + (r+n)\varphi);$$

folglich

$$11) \qquad \frac{\Delta^2 x_r - \frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta^2 x_{r-1}}{\Delta x_r} = - \frac{R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2}{\alpha_n^2}.$$

Die 11) lässt sich auch auf die Form bringen

$$\frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-1} - 2\frac{R}{\alpha_n} \cos\varphi . \Delta x_r + \Delta x_{r+1} = 0$$

und ebenso hat man auch:

$$\frac{R^2}{\alpha_n^2} \Delta x_{r-2} - 2\frac{R}{\alpha_n} \cos\varphi . \Delta x_{r-1} + \Delta x_r = 0.$$

Hieraus folgt

$$12)\qquad \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right) = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r+1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}}.$$

$$13)\qquad \left(2\frac{R}{\alpha_n}\cos\varphi\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_{r+1} + \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta x_r}.$$

Dann ergibt sich weiter

$$\frac{R^{r+n-2}}{\alpha_n^{r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_n}{\sin\varphi.\sqrt{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}}} . \sin(\psi + (r+n-1)\varphi) =$$

$$= \Delta x_r . \frac{\Delta x_r - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta^2 x_r - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta^2 x_{r-1}}.$$

Der von uns gesuchte Näherungswert ist dann

$$14)\qquad x'_r = x_r - \Delta x_r . \frac{\Delta x_r - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta x_{r-1}}{\Delta^2 x_r - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta^2 x_{r-1}}.$$

Um nun wieder den genauen Wert des Fehlers zu bestimmen habe ich

$$x'_r = -\frac{\begin{vmatrix} x_{r+1}, & x_{r+2} \\ x_r, & x_{r+1} \end{vmatrix} - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \begin{vmatrix} x_r, & x_{r+1} \\ x_{r-1}, & x_r \end{vmatrix}}{\Delta^2 x_r - \left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r \Delta^2 x_{r-1}} = -$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} x_{r+1}, & \Delta x_{r+1} \\ x_r, & \Delta x_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_r, & \Delta x_r \\ x_{r-1}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}{\Delta^2 x_r . \begin{vmatrix} \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix} - \Delta^2 x_{r-1} . \begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}$$

Der Zähler lässt sich als Determinante schreiben

$$\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} x_r, & \Delta x_r \\ x_{r-1}, & \Delta x_{r-1} \end{vmatrix}, & 0, & \begin{vmatrix} x_{r+1}, & \Delta x_{r+1} \\ x_r, & \Delta x_r \end{vmatrix} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile mit x_r multiplicirt und zur ersten addirt, so lässt sich der gemeinsame Factor Δx_r vor die Determinante setzen, und man hat

$$\Delta x_r . \begin{vmatrix} x_{r-1}, & x_r, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Ebenso lässt sich der Nenner als Determinante schreiben und wird

$$\begin{vmatrix} -\Delta^2 x_{r-1}, & 0, & \Delta^2 x_r \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2} & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile von der ersten subtrahirt, so lässt sich $-\Delta x_r$ vor die Determinante setzen, und man erhält

$$-\Delta x_r . \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}$$

Im Ganzen ist sonach auch

$$14^a) \quad x'_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & x_r \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & x_{r-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & 1 \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & x_{r+2} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & x_{r+1} \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & x_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1}, & 1 \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r, & 1 \\ \Delta x_{r-2}, & \Delta x_{r-1}, & 1 \end{vmatrix}}$$

Würde ich

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_n^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{r+1}, & \Delta x_{r+2} \\ \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_r, & \Delta x_{r+1} \\ \Delta x_{r-1}, & \Delta x_r \end{vmatrix}}$$

gesetzt haben, so würde ich aus x_r den Wert bekommen haben, der jetzt x'_{r+1} heisst. Es ist darüber dieselbe Bemerkung zu machen wie § 1.

Werden in 14ᵃ) die x_r durch die Divisionscoefficienten ausgedrückt und die Nenner weggeschafft, so ergibt sich

$$15) \quad x'_r = \alpha_n + \frac{\begin{vmatrix} (r+2)\cdot\begin{vmatrix}(r+1), & \overline{(r+2)} \\ (r), & \overline{(r+1)}\end{vmatrix}, & (r)\cdot\begin{vmatrix}(r+2), & \overline{(r+3)} \\ (r+1), & \overline{(r+2)}\end{vmatrix}, & (r)\cdot(r+1)\cdot\overline{(r+3)} \\ (r+1)\cdot\begin{vmatrix}(r), & \overline{(r+1)} \\ (r-1), & \overline{(r)}\end{vmatrix}, & (r-1)\cdot\begin{vmatrix}(r+1), & \overline{(r+2)} \\ (r), & \overline{(r+1)}\end{vmatrix}, & (r-1)\cdot(r)\cdot\overline{(r+2)} \\ (r)\cdot\begin{vmatrix}(r-1), & \overline{(r)} \\ (r-2), & \overline{(r-1)}\end{vmatrix}, & (r-2)\cdot\begin{vmatrix}(r), & \overline{(r+1)} \\ (r-1), & \overline{(r)}\end{vmatrix}, & (r-2)\cdot(r-1)\cdot\overline{(r+1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r+2)\cdot\begin{vmatrix}(r+1), & \overline{(r+2)} \\ (r), & \overline{(r+1)}\end{vmatrix}, & (r)\cdot\begin{vmatrix}(r+2), & \overline{(r+3)} \\ (r+1), & \overline{(r+2)}\end{vmatrix}, & (r)\cdot(r+1)\cdot\overline{(r+2)} \\ (r+1)\cdot\begin{vmatrix}(r), & \overline{(r+1)} \\ (r-1), & \overline{(r)}\end{vmatrix}, & (r-1)\cdot\begin{vmatrix}(r+1), & \overline{(r+2)} \\ (r), & \overline{(r+1)}\end{vmatrix}, & (r-1)\cdot(r)\cdot\overline{(r+1)} \\ (r)\cdot\begin{vmatrix}(r-1), & \overline{(r)} \\ (r-2), & \overline{(r-1)}\end{vmatrix}, & (r-2)\cdot\begin{vmatrix}(r), & \overline{(r+1)} \\ (r-1), & \overline{(r)}\end{vmatrix}, & (r-2)\cdot(r-1)\cdot\overline{(r)} \end{vmatrix}}$$

Man hat so den genauen Wert des Fehlers. Nimmt man für die Divisionscoefficienten die ersten Näherungswerte und setzt demgemäss

$$(r+2) = \frac{\alpha_n^{r+n+1}}{f'\alpha_n}, \quad \overline{(r+2)} = \frac{R^{r+n-1}}{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi} . A_{r+3},$$

$$\begin{vmatrix}(r+1), & \overline{(r+2)} \\ (r), & \overline{(r+1)}\end{vmatrix} = \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{r+n-2}}{f'\alpha_n\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi} (A_{r+2}\alpha_n - A_{r+3} R),$$

u. s. w., so ergibt sich für den Nenner

$$\frac{\alpha_n^{7r+7n-9} R^{2r+2n-7}}{f'\alpha_n^7\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}^2 \sin^2\varphi} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} R^2(A_{r+2}\alpha_n - A_{r+3} R), & R^2(A_{r+3}\alpha_n - A_{r+4} R), & \alpha_n^2 \\ R(A_{r+1}\alpha_n - A_{r+2} R) & R(A_{r+2}\alpha_n - A_{r+3} R) & \alpha_n \\ (A_r \alpha_n - A_{r+1} R), & (A_{r+1}\alpha_n - A_{r+2} R), & 1 \end{vmatrix}.$$

Wird in dieser Determinante die zweite Zeile mit $-2R\cos\varphi$, die dritte mit R^2 multiplicirt und beide zur ersten addirt so verschwinden wegen $A_{r+2} - 2A_{r+1}\cos\varphi + A_r = 0$ die beiden ersten Glieder der ersten Zeile, und man erhält

$$(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + R^2) . R . \begin{vmatrix} A_{r+1}\alpha_n - A_{r+2} R, & A_{r+2}\alpha_n - A_{r+3} R \\ A_r \alpha_n - A_{r+1} R, & A_{r+1}\alpha_n - A_{r+2} R \end{vmatrix},$$

und wenn man hier die letzte Colonne mit α_n, die erste mit $-R$ multiplicirt und diese zur letzten addirt, so erhält man

$$(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + R^2)^2 . R . \begin{vmatrix} A_{r+1}, & A_{r+2} \\ A_r, & A_{r+1} \end{vmatrix} =$$
$$= (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + R^2)^2 . R . i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin^2\varphi.$$

Es nähert sich somit für grosse r der Nenner dem Wert

$$\frac{\alpha_n^{7r+7n-9} R^{2r+2n-6}}{f'\alpha_n^7 i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2}} \cdot (\alpha_n^2 - 2\alpha_n R \cos\varphi + R^2)^2.$$

Den Zähler untersuche ich lieber in der Form, die man erhält, wenn man die letzte Colonne zur zweiten, diese dann zur ersten addirt, also in der Form

$$\begin{vmatrix} (r+2)(r+1)(\overline{r+1}), & (r)\quad (r+2)(\overline{r+2}), & (r)\quad (r+1)(\overline{r+3}) \\ (r+1)(r)(\bar{r}), & (r-1)(r+1)(\overline{r+1}), & (r-1)(r)(\overline{r+2}) \\ (r)(r-1)(\overline{r-1}), & (r-2)(r)(\bar{r}) & (r-2)(r-1)(\overline{r+1}) \end{vmatrix}$$

Werden hier die ersten Näherungswerte eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{3r+3n-6}}{f'\alpha_n^6 i\alpha_{n-1}^3 i\alpha_{n-2}^3 \sin^3\varphi} \cdot \begin{vmatrix} A_{r+2}, & A_{r+3}, & A_{r+4} \\ A_{r+1}, & A_{r+2}, & A_{r+3} \\ A_r, & A_{r+1}, & A_{r+2} \end{vmatrix} = 0,$$

wie man erkennt, wenn man die erste Colonne, und die mit $-2\cos\varphi$ multiplicirte zweite Colonne zur dritten addirt. Es ist daher überzugehn zu den zweiten Näherungswerten der Divisionscoefficienten, und dabei ist wieder zu unterscheiden, ob α_{n-3} ein einzelner Wert, oder ob α_{n-3} und α_{n-4} ein Paar conjugirte Werte sind. Man hat aber im ersten Fall

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-2}} = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n} +$$
$$+ \frac{R^{r+n-1}(\cos(r+n-1)\varphi + i.\sin(r+n-1)\ \varphi)}{(R(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \alpha_n) 2Ri\sin\varphi . i\alpha_{n-1}}$$
$$- \frac{R^{r+n-1}(\cos(r+n-1)\varphi - i.\sin(r+n-1)\varphi}{(R(\cos\varphi - i\sin\varphi) - \alpha_n) . 2Ri\sin\varphi . i\alpha_{n-2}},$$

und da jetzt

$$i\alpha_{n-1} = B_{-n+3} - iA_{-n+3}, \quad i\alpha_{n-2} = B_{-n+3} + i.A_{-n+3}$$

erhält man dafür

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{R^{r+n-2}}{i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin\varphi} \cdot \frac{RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}}{R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2};$$

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-1}) = \frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-3}} =$$
$$= \frac{R^{r+n-2}}{i\alpha_{n-1} i\alpha_{n-2} \sin\varphi} \cdot A_{r+1} + \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-3}}$$

Werden diese Werte eingesetzt, und nur die Glieder beibehalten, die in Betracht kommen, so ergibt sich

$$(r+2)(r+1)(\overline{r+1}) = \frac{\alpha_n^{2r+2n+1} R^{r+n-1} A_{r+2}}{f'\alpha_n^2\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi} +$$

$$+ \frac{\alpha_n^{r+n} R^{2r+2n-3} A_{r+2}\,(\alpha_n(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}))}{f'\alpha_n\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}^2 \sin^2\varphi\,(R^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + \alpha_n^2)}$$

$$+ \frac{\alpha_n^{2r+2n+1}\,\alpha_{n-3}^{r+n-1}}{f'\alpha_n^2\, g'\alpha_{n-3}};$$

$$(r)(r+2)(\overline{r+2}) = \frac{\alpha_n^{2r+2n} R^{r+n-1} A_{r+3}}{f'\alpha_n^2\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi} +$$

$$+ \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{2r+2n-3} A_{r+3}\,(\alpha_n^2(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R^2(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}))}{f'\alpha_n\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}^2 \sin^2\varphi\,(R^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + \alpha_n^2)}$$

$$+ \frac{\alpha_n^{2r+2n}\,\alpha_{n-3}^{r+n}}{f'\alpha_n^2\, g'\alpha_{n-3}};$$

$$(r)(r+1)(\overline{r+3}) = \frac{\alpha_n^{2r+2n-1} R^{r+n} A_{r+4}}{f'\alpha_n^2\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi} +$$

$$+ \frac{\alpha_n^{r+n-1} R^{2r+2n-2} A_{r+4}\,(\alpha_n(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}))}{f'\alpha_n\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}^2 \sin^2\varphi\,(R^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + \alpha_n^2)}$$

$$+ \frac{\alpha_n^{2r+2n-1}\,\alpha_{n-3}^{r+n+1}}{f'\alpha_n^2\, g'\alpha_{n-3}}.$$

Wenn die gefundenen Ausdrücke in die Zählerdeterminante eingesetzt werden, lässt sich diese zerlegen in die Summe von 27 Determinanten. Von diesen kommen jedoch nur 7 in Betracht, indem die übrigen bei grossen r gegen sie verschwinden. Diese 7 sind die folgenden: Erstens die, welche in allen Colonnen die ersten Glieder der obigen Ausdrücke enthält und identisch verschwindet, wie wir bereits gesehen haben. Dann kommen die drei, welche in je zwei Colonnen die ersten Glieder, in der dritten die zweiten Glieder jener Ausdrücke enthalten; endlich die drei, welche in je zwei Colonnen die ersten Glieder, in der dritten die dritten Glieder der Ausdrücke enthalten. Die Summe der drei ersteren ist

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-8} R^{4r+4n-10}}{f'\alpha_n^5\, i\alpha_{n-1}^4\, i\alpha_{n-2}^4 \sin^4\varphi\,(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R\cos\varphi + R^2)} \times$$

$$\left\{\alpha_n \begin{vmatrix} \alpha_n^2 A_{r+2}, & \alpha_n^2 A_{r+3}, & R^2 A_{r+4}(\alpha_n(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})) \\ \alpha_n A_{r+1}, & \alpha_n A_{r+2}, & RA_{r+3}(\alpha_n(RA_r - \alpha_n A_{r+1}) + R(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2})) \\ A_r, & A_{r+1}, & A_{r+2}(\alpha_n(RA_{r-1} - \alpha_n A_r) + R(RA_r - \alpha_n A_{r+1})) \end{vmatrix}\right.$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_n^2 A_{r+2}, & R^2 A_{r+3}(\alpha_n^2(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R^2(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})), & \alpha_n^2 A_{r+4} \\ \alpha_n A_{r+1}, & RA_{r+2}(\alpha_n^2(RA_r - \alpha_n A_{r+1}) + R^2(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})), & \alpha_n A_{r+3} \\ A_r, & A_{r+1}(\alpha_n^2(RA_{r-1} - \alpha_n A_r) + R^2(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2})), & A_{r+2} \end{vmatrix}$$

$$\left. + R \begin{vmatrix} R^2 A_{r+2}(\alpha_n(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})), & \alpha_n^2 A_{r+3}, & \alpha_n^2 A_{r+4} \\ RA_{r+1}(\alpha_n(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + R(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3})), & \alpha_n A_{r+2}, & \alpha_n A_{r+3} \\ A_r\,(\alpha_n(RA_r - \alpha_n A_{r+1}) + R(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2})), & A_{r+1}, & A_{r+2} \end{vmatrix}\right\}$$

Wird in der zweiten Determinante die erste Colonne zur dritten addirt, so hat man

$$\alpha_n^2 A_{r+4} + \alpha_n^2 A_{r+2} = \alpha_n^2 A_{r+3} . 2\cos\varphi, \quad \text{u. s. f.}$$

Wird dann statt der dritten Colonne die zweite mit $2\cos\varphi$ multiplicirt und mit der dritten vertauscht, so wird die erste Zeile

$$\alpha_n^2 A_{r+2}, \quad \alpha_n^2 A_{r+3},$$
$$-2R^2\cos\varphi A_{r+3}(\alpha_n^2(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) - R^2(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})),$$

und analog die übrigen.

Wird in der dritten Determinante die zweite Colonne mit $-2\cos\varphi$ multiplicirt und zur dritten addirt, so hat man

$$\alpha_n^2 A_{r+4} - \alpha_n^2 A_{r+3} . 2\cos\varphi = -\alpha_n^2 A_{r+2}.$$

Wird dann die letzte Colonne mit der ersten vertauscht, so erhält man als erste Zeile

$$\alpha_n^2 A_{r+2}, \ \alpha_n^2 A_{r+3}, \ R^2 A_{r+2}(\alpha_n(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + R(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4})),$$

und analog die übrigen.

Nun haben die drei Determinanten die ersten Colonnen gleich, lassen sich also zusammenfassen. Das erste Glied der letzten Colonne wird

$$\begin{aligned} R^2\alpha_n^2(A_{r+4} - 2\cos\varphi\, A_{r+3})(RA_{r+1} - \alpha_n A_{r+2}) + \\ + R^3\alpha_n(A_{r+4} + A_{r+2})(RA_{r+2} - \alpha_n A_{r+3}) + \\ + R^4(A_{r+2} - 2\cos\varphi\, A_{r+3})(RA_{r+3} - \alpha_n A_{r+4}) \\ = R^2\{\alpha_n^3 A_{r+2}^2 - \alpha_n^2 R(A_{r+1}A_{r+2} + 2\cos\varphi\, A_{r+3}^2) + \\ + \alpha_n R^2(2\cos\varphi\, A_{r+2}A_{r+3} + A_{r+4}^2) - R^3 A_{r+3}A_{r+4}\} \\ = R^2(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2)(\alpha_n A_{r+2}^2 - RA_{r+3}A_{r+4}). \end{aligned}$$

Analog werden auch die beiden andern Glieder, so dass der ganze Ausdruck ist

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-8} R^{4r+4n-10}}{f'\alpha_n^5\, i\alpha_{n-1}^4\, i\alpha_{n-2}^4 \sin^4\varphi} \begin{vmatrix} \alpha_n^2 A_{r+2}, & \alpha_n^2 A_{r+3}, & R^2(\alpha_n A_{r+2}^2 - RA_{r+3}A_{r+4}) \\ \alpha_n A_{r+1}, & \alpha_n A_{r+2}, & R(\alpha_n A_{r+1}^2 - RA_{r+2}A_{r+3}) \\ A_r \ , & A_{r+1}, & (\alpha_n A_r^2 \ - RA_{r+1}A_{r+2}) \end{vmatrix}$$

Wird hier die zweite Zeile mit $-2\alpha_n\cos\varphi$ und die dritte mit α_n^2 multiplicirt, und beide zur ersten addirt, so werden die beiden ersten Glieder derselben null. Da ferner

$$\begin{vmatrix} \alpha_n A_{r+1}, & \alpha_n A_{r+2} \\ A_r \ , & A_{r+1} \end{vmatrix} = \alpha_n\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin^2\varphi$$

wird, so erhält man

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-7} R^{4r+4n-10}}{f'\alpha_n^5 i\alpha_{n-1}^3 i\alpha_{n-2}^3 \sin^2\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^2(\alpha_n A_r^2 - RA_{r+1}A_{r+2}) \\ \quad -2R\alpha_n \cos\varphi\,(\alpha_n A_{r+1}^2 - RA_{r+2}A_{r+3}) \\ \quad +R^2(\alpha_n A_{r+2} - RA_{r+3}A_{r+4}) \end{array} \right\}.$$

Der Ausdruck ist noch weiter umzuformen. Zunächst nimmt die Klammer noch die Form an

$$\begin{array}{l} (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + R^2)(\alpha_n A_r^2 - RA_{r+3}A_{r+4}) \\ \qquad - \alpha_n^2 R(2A_{r+1}A_{r+2} - A_{r-1}A_r - A_{r+3}A_{r+4}) \\ \qquad + \alpha_n R^2(2A_{r+2}^2 - A_r^2 - A_{r+4}^2). \end{array}$$

Ich drücke weiter alle A durch A_{r+2} und B_{r+2}, resp. durch $A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2$ und $A_{r+2}B_{r+2}$ aus, während $A_{r+2}^2 + B_{r+2}^2 = i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}$ ist. Ich erhalte so

$$\begin{array}{l} A_r^2 = \tfrac{1}{2} i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} + \tfrac{1}{2}(A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2)\cos 4\varphi - A_{r+2}B_{r+2}\sin 4\varphi, \\ A_{r+3}A_{r+4} = \tfrac{1}{2} i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}(A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2)\cos 3\varphi \\ \qquad\qquad + A_{r+2}B_{r+2}\sin 3\varphi, \\ 2A_{r+1}A_{r+2} - A_{r-1}A_r - A_{r+3}A_{r+4} = 2\sin^2 2\varphi\,((A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2)\cos\varphi \\ \qquad\qquad - 2A_{r+2}B_{r+2}\sin\varphi), \\ 2A_{r+2}^2 - A_r^2 - A_{r+4}^2 = 2(A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2)\sin^2 2\varphi. \end{array}$$

Dadurch erhält die Klammer die Form

$$\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R\cos\varphi + R^2)(\alpha_n - R\cos\varphi) \\ \qquad + \tfrac{1}{2}(A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2).a - A_{r+2}B_{r+2}.b, \end{array}$$

wenn ich zur Abkürzung setze

$$\begin{array}{l} (\alpha_n^2 - 2\alpha_n R\cos\varphi + R^2)(\alpha_n \cos 4\varphi - R\cos 3\varphi) \\ \qquad - 4\alpha_n R\sin^2 2\varphi\,(\alpha_n\cos\varphi - R) = a \end{array}$$

und

$$(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R\cos\varphi + R^2)(\alpha_n \sin 4\varphi + R\sin 3\varphi) - 4\alpha_n^2 R\sin^2 2\varphi.\sin\varphi = b.$$

Da aber weiter

$$\begin{array}{l} A_{r+2}^2 - B_{r+2}^2 = (A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2).\cos(r+n-1)2\varphi \\ \qquad + 2A_{-n+3}B_{-n+3}.\sin(r+n-1)2\varphi, \\ A_{r+2}B_{r+2} = A_{-n+3}B_{-n+3}.\cos(r+n-1)2\varphi \\ \qquad - \tfrac{1}{2}(A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2)\sin(r+n-1)2\varphi, \end{array}$$

wird der Ausdruck zu

$$\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}(\alpha_n^2 - 2\alpha_n R\cos\varphi + R^2)(\alpha_n - R\cos\varphi) \\ \quad + (\tfrac{1}{2}(A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2).a - A_{-n+3}B_{-n+3}.b)\cos(r+n-1)2\varphi \\ \quad + (A_{-n+3}B_{-n+3}a + \tfrac{1}{2}(A_{-n+3}^2 - B_{-r+3}^2)b)\sin(r+n-1)2\varphi \\ = C + A.\cos(r+n-1)2\varphi + B.\sin(r+n-1)2\varphi \\ = C + \sqrt{A^2+B^2}.\sin(\chi + (r+n-1)2\varphi), \end{array}$$

wenn man

$$\tang\chi = \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}(A_{-n+3}^2 - B_{-n+3}^2).a - A_{-n+3}B_{-n+3}.b}{A_{-n+3}B_{-n+3}.a + \frac{1}{2}(A_{-n+3}^2 + B_{-n+3}^2).b}$$

setzt. Es wird dann

$$A^2 + B^2 = \tfrac{1}{4}(A_{-n+3}^2 + B_{-n+3}^2)^2(a^2+b^2),$$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \tfrac{1}{2}\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos 3\varphi + R^2)\times$$
$$\times\sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2},\quad \text{und}$$

$$\chi = 2\alpha - 90^0 - \beta,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \tang\alpha,\quad \frac{b}{a} = \tang\beta$$

setzt. Die Summe der drei Determinanten nähert sich also dem Wert

$$\frac{\alpha_n^{5r+5n-7}R^{4r+4n-10}}{2.f'\alpha_n^5\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}\sin^2\varphi}\cdot\Big\{(\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2)(\alpha_n - R\cos\varphi) +$$
$$+ (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos 3\varphi + R^2).\sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2}\sin(\chi + (r+n-1)2\varphi)\Big\}.$$

Was die 3 letzten Determinanten betrifft, so ist ihre Summe

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6}R^{2r+2n-7}\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f'\alpha_n^6\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}\sin^2\varphi\, g'\alpha_{n-3}}\cdot\left\{\alpha_{n-3}^2\begin{vmatrix} R^2A_{r+2}, & R^2A_{r+3}, & \alpha_{n-3}^2 \\ RA_{r+1}, & RA_{r+2}, & \alpha_{n-3} \\ A_r\ , & A_{r+1}, & 1 \end{vmatrix} + \right.$$
$$\left. + R\alpha_{n-3}\begin{vmatrix} R^2A_{r+2}, & \alpha_{n-3}^2, & R^2A_{r+4} \\ RA_{r+1}, & \alpha_{n-3}\ , & RA_{r+3} \\ A_r\ , & 1\ , & A_{r+2} \end{vmatrix} + R^2\begin{vmatrix} \alpha_{n-3}^2, & R^2A_{r+3}, & R^2A_{r+4} \\ \alpha_{n-3}\ , & RA_{r+2}, & RA_{r+3} \\ 1\ , & A_{r+1}, & A_{r+2} \end{vmatrix}\right\}.$$

Die 3 Determinanten lassen sich nun wieder ähnlich, wie vorhin, in eine zusammenfassen, und man erhält

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6}R^{2r+2n-7}\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f'\alpha_n^6\, i\alpha_{n-1}^2\, i\alpha_{n-2}^2\sin^2\varphi\, g'\alpha_{n-3}}(R^2 - 2R\alpha_{n-3}\cos\varphi + \alpha_{n-3}^2)\times$$
$$\times\begin{vmatrix} R^2A_{r+2}, & R^2A_{r+3}, & \alpha_{n-3}^2 \\ RA_{r+1}, & RA_{r+2}, & \alpha_{n-3} \\ A_r\ , & A_{r+1}, & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man wieder die zweite Zeile der Determinante mit $-2R\cos\varphi$, die dritte mit R^2, und addirt beide zur ersten, so erhält man für die Determinante den Wert

$$(R^2 - 2R\alpha_{n-3}\cos\varphi + \alpha_{n-3}^2).R.\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}\sin^2\varphi.$$

Die Summe dieser 3 Determinanten nähert sich also dem Wert

$$\frac{\alpha_n^{6r+6n-6}R^{2r+2n-6}\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{f'\alpha_n^6\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}\, g'\alpha_{n-3}}(R^2-2R\alpha_{n-3}\cos\varphi+\alpha_{n-3}^2)^2,$$

und man hat sonach für grosse r

$$16)\quad x'_r=\alpha_n+\frac{R^{2r+2n-4}}{\alpha_n^{2r+2n-2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}f'\alpha_n^2}{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2}\sin^2\varphi\,(R^2-2R\alpha_n\cos\varphi+\alpha_n^2)}\times$$

$$\times\left\{\alpha_n-R\cos\varphi+\frac{\alpha_n^2-2R\alpha_n\cos3\varphi+R^2}{\sqrt{\alpha_n^2-2R\alpha_n\cos\varphi+R^2}}\sin(\chi+(r+n-1)2\varphi)\right\}$$

$$+\frac{\alpha_{n-3}^{r+n-3}}{\alpha_n^{r+n-3}}\cdot\frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-3}}\cdot\frac{(R^2-2R\alpha_{n-3}\cos\varphi+\alpha_{n-3}^2)^2}{(\alpha_n^2-2R\alpha_n\cos\varphi+R^2)^2}.$$

Ist im zweiten Fall

$$\left.\begin{matrix}\alpha_{n-3}\\ \alpha_{n-4}\end{matrix}\right\}=R'.(\cos\varphi'\pm i.\sin\varphi'),$$

so sei noch

$$s_x=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-5})=x^{n-5}+S_1x^{n-4}+\ldots,\ \text{und}$$
$$A'_r=R'^{n-5}\sin r\varphi'+S_1.R'^{n-4}\sin(r+1)\varphi'+\ldots$$
$$B'_r=R'^{n-5}\cos r\varphi'+S_1.R'^{n-4}\cos(r+1)\varphi'+\ldots$$

Der zweite Näherungswert für $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)$ ist derselbe wie p. 34. Dagegen hat man jetzt zu nehmen

$$(\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-1})=\frac{\alpha_{n-1}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-1}}+\frac{\alpha_{n-2}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-2}}+\frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-3}}+\frac{\alpha_{n-4}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-4}}.$$

Hier ist

$$g'\alpha_{n-3}=(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2})(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-4}).s\alpha_{n-3},$$
$$g'\alpha_{n-4}=(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-2})(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-3}).s\alpha_{n-4};$$

und man findet

$$(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-3}-\alpha_{n-2})=(R'^2.\cos2\varphi'-2R'R\cos\varphi\cos\varphi'+R^2)+$$
$$+i.(R'\cos\varphi'-R\cos\varphi).2R'\sin\varphi'=M+iN,$$

ebenso

$$(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-4}-\alpha_{n-2})=M-iN;$$

ferner ist

$$s\alpha_{n-3}=B'_{-n+5}-i.A'_{-n+5},\quad s\alpha_{n-4}=B'_{-n+5}+i.A'_{-n+5}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\alpha_{n-3}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-3}}+\frac{\alpha_{n-4}^{r+n-2}}{g'\alpha_{n-4}}=\frac{R'^{r+n-2}}{2R'\sin\varphi' i.s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}}\times$$
$$\times\left(\frac{B'_{r+3}+iA'_{r+3}}{M+iN}-\frac{B'_{r+3}-iA'_{r+3}}{M-iN}\right)$$
$$=\frac{R'^{r+n-3}}{s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}\sin\varphi'}\cdot\frac{MA'_{r+3}-NB'_{r+3}}{M^2+N^2}.$$

Nun findet sich weiter

$$M^2+N^2=(R'^2-2R'R\cos(\varphi'+\varphi)+R^2)(R'^2-2R'R\cos(\varphi'-\varphi)+R^2),$$

und

$$MA'_{r+3}-NB'_{r+3}=R'^2A'_{r+1}-2R'R\cos\varphi A'_{r+2}+R^2A'_{r+3}.$$

Man hat folglich im Ganzen

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-1})=\frac{R^{r+n-3}}{i\alpha_{n-1}\,i\alpha_{n-2}\sin\varphi}\cdot A_{r+1}+\frac{R'^{r+n-3}}{s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}\sin\varphi'}\times$$

$$\times\frac{R'^2A'_{r+1}-2R'R\cos\varphi A'_{r+2}+R^2A'_{r+3}}{(R'^2-2R'R\cos(\varphi+\varphi')+R^2)(R'^2-2R'R\cos(\varphi-\varphi')+R^2)}.$$

Für $(r+2)(r+1)\overline{(r+1)}$, $(r)(r+2)\overline{(r+2)}$ und $(r)(r+1)\overline{(r+3)}$ erhält man dann als zweite Näherungswerte Ausdrücke, in welchen die beiden ersten Glieder die nämlichen sind wie p. 35. Die dritten Glieder dagegen werden

$$\frac{\alpha_n{}^{2r+2n+1}R'^{r+n-2}}{f'\alpha_n{}^2\,s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}\sin\varphi'}\times$$

$$\times\frac{(R'^2A'_{r+2}-2R'R\cos\varphi A'_{r+3}+R^2A'_{r+4})}{(R'^2-2R'R\cos(\varphi'+\varphi)+R^2)(R'^2-2RR'\cos(\varphi'-\varphi)+R^2)},$$

resp.

$$\frac{\alpha_n{}^{2r+2n}R'^{r+n-1}(R'^2A'_{r+3}-2R'R\cos\varphi A'_{r+4}+R^2A'_{r+5})}{\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad\text{,,}},\quad\text{und}$$

$$\frac{\alpha_n{}^{2r+2n-1}R'^{r+n}(R'^2A_{r+4}-2R'R\cos\varphi A'_{r+5}+R^2A'_{r+6})}{\text{,,}\qquad\text{,,}\qquad\text{,,}}.$$

Werden diese Ausdrücke dann in die Zahlendeterminante eingesetzt, so werden von den 27 Determinanten die vier ersten dieselben wie im ersten Fall. Für die drei folgenden aber, die allein noch in Betracht kommen, erhält man, abgesehen von dem gemeinsamen Factor

$$\frac{1}{f'\alpha_n{}^6\,i\alpha_{n-1}{}^2\,i\alpha_{n-2}{}^2\sin^2\varphi\,s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}\sin\varphi'(R'^2-2R'R\cos(\varphi+\varphi')+R^2)}\times$$

$$\times\frac{\alpha_n{}^{6r+6n-6}R^{2r+2n-7}R'^{r+n-4}}{(R'^2-2R'R\cos(\varphi-\varphi')+R^2)}$$

die Summe

$$R'^2\begin{vmatrix}R^2A_{r+2}, & R^2A_{r+3}, & R'^2(R'^2A'_{r+4}-2R'R\cos\varphi A'_{r+5}+R^2A'_{r+6})\\ RA_{r+1}, & RA_{r+2}, & R'(R'^2A'_{r+3}-2R'R\cos\varphi A'_{r+4}+R^2A'_{r+5})\\ A_r\;, & A_{r+1}, & (R'^2A'_{r+2}-2R'R\cos\varphi A'_{r+3}+R^2A'_{r+4})\end{vmatrix}+$$

$$+R'R\begin{vmatrix}R^2A_{r+2}, & R'^2(R'^2A'_{r+3}-2R'R\cos\varphi A'_{r+4}+R^2A'_{r+5}), & R^2A_{r+4}\\ RA_{r+1}, & R'(R'^2A'_{r+2}-2R'R\cos\varphi A'_{r+3}+R^2A'_{r+4}), & RA_{r+3}\\ A_r\;, & (R'^2A'_{r+1}-2R'R\cos\varphi A'_{r+2}+R^2A'_{r+3}), & A_{r+2}\end{vmatrix}+$$

$$+R^2\begin{vmatrix}R'^2(R'^2A'_{r+2}-2R'R\cos\varphi A'_{r+3}+R^2A'_{r+4}), & R^2A_{r+3}, & R^2A_{r+4}\\ R'(R'^2A'_{r+1}-2R'R\cos\varphi A'_{r+2}+R^2A'_{r+3}), & RA_{r+2}, & RA_{r+3}\\ (R'^2A'_r-2R'R\cos\varphi A'_{r+1}+R^2A'_{r+2}), & A_{r+1}, & A_{r+2}\end{vmatrix}.$$

Die Determinanten lassen sich wieder so umformen, dass sie die ersten Colonnen gleich haben. Man kann sie dann in eine zusammenfassen, und indem man die zweite Zeile mit $-2R\cos\varphi$, die dritte mit R^2 multiplicirt und zur ersten addirt, werden die ersten Glieder der ersten Zeile null. Man erhält so den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
& R i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin^2\varphi \{R'^4(R'^2 A'_{r+4} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+5} + R^2 A'_{r+6}) \\
& \quad - R'^3 R\, 4\cos\varphi (R'^2 A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+4} + R^2 A'_{r+5}) \\
& \quad + R'^2 R^2 (2 + 4\cos^2\varphi)(R'^2 A'_{r+2} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+4}) \\
& \quad - R' R^3\, 4\cos\varphi (R'^2 A'_{r+1} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+2} + R^2 A'_{r+3}) \\
& \quad + R^4 (R'^2 A'_r - 2R'R\cos\varphi A'_{r+1} + R^2 A'_{r+2})\} = \\
& R i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin^2\varphi (R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' + \varphi) + R^2) \times \\
& \times (R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' - \varphi) + R^2)(R'^2 A'_{r+4} - 2R'R\cos\varphi A'_{r+3} + R^2 A'_{r+2}).
\end{aligned}
$$

Der letzte Factor ist

$$
\begin{aligned}
& (R'^2\cos\varphi' - 2R'R\cos\varphi + R^2\cos\varphi') A'_{r+3} + (R'^2 - R^2)\sin\varphi' B'_{r+3} = \\
& \quad a'A'_{-n+5} + b'B'_{r+3} = \\
& \quad (a'A'_{-n+5} + b'B'_{-n+5})\cos(r+n-2)\varphi' + \\
& \qquad + (a'B'_{-n+5} - b'A'_{-n+5})\sin(r+n-2)\varphi' \\
& = A'\cos(r+n-2)\varphi' + B'\sin(r+n-2)\varphi' \\
& = \sqrt{A'^2 + B'^2}\sin(\chi' + (r+n-2)\varphi'),
\end{aligned}
$$

wenn ich

$$\frac{A'}{B'} = \operatorname{tang}\chi'$$

setze, wobei sich noch ergibt

$$
\begin{aligned}
& A'^2 + B'^2 = (A'^2_{-n+5} + B'^2_{-n+5})(a'^2 + b'^2) \\
& = s\alpha_{n-3}\, s\alpha_{n-4}(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' - \varphi) + R^2),
\end{aligned}
$$

und

$$\chi' = \alpha' + \beta',$$

wenn man

$$\frac{A'_{-n+5}}{B'_{-n+5}} = \operatorname{tang}\alpha' \quad \text{und} \quad \frac{b'}{a'} = \operatorname{tang}\beta'$$

setzt.

Die Summe dieser drei Determinanten nähert sich also für grosse r dem Werte

$$
\begin{aligned}
& \frac{\alpha_n^{6r+6n-6} R^{2r+2n-6} R'^{r+n-4}}{f'\alpha_n^6\, i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin\varphi'} \times \\
& \times \sqrt{\frac{(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' + \varphi) + R^2)(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi' - \varphi) + R^2)}{s\alpha_{n-3}\, s\alpha_{n-4}}} \times \\
& \times \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi').
\end{aligned}
$$

Im Ganzen aber hat man im zweiten Fall

$$17)\quad x'_r = \alpha_n + \frac{R^{2r+2n-4}}{\alpha_n^{2r+2n-2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} f' \alpha_n^2}{i\alpha_{n-1}\, i\alpha_{n-2} \sin^2\varphi (R^2 - 2R\alpha_n \cos\varphi + \alpha_n^2)} \times$$

$$\times \left\{ \alpha_n - R\cos\varphi + \frac{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n \cos 3\varphi + R^2}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2}} \cdot \sin(\chi + (r+n-1)2\varphi) \right\}$$

$$+ \frac{R'^{r+n-4}}{\alpha_n^{r+n-3}} f'\alpha_n \frac{\sqrt{(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi'+\varphi) + R^2)(R'^2 - 2R'R\cos(\varphi'-\varphi) + R^2)}}{\sin\varphi' \sqrt{s\alpha_{n-3}\, s\alpha_{n-4}}\, (\alpha_n^2 - 2R\alpha_n\cos\varphi + R^2)^2}$$

$$\times \sin(\chi' + (r+n-2)\varphi').$$

Für die kleinste Wurzel hat man in diesem Fall ebenso nach Abh. I.

$$x_{-r} = \frac{(\alpha_1^{-r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{-r} \ldots \alpha_n)} = \alpha_1 + \frac{(\alpha_2^{-r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{-r} \ldots \alpha_n)}$$

$$= \alpha_1 + \frac{R^{-r+n-2}}{\alpha_1^{-r+n-1}} \cdot \frac{f'\alpha_1}{\sin\varphi \sqrt{m\alpha_2\, m\alpha_3}} \cdot \sin(\psi + (-r+n-1)\varphi),$$

wenn

$$\frac{A_{-n+3}}{B_{-n+3}} = \operatorname{tang}\psi$$

gesetzt wird, und dann

$$18)\quad x'_{-r} = x_{-r} - \Delta x_{-r} \frac{\Delta x_{-r} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta x_{-r-1}}{\Delta^2 x_{-r} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta^2 x_{-r-1}},$$

wobei

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r+1}, & \Delta x_{-r+2} \\ \Delta x_{-r}, & \Delta x_{-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r}, & \Delta x_{-r+1} \\ \Delta x_{-r-1}, & \Delta x_{-r} \end{vmatrix}},$$

$$\left(2\frac{R}{\alpha_1}\cos\varphi\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r}, & \Delta x_{-r+2} \\ \Delta x_{-r-1}, & \Delta x_{-r+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_{-r}, & \Delta x_{-r+1} \\ \Delta x_{-r-1}, & \Delta x_{-r} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x_{-r+1} + \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-r} \Delta x_{-r-1}}{\Delta x_{-r}}.$$

Von den Beispielen der Abh. I. gehört hierher die grösste Wurzel des dritten und die kleinste Wurzel des zweiten Beispiels.

Im dritten Beispiel hat man

$$x_5 = \frac{35779}{6224} = 5{,}748553\,9845, \quad x_6 = \frac{205664}{35779} = 5{,}748176\,3045,$$

$$x_7 = \frac{1182225}{205664} = 5{,}748332\,2312, \qquad x_9 = \frac{39065224}{6795874} = 5{,}748373\,7926,$$

$$x_8 = \frac{6795874}{1182225} = 5{,}748376\,1551, \qquad x_{10} = \frac{224561400}{39065224} = 5{,}748370\,9807.$$

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x_7, & \Delta x_8 \\ \Delta x_6, & \Delta x_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta x_6, & \Delta x_7 \\ \Delta x_5, & \Delta x_6 \end{vmatrix}} = 0{,}056150\ldots, \qquad \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 = 0{,}056182\ldots$$

$$\cos\varphi_7 = \frac{\Delta x_7 + \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta x_5}{2\frac{R}{\alpha_5}\Delta x_6} = 0{,}30743\ldots, \qquad \cos\varphi_8 = 0{,}30736\ldots$$

Daraus folgt $\varphi_7 = 72^0\,5'$, $\varphi_8 = 72^0\,6'$, und man erkennt, dass bei den x_r immer höchstens 3 und wenigstens 2 Glieder zwischen zwei Zeichenwechseln stehen.

Weiter ist dann

$$\Delta x_7 \frac{\Delta x_7 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta x_6}{\Delta^2 x_7 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_7 \Delta^2 x_6} = -0{,}000038\,6210,$$

also

$$x'_7 = 5{,}748370\,8522 \text{ und sicher zu gross } x^0_7 = 5{,}748409\,4732.$$

$$\Delta x_8 \frac{\Delta x_8 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 \Delta x_7}{\Delta^2 x_8 - \left(\frac{R^2}{\alpha_5^2}\right)_8 \Delta^2 x_7} = 0{,}000005\,3051,$$

also

$$x'_8 = 5{,}748370\,8500 \text{ und sicher zu klein } x^0_8 = 5{,}748365\,5449.$$

Im zweiten Beispiel hat man

$$x_{-9} = \frac{526}{1908} = 0{,}275681\,341719, \qquad x_{-12} = \frac{25105}{91065} = 0{,}275682\,205018,$$

$$x_{-10} = \frac{1908}{6921} = 0{,}275682\,704811, \qquad x_{-13} = \frac{91065}{330326} = 0{,}275682\,204852,$$

$$x_{-11} = \frac{6921}{25105} = 0{,}275682\,135032, \qquad x_{-14} = \frac{330326}{1198213} = 0{,}275682\,203414.$$

$$\left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12} = \frac{\begin{vmatrix}\Delta x_{-11}, & \Delta x_{-10}\\ \Delta x_{-12}, & \Delta x_{-11}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Delta x_{-12}, & \Delta x_{-11}\\ \Delta x_{-13}, & \Delta x_{-12}\end{vmatrix}} = 47{,}7263\ldots,\quad \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13} = 47{,}7162\ldots$$

$$\cos\varphi_{-12} = \frac{\Delta x_{-11} + \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12}\Delta x_{-13}}{2\frac{R_1}{\alpha_1}\cdot\Delta x_{-12}} = -0{,}59742\ldots,$$

$$\cos\varphi_{-13} = -0{,}59790\ldots$$

Demnach $\varphi_{-12} = 126^0\,41'$, $\varphi_{-13} = 126^0\,44'$. Daraus folgt, dass bei den x_{-r} höchstens 4, mindestens 3 Glieder zwischen 2 Zeichenfolgen liegen. Der in Abh. I. zweifelhaft gebliebene Wert x_{-13} ist also schon hieraus als zu gross zu erkennen.

Dann ist

$$\Delta x_{-12}.\frac{\Delta x_{-12} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12}.\Delta x_{-13}}{\Delta^2 x_{-12} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-12}.\Delta^2 x_{-13}} = 0{,}000\,000\,001367,$$

also

$x'_{-12} = 0{,}275682\ 203651$ und sicher zu klein $x^0_{-12} = 0{,}275682\ 202284$;

und

$$\Delta x'_{-13}.\frac{\Delta x_{-13} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13}.\Delta x_{-14}}{\Delta^2 x_{-13} - \left(\frac{R^2}{\alpha_1^2}\right)_{-13}.\Delta^2 x_{-14}} = 0{,}000000\,001201,$$

also

$x' = 0{,}275682\ 203651$ und sicher zu klein $x^0_{-13} = 0{,}275682\ 202450$.

§. 3.

Ist $\alpha_n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\alpha_{n-1} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, α_{n-2} ein einzelner reeller Wert, so hat man nach Abh. I.

$$R_r^2 = \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+2}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}} = \alpha_n\alpha_{n-1} + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+2}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= R^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2}\cdot\frac{RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1}}{h'\alpha_{n-1}\sin\varphi}.$$

Nun ist

$$RA_{r+2}-\alpha_{n-2}A_{r+1}=((R-\alpha_{n-2}\cos\varphi)A_{-n+2}+\alpha_{n-1}\sin\varphi B_{-n+2})\cos(r+n)\varphi$$
$$+((R-\alpha_{n-2}\cos\varphi)B_{-n+2}-\alpha_{n-2}\sin\varphi B_{-n+2}).\sin(r+n)\varphi$$
$$=A.\cos(r+n)\varphi+B.\sin(r+n)\varphi=\sqrt{A^2+B^2}.\sin(\psi+(r+n)\varphi),$$

wenn man

$$\frac{A}{B}=\operatorname{tang}\psi$$

setzt. Dabei findet sich noch

$$A^2+B^2=h_{\alpha_n}h_{\alpha_{n-1}}.(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)$$

und

$$\psi=\alpha+\beta,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}}=\operatorname{tang}\alpha,\quad \frac{\alpha_{n-2}\sin\varphi}{R-\alpha_{n-1}\cos\varphi}=\operatorname{tang}\beta$$

setzt. Man hat sonach für grosse r

$$19)\quad R_r{}^2=R^2+\left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2}.\frac{\sqrt{h_{\alpha_n}h_{\alpha_{n-1}}(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)}}{h'_{\alpha_{n-2}}\sin\varphi}\times$$
$$\times\sin(\psi+(r+n)\varphi).$$

Nun ergibt sich ganz wie im vorigen Paragraphen

$$20)\quad \frac{\Delta^2R_r{}^2-\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}.\Delta^2R_{r-1}{}^2}{\Delta R_r{}^2}=-\frac{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}{R^2},$$

ferner

$$21)\quad \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r=\frac{\begin{vmatrix}\Delta R_r{}^2, & \Delta R_{r+1}{}^2\\ \Delta R_{r+1}{}^2, & \Delta R_r{}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Delta R_{r-1}{}^2, & \Delta R_r{}^2\\ \Delta R_{r-2}{}^2, & \Delta R_{r-1}{}^2\end{vmatrix}},$$

$$22)\quad \left(2\frac{\alpha_{n-1}}{R}\cos\varphi\right)_r=\frac{\begin{vmatrix}\Delta R_{r-1}{}^2, & \Delta R_{r+1}{}^2\\ \Delta R_{r-2}{}^2, & \Delta R_r{}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Delta R_{r-1}{}^2, & \Delta R_r{}^2\\ \Delta R_{r-2}{}^2, & \Delta R_{r-1}{}^2\end{vmatrix}}=\frac{\Delta R_{r+1}{}^2+\left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r\Delta R_{r-1}{}^2}{\Delta R_r{}^2}$$

Weiter ist dann

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2}.\frac{\sqrt{h_{\alpha_n}h_{\alpha_{n-1}}(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}}{h'_{\alpha_{n-2}}\sin\varphi}.\sin(\psi+(r+n)\varphi)=$$
$$\Delta R_r{}^2.\frac{\Delta R_r{}^2-\left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r\Delta R_{r-1}{}^2}{\Delta^2R_r{}^2-\left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r\Delta^2R_{r-1}{}^2},$$

also der gesuchte Näherungswert

$$23)\quad R_r^{2'} = R_r^2 - \Delta R_r^2 . \frac{\Delta R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r \Delta R_{r-1}^2}{\Delta^2 R_r^2 - \left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r \Delta^2 R_{r-1}^2}.$$

Um den Fehler zu bestimmen, bringe ich dies wieder auf die Form

$$23^a)\quad R_r^{2'} = R_r^2 + \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & R_r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & 1 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & 1 \\ \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & 1 \end{vmatrix}}.$$

Auch hier konnte man wieder

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}^2}{R^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r+1}^2, & \Delta R_{r+2}^2 \\ \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \end{vmatrix}}$$

setzen. Es würde dann $R_{r-1}^{2'}$ derselbe Wert, der jetzt $R_r^{2'}$ ist. Es gilt darüber dieselbe Bemerkung wie oben.

Weiter sind nun für die R_r^2 ihre Ausdrücke durch Divisionscoefficienten einzuführen. Damit aber der Ausdruck nicht zu complicirt wird, ist eine weitere Abkürzung notwendig. Ich setze

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_n) \end{vmatrix} = \varrho, \quad \begin{vmatrix} (\alpha_1^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix} = \bar{\varrho},$$

so dass also ist

$$R_r^2 = R^2 + \frac{\overline{\varrho+1}}{\varrho}, \quad \Delta R_r^2 = -\frac{\begin{vmatrix} \varrho+1, & \overline{\varrho+2} \\ \varrho, & \overline{\varrho+1} \end{vmatrix}}{\varrho \cdot \overline{\varrho+1}}.$$

Werden diese Ausdrücke oben eingesetzt und die Nenner weggeschafft, so erhält man:

$$24)\quad R_r^{2'} = R^2 + \frac{\begin{vmatrix} \rho+2.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho\ .\begin{vmatrix}\rho+2, & \overline{\rho+3}\\ \rho+1, & \overline{\rho+2}\end{vmatrix}, & \rho\ .\rho+1.\overline{\rho+3}\\ \rho+1.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, & \rho-1.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho-1.\rho\ .\overline{\rho+2}\\ \rho\ .\begin{vmatrix}\rho-1, & \bar{\rho}\\ \rho-2, & \overline{\rho-1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho-1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho-1.\overline{\rho+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho+2.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho\ .\begin{vmatrix}\rho+2, & \overline{\rho+3}\\ \rho+1, & \overline{\rho+2}\end{vmatrix}, & \rho\ .\rho+1.\rho+2\\ \rho+1.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, & \rho-1.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho-1.\rho\ .\rho+1\\ \rho\ .\begin{vmatrix}\rho-1, & \bar{\rho}\\ \rho-2, & \overline{\rho-1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho-1.\rho\end{vmatrix}}$$

Dies ist wieder der genaue Wert des Fehlers. Um zu finden, welchem Wert er sich für grosse r nähert, sind die Näherungswerte einzusetzen. Man hat aber in diesem Fall als erste Näherungswerte

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot A_{r+1}, \quad (\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-1}};$$

demnach

$$\rho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\alpha_{n-2}R^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot(RA_{r+1} - \alpha_{n-2}A_r);$$

und unter Anwendung der Gleichung

$$R(RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1}) - \alpha_{n-2}(RA_{r+3} - \alpha_{n-2}A_{r+2}) = A_{r+2}(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}{}^2);$$

$$\rho+2.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix} = \frac{R^{5r+5n-5}\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{h\alpha_n{}^3 h\alpha_{n-1}{}^3 h'\alpha_{n-2}\sin\varphi} \times (R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}{}^2).A_{r+2};$$

$$\rho.\begin{vmatrix}\rho+2, & \overline{\rho+3}\\ \rho+1, & \overline{\rho+2}\end{vmatrix} = \frac{R^{5r+5n-6}\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{h\alpha_n{}^3 h\alpha_{n-1}{}^3 h'\alpha_{n-2}\sin\varphi} \times (R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}{}^2).A_{r+3};$$

$$\rho.\rho+1.\rho+2 = \frac{R^{6r+6n-6}}{h\alpha_n{}^3 h\alpha_{n-1}{}^3},$$

$$\varrho\,.\,\varrho+1\,.\,\overline{\varrho+3} = \frac{R^{5r+5n-6}\alpha_{n-2}{}^{r+n}}{h\alpha_n{}^3 h\alpha_{n-1}{}^3 h'\alpha_{n-2}\sin\varphi}.(RA_{r+4}-\alpha_{n-2}A_{r+3}).$$

Diese Werte im Nenner eingesetzt geben für denselben

$$\frac{R^{16r+16n-34}\,\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-7}\,(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)^2}{h\alpha_n{}^9\,h\alpha_{n-1}{}^9\,h'_{n-2}{}^2\sin^2\varphi}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \alpha_{n-2}{}^2 A_{r+2}, & \alpha_{n-2}{}^2 A_{r+3}, & R^2 \\ \alpha_{n-2}\,A_{r+1}, & \alpha_{n-2}A_{r+2}, & R \\ A_r, & A_{r+1}, & 1 \end{vmatrix},$$

und wenn man wieder die ersten Glieder der ersten Zeile zum Verschwinden bringt

$$\frac{R^{16r+16n-34}\,\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-6}\,(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)^3}{h\alpha_n{}^8\,h\alpha_{n-1}{}^8\,h'\alpha_{n-2}{}^2}.$$

Den Zähler untersuche ich wieder lieber in der Form die er erhält, wenn man die letzte Colonne zur zweiten, und diese dann zur ersten addirt, also in der Form

$$\begin{vmatrix} \varrho+2.\varrho+1.\overline{\varrho+1}, & \varrho.\varrho+2\;.\overline{\varrho+2}, & \varrho.\varrho+1\;.\overline{\varrho+3} \\ \varrho+1.\varrho\;.\bar{\varrho}, & \varrho-1.\varrho+1.\overline{\varrho+1}, & \varrho-1.\varrho\;.\overline{\varrho+2} \\ \varrho.\varrho-1\;.\overline{\varrho-1}, & \varrho-2.\varrho\;.\bar{\varrho}, & \varrho-2.\varrho-1.\overline{\varrho+1} \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier die ersten Näherungswerte ein, so erhält man als Factor die Determinante

$$\begin{vmatrix} RA_{r+2}-\alpha_{n-2}A_{r+1}, & RA_{r+3}-\alpha_{n-2}A_{r+2}, & RA_{r+4}-\alpha_{n-2}A_{r+3} \\ RA_{r+1}-\alpha_{n-2}A_r, & RA_{r+2}-\alpha_{n-2}A_{r+1}, & RA_{r+3}-\alpha_{n-2}A_{r+2} \\ RA_r-\alpha_{n-2}A_{r-1}, & RA_{r+1}-\alpha_{n-2}A_r, & RA_{r+2}-\alpha_{n-2}A_{r+1} \end{vmatrix},$$

und diese ist identisch null, wie man erkennt, wenn man die zweite Colonne mit $-2\cos\varphi$ multiplicirt, und sie und die erste zur dritten addirt.

Man muss sonach wieder die zweiten Näherungswerte einsetzen, und sind dabei wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob α_{n-3} ein einzelner Wert ist, oder ob α_{n-3} und α_{n-4} ein Paar conjugirte Werte sind.

Im ersten Fall ist

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}\sin\varphi}A_{r+1}+\frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-2}},$$

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}}+\frac{\alpha_{n-3}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-3}}.$$

Dann wird bei Vernachlässigung der bei grossen r gegen die übrigen verschwindenden Glieder

$$\varrho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1}} - \frac{R^{r+n-3}\,\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1} f'\alpha_{n-2}\sin\varphi}\,.\,C_{r+2},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$R^2 A_{r+2} - 2R\alpha_{n-2}A_{r+1} + \alpha_{n-2}{}^2 A_r = C_{r+2},$$

und

$$\bar{\varrho} = \frac{R^{r+n-3}\,\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1}\, h'\alpha_{n-2}\sin\varphi}\,.\,(RA_{r+1} - \alpha_{n-2}A_r)$$
$$+ \frac{R^{r+n-3}\,\alpha_{n-3}{}^{r+n-3}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1}\, h'\alpha_{n-3}\sin\varphi}\,.\,(RA_{r+1} - \alpha_{n-3}A_r).$$

Ebenso wird weiter

$$\varrho+1\,.\,\varrho+2\,.\,\overline{\varrho+1} = \frac{R^{5r+5n-4}\,\alpha_{n-2}{}^{r+n-2}}{h\alpha_n{}^2\, h\alpha_{n-1}{}^3\, h'\alpha_{n-2}\sin\varphi}\,.\,(RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1})$$
$$- \frac{R_{4r+4n-5}\,\alpha_{n-2}{2r+2n-8}}{h\alpha_n{}^3\, h\alpha_{n-1}{}^3\, h'\alpha_{n-2}\, f'\alpha_{n-2}\sin^2\varphi.}(RC_{r+3} + \alpha_{n-2}C_{r+4})(RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1})$$
$$+ \frac{R^{5r+5n-4}\,\alpha_{n-3}{}^{r+n-2}}{h\alpha_n{}^3 h\alpha_{n-1}{}^3 h'\alpha_{n-3}\sin\varphi}\,.\,(RA_{r+2} - \alpha_{n-3}A_{r+1}),$$

$$\varrho\,.\,\varrho+2\,.\,\overline{\varrho+2} = \frac{R^{5r+5n-5}\,\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(RA_{r+3} - \alpha_{n-2}A_{r+2})$$
$$- \frac{R^{4r+4n-6}\,\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-3}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(R^2C_{r+2} + \alpha_{n-2}{}^2C_{r+4})\,(RA_{r+3} - \alpha_{n-2}A_{r+2})$$
$$+ \frac{R^{5r+5n-5}\,\alpha_{n-3}{}^{r+n-1}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(RA_{r+3} - \alpha_{n-3}A_{r+2}),$$

$$\varrho\,.\,\varrho+1\,.\,\overline{\varrho+3} = \frac{R^{5r+5n-6}\,\alpha_{n-2}{}^{r+n}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(RA_{r+4} - \alpha_{n-2}A_{r+3})$$
$$- \frac{R^{4r+4n-6}\,\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-2}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(RC_{r+2} + \alpha_{n-2}C_{r+3})\,(RA_{r+4} - \alpha_{n-2}A_{r+3})$$
$$+ \frac{R^{5r+5n-6}\,\alpha_{n-3}{}^{r+n}}{\text{„} \qquad \text{„}}\,.\,(RA_{r+4} - \alpha_{n-3}A_{r+3}).$$

Werden diese Ausdrücke in die Determinante eingesetzt, so zerfällt diese wieder in 27 Einzeldeterminanten, von welchen jedoch nur die 7 ersten in Betracht kommen. Die erste, welche in allen Colonnen die ersten Glieder dieser Ausdrücke enthält, ist nichts anderes, als die Determinante der ersten Näherungswerte und wird identisch null.

Die drei nächsten sind die, welche in je zwei Colonnen die ersten Glieder, in der dritten die zweiten Glieder der Ausdrücke ent-

halten. Sie lassen sich ähnlich behandeln wie die Determinanten in § 2. Man kann sie nämlich leicht so umformen, dass sie die beiden ersten Colonnen gleich haben. Dann lassen sie sich in eine zusammenfassen. In dieser lassen sich die ersten Glieder der ersten Zeile zum Verschwinden bringen in Folge der Identität

$$A_{r+1} + A_{r-1} = 2A_r \cos\varphi.$$

Da nach

$$f'\alpha_{n-2} = (R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2) . h'\alpha_{n-2},$$

erhält man schliesslich für dio Summe dieser drei Determinanten

$$\frac{R^{14r+14n-31}\, \alpha_{n-2}^{4r+4n-10}(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2)^2}{h\alpha_n{}^8\, h\alpha_{n-1}{}^8\, h'\alpha_{n-2}{}^4 \sin^2\varphi} \times$$
$$\times \{R^2 A_r(RA_r - \alpha_{n-2}A_{r-1}) - 2R\alpha_{n-2}A_{r+1}(RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1})$$
$$+ \alpha_{n-2}^2 A_{r+2}(RA_{r+4} - \alpha_{n-2}A_{r+3})\}.$$

Die drei folgenden Determinanten sind diejenigen, welche in je zwei Colonnen die ersten Glieder, in der dritten die dritten Glieder der obigen Ausdrücke enthalten. Auch sie lassen sich wie die vorhergehenden behandeln und geben als Summe

$$\frac{R^{15r+15n-30}\, \alpha_{n-2}^{2r+2n-6}\, \alpha_{n-3}^{r+n-4}}{h\alpha_n{}^8\, h\alpha_{n-1}{}^8\, h'\alpha_{n-2}{}^2\, h'\alpha_{n-3}\sin\varphi} \times$$
$$\times (R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2)(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2 \times$$
$$\times \{\alpha_{n-2}^2(RA_r - \alpha_{n-3}A_{r-1}) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RA_{r+2} - \alpha_{n-3}A_{r+1})$$
$$+ \alpha_{n-3}^2(RA_{r+4} - \alpha_{n-3}A_{r+3})\}.$$

Der ganze Fehler nähert sich sonach dem Werte

$$\frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-3}} \cdot \frac{1}{h'\alpha_{n-2}^2 \sin^2\varphi(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2)} \times$$
$$\times \{R^2 A_r(RA_r - \alpha_{n-2}A_{r-1}) - 2R\alpha_{n-2}A_{r+1}(RA_{r+2} - \alpha_{n-2}A_{r+1})$$
$$+ \alpha_{n-2}^2 A_{r+2}(RA_{r+4} - \alpha_{n-2}A_{r+3})\}$$
$$+ \frac{\alpha_{n-3}^{r+n-4}}{R^{r+n-4}} \cdot \frac{(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3})^2}{h'\alpha_{n-3}\sin\varphi . (R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2)^2} \times$$
$$\times \{\alpha_{n-2}^2(RA_r - \alpha_{n-3}A_{r-1}) - 2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RA_{r+2} - \alpha_{n-3}A_{r+1})$$
$$+ \alpha_{n-3}^2(RA_{r+4} - \alpha_{n-3}A_{r+3})\}.$$

Diese Ausdrücke sind noch weiter umzuformen.

Die Klammer des ersten Teiles wird, wenn ich alle

$$A_r \text{ auf } A_{-n+2} \text{ und } B_{-n+2},$$

resp. auf

$$\frac{A_{-n+2}^2 + B_{-n+2}}{2} = \tfrac{1}{2}h\alpha_n\, h\alpha_{n-1}, \quad \frac{A_{-n+2}^2 - B_{-n+2}}{2}$$

und

$$A_{-n+2},\quad B_{-n+2}$$

reducire:

$$\frac{A_{-n+2}^2+B_{-n+2}^2}{2}.\{R^3-3R^2\alpha_{n-2}\cos\varphi+R\alpha_{n-2}^2(2+\cos2\varphi)-\alpha_{n-2}^3\cos\varphi\}$$

$$+\frac{A_{-n+2}^2-B_{-n+2}^2}{2}\times$$

$$\times.\{R^3\cos(2r+2n-4)\varphi-R^2\alpha_{n-2}(\cos(2r+2n-5)\varphi+2\cos(2r+2n-1)\varphi)$$
$$+R\alpha_{n-2}^2(2.\cos(2r+2n-2)\varphi+\cos(2r+2n+2)\varphi)-\alpha_{n-2}^3\cos(2r+2n+1)\varphi\}$$
$$+A_{-n+2}B_{-n+2}\{R^3\sin(2r+2n-4)\varphi-R^2\alpha_{n-2}\sin(2r+2n-5)\varphi$$
$$+2.\sin(2r+2n-1)\varphi)+R\alpha_{n-2}^2(2.\sin(2r+2n-2)\varphi+\sin(2r+2n+2)\varphi)$$
$$-\alpha_{n-2}^3\sin(2r+2n+1)\varphi\}$$
$$=\tfrac{1}{2}h\alpha_n h\alpha_{n-1}(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}^2)(R-\alpha_{n-2}\cos\varphi)$$
$$+\left[\frac{A_{-n+2}^2-B_{-n+2}^2}{2}.a+A_{-n+2}B_{-n+2}.b\right].\cos(2r+2n-2)\varphi$$
$$+\left[-\frac{A_{-n+2}^2-B_{-n+2}^2}{2}.b+A_{-n+2}B_{-n+2}.a\right].\sin(2r+2n-2)\varphi$$
$$=C+A.\cos(2r+2n-2)\varphi+B.\sin(2r+2n-2)\varphi$$
$$=C+\sqrt{A^2+B^2}.\sin(\chi+(2r+2n-2)\varphi),$$

wenn

$$R^3.\cos(-2\varphi)-R^2\alpha_{n-2}(\cos(-3\varphi)+2\cos\varphi)$$
$$+R\alpha_{n-2}^2(2+\cos4\varphi)-\alpha_{n-2}^3\cos3\varphi=a,$$

$$R^3.\sin(-2\varphi)-R^2\alpha_{n-2}(\sin(-3\varphi)+2\sin\varphi)$$
$$+R\alpha_{n-2}^2\sin4\varphi-\alpha_{n-2}^3\sin3\varphi=b$$

und

$$\frac{A}{B}=\operatorname{tang}\chi$$

gesetzt wird. Dabei ergibt sich noch

$$A^2+B^2=\tfrac{1}{4}(A_{-n+2}^2+B_{-n+2}^2)(a^2+b^2)=$$
$$=\tfrac{1}{4}h\alpha_n^2h\alpha_{n-1}^2(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}^2)(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos3\varphi+\alpha_{n-2}^2)^2,$$

und

$$\chi=2\alpha-90+\gamma,$$

wenn man

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}}=\operatorname{tang}\alpha,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tang}\gamma\quad\text{setzt.}$$

Die Klammer des zweiten Teils lässt sich auf die Form bringen

$$[\alpha_{n-2}^2(RA_{-n+1}-\alpha_{n-3}A_{-n})-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RA_{-n+3}-\alpha_{n-3}A_{-n+2})$$
$$+\alpha_{n-3}^2(RA_{-n+5}-\alpha_{n-3}A_{-n+4})].\cos(r+n-1)\varphi$$
$$+[\alpha_{n-2}^2(RB_{-n+1}-\alpha_{n-3}B_{-n})-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(RB_{-n+3}-\alpha_{n-3}-B_{-n+2})$$
$$+\alpha_{n-3}^2(RB_{-n+5}-\alpha_{n-3}B_{-n+4})].\sin(r+n-1)\varphi$$
$$=A'.\cos(r+n-1).\varphi+B'.\sin(r+n-1)\varphi$$
$$=\sqrt{A'^2+B'^2}.\sin(\chi'+(r+n-1)\varphi),$$

wenn

$$\frac{A'}{B'}=\operatorname{tang}\chi'$$

gesetzt wird. Dabei findet sich

$$A'^2+B'^2=h\alpha_n h\alpha_{n-1}(R^2-2R\alpha_{n-3}\cos\varphi+\alpha_{n-3}^2)\times$$
$$\times(\alpha_{n-2}^2-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\cos 2\varphi+\alpha_{n-3}^2)^2,$$

und

$$\chi'=\alpha+\gamma',$$

wenn man noch

$$\operatorname{tang}\gamma'=\frac{b'}{a'}$$

setzt, und

$$\alpha_{n-2}^2(R\cos(-\varphi)-\alpha_{n-3}\cos(-2\varphi))-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}(R\cos\varphi-\alpha_{n-3})$$
$$+\alpha_{n-3}^2(R\cos 3\varphi-\alpha_{n-3}\cos 2\varphi)=a'$$

$$\alpha_{n-2}^2(R\sin(-\varphi)-\alpha_{n-3}\sin(-2\varphi))-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}R\sin\varphi$$
$$+\alpha_{n-3}^2(R\sin 3\varphi-\alpha_{n-3}\sin 2\varphi)=b'.$$

Es ist also schliesslich gefunden

$$25)\quad R_r^{2'}=R^2+\tfrac{1}{2}\frac{\alpha_{n-2}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-3}}\cdot\frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{h'\alpha_{n-2}'^2\sin^2\varphi}\times$$
$$\times\left[R-\alpha_{n-2}\cos\varphi+\frac{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos 3\varphi+\alpha_{n-2}^2}{\sqrt{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}^2}}.\sin(\chi+(r+n-1)2\varphi)\right]$$
$$+\frac{\alpha_{n-3}^{r+n-4}}{R^{r+n-4}}\frac{(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3})^2.(\alpha_{n-2}^2-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\cos 2\varphi+\alpha_{n-3}^2)}{h'\alpha_{n-3}\sin\varphi.(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}^2)^2}\times$$
$$\times\sqrt{h\alpha_n h\alpha_{n-1}(R^2-2R\alpha_{n-3}\cos\varphi+\alpha_{n-3}^2)}.\sin(\chi'+(r+n-1)\varphi).$$

Ist im zweiten Fall

$$\alpha_{n-3}=R'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'),\quad \alpha_{n-4}=R'(\cos\varphi'-i\sin\varphi'),$$

so ist der zweite Näherungswert von $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)$ der nämliche wie p. 48; dagegen erhält man jetzt analog § 2.

$$(\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-2})=\frac{\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}}+\frac{R'^{r+n-4}}{s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}\sin\varphi'}\cdot\frac{R'A'_{r+1}-\alpha_{n-2}A'_{r+2}}{R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'+\alpha_{n-2}^2}$$

Es behält dann auch ϱ seinen Wert, aber es wird

$$\bar{\varrho} = \frac{R^{r+n-3}\alpha_{n-2}^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1} h'\alpha_{n-2}\sin\varphi} \cdot (RA_{r+1} - \alpha_{n-2}A_r)$$

$$+ \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-4}}{s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}\sin\varphi'(R'^2 - 2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi' + \alpha_{n-2}^2)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} RA_{r+1}, & R'(R'A'_{r+2} - \alpha_{n-2}A'_{r+3}) \\ A_r, & (R'A'_{r+1} - \alpha_{n-2}A'_{r+2}) \end{vmatrix}.$$

Es bleiben daher auch in den Ausdrücken für

$$\varrho+1 . \varrho+2 . \overline{\varrho+1}, \quad \varrho . \varrho+2 . \overline{\varrho+2}, \quad \varrho . \varrho+1 . \overline{\varrho+3}$$

je die beiden ersten Glieder dieselben, dagegen werden die dritten Glieder, abgesehen von dem gemeinsamen Factor

$$\frac{R^{5r+5n-6}R'^{r+n-3}}{h\alpha_n^3 h\alpha_{n-1}^3 \sin\varphi s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}\sin\varphi'(R'^2 - 2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi' + \alpha_{n-2}^2)}$$

beziehungsweise

$$R^2 . \begin{vmatrix} RA_{r+2}, & R'A'_{r+3} - \alpha_{n-2}A'_{r+4} \\ R'A_{r+1}, & R'A'_{r+2} - \alpha_{n-2}A'_{r+3} \end{vmatrix},$$

$$RR' . \begin{vmatrix} RA_{r+3}, & R'A'_{r+4} - \alpha_{n-2}A'_{r+5} \\ R'A_{r+2}, & R'A'_{r+3} - \alpha_{n-2}A'_{r+4} \end{vmatrix},$$

$$R'^2 . \begin{vmatrix} RA_{r+4}, & R'A'_{r+5} - \alpha_{n-2}A'_{r+6} \\ R'A_{r+3}, & R'A'_{r+4} - \alpha_{n-2}A'_{r+5} \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher diese Ausdrücke in die Zählerdeterminante ein, so verschwindet von den in Betracht kommenden 7 Determinanten die erste wieder identisch, die drei nächsten werden dieselben wie im ersten Fall, die drei letzten werden anders. Sie lassen sich aber wieder so umformen, dass sie die beiden ersten Colonnen gleich haben, und dann in eine zusammenfassen. Wird dann wieder die zweite Zeile mit $-2\alpha_{n-2}\cos\varphi$, die dritte mit α_{n-2}^2 multiplicirt, und beide zur ersten addirt, so verschwinden die beiden ersten Glieder dieser Zeile, und das dritte lässt sich mit $(R'^2 - 2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi' + \alpha_{n-2}^2)$ dividiren. So erhält man als Summe der drei Determinanten

$$\frac{R^{15r+15n-30}\alpha_{n-2}^{2r+2n-6}R'^{r+n-5}(R^2 - 2R\alpha_{n-2}\cos\varphi + \alpha_{n-2}^2)}{h\alpha_n^8 h\alpha_{n-1}^8 h'\alpha_{n-2}^2 \sin\varphi s\alpha_{n-3}s\alpha_{n-4}\sin\varphi'} \times$$

$$\times \{R . [R'^3 A_{r+4}A'_{r+4} - R'^2\alpha_{n-2}(2A_{r+2}A'_{r+3} + A_{r+4}A'_{r+3})$$

$$+ R'\alpha_{n-2}^2(2A_{r+2}A'_{r+2} + A_rA'_{r+2}) - \alpha_{n-2}^3 A_r A'_{r+1}]$$

$$- R' . [R'^3 A_{r+3}A'_{r+5} - R'^2\alpha_{n-2}(2A_{r+1}A'_{r+4} + A_{r+3}A'_{r+4})$$

$$+ R'\alpha_{n-2}^2(2A_{r+1}A'_{r+3} + A_{r-1}A'_{r+3}) - \alpha_{n-2}A_{r-1}A'_{r+2}]\}.$$

Werden hier die A_r und A'_r sämmtlich auf

$$A_{-n+2} \text{ und } B_{-n+2}, \quad A'_{-n+5} \text{ und } B'_{-n+5}$$

reducirt, resp. auf

$$\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}+B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2} \text{ und } \frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}-B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2},$$

$$\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}-B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2} \text{ und } \frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}+B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2},$$

wobei noch constant

$$(A_rA'_s+B_rB'_s)^2+(A_rB'_s-B_rA'_s)^2=(A_rA'_s-B_rB'_s)^2+(A_rB'_s+B_rA'_s)^2=$$
$$=(A_r^2+B_r^2)(A'^2_s+B'^2_s)=ha_n\,ha_{n-1}\,sa_{n-3}\,sa_{n-4}$$

ist, so erhält man für die ganze Klammer

$$A'.\cos(r+n-1)(\varphi-\varphi')-B'.\sin(r+n-1)(\varphi-\varphi')$$
$$+C'\cos(r+n-1)(\varphi+\varphi')-D'\sin(r+n-1)(\varphi+\varphi').$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$A'=\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}+B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2}.a'$$
$$-\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}-B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2}.b',$$

$$B'=\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}+A_{-n+2}B'_{-n+5}}{2}.b'$$
$$+\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}-B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2}.a',$$

$$C'=\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}-B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2}.c'$$
$$+\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}+B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2}.d',$$

$$D'=\frac{A_{-n+2}A'_{-n+5}-B_{-n+2}B'_{-n+5}}{2}:d'$$
$$-\frac{A_{-n+2}B'_{-n+5}+B_{-n+2}A'_{-n+5}}{2}.c';$$

$$a'=R(m.\cos(\varphi+\varphi')-n.\sin(\varphi+\varphi')-R'm,$$
$$b'=R(n.\cos(\varphi+\varphi')+m.\sin(\varphi+\varphi'))-R'n,$$
$$c'=R(m'.\cos(\varphi-\varphi')-n'.\sin(\varphi-\varphi'))-R'm',$$
$$d'=R(n'.\cos(\varphi-\varphi')+m'.\sin(\varphi-\varphi'))-R'n';$$

$$m = R'^3.\cos(2\varphi-\varphi') - R'^2\alpha_{n-2}(2+\cos 2\varphi)$$
$$+R'\alpha_{n-2}^2(2\cos\varphi'+\cos(-2\varphi+\varphi')) - \alpha_{n-2}^3\cos(-2\varphi+2\varphi'),$$

$$n = R'^3.\sin(2\varphi-\varphi') - R'^2\alpha_{n-2}(\sin 2\varphi)$$
$$+R'\alpha_{n-2}^2(2\sin\varphi'+\sin(-2\varphi+\varphi')) - \alpha_{n-2}^3\sin(-2\varphi+2\varphi'),$$

$$m' = R'^3.\cos(2\varphi+\varphi') - R'^2\alpha_{n-2}(2+\cos 2\varphi)$$
$$+R'\alpha_{n-2}^2(2.\cos(-\varphi')+\cos(-2\varphi-\varphi')) - \alpha_{n-2}^3\cos(-2\varphi-2\varphi'),$$

$$n' = R'^3.\sin(2\varphi+\varphi') - R'^2\alpha_{n-2}\sin 2\varphi$$
$$+R'\alpha_{n-2}^2(2.\sin(-\varphi')+\sin(-2\varphi-\varphi')) - \alpha_{n-2}^3\sin(-2\varphi-2\varphi').$$

Setzt man dann weiter

$$\frac{A'}{B'} = \operatorname{tang}\chi', \quad \frac{C'}{D'} = \operatorname{tang}\chi'',$$

so wird der Ausdruck

$$\sqrt{A'^2+B'^2}.\sin(\chi'-(r+n-1)(\varphi-\varphi'))$$
$$+\sqrt{C'^2+D'^2}.\sin(\chi''-(r+n-1)(\varphi+\varphi')).$$

Dabei ist

$$A'^2+B'^2 = \tfrac{1}{4}ha_n\,ha_{n-1}\,sa_{n-3}\,sa_{n-4}(a'^2+b'^2)$$
$$= \tfrac{1}{4}ha_n\,ha_{n-1}\,sa_{n-3}\,sa_{n-4}(R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2).(m^2+n^2),$$

$$C'^2+D'^2 = \tfrac{1}{4}ha_n\,ha_{n-1}\,sa_{n-3}\,sa_{n-4}(c'^2+d'^2)$$
$$= \tfrac{1}{4}ha_n\,ha_{n-1}\,sa_{n-3}\,sa_{n-4}(R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2).(m'^2+n'^2)$$

$$m^2+n^2 = (R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'$$
$$+\alpha_{n-2}^2)(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi-\varphi')+\alpha_{n-2}^2)^2,$$

$$m'^2+n'^2 = (R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'$$
$$+\alpha_{n-2}^2)(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi+\varphi')+\alpha_{n-2}^2);$$

ferner

$$\chi' = 90^0-\alpha+\alpha'-\delta-\varepsilon, \quad \chi'' = 270^0-\alpha-\alpha'-\delta'-\varepsilon',$$

wenn wieder

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}}, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{A'_{-n+5}}{B'_{-n+5}}, \quad \operatorname{tang}\delta = \frac{n}{m}, \quad \operatorname{tang}\delta' = \frac{n'}{m'},$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{R.\sin(\varphi+\varphi')}{R.\cos(\varphi+\varphi')-R'}, \quad \operatorname{tang}\varepsilon' = \frac{R.\sin(\varphi-\varphi')}{R.\cos(\varphi-\varphi')-R'}$$

gesetzt wird.

Die Summe der drei Determinanten ist also für grosse r

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{R^{15r+15n-30}\,\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-6}\,R'^{r+n-5}(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)}{h\alpha_n{}^8\,h\alpha_{n-1}{}^8\,h'^2\alpha_{n-2}\sin\varphi\sin\varphi'}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}{s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}}}\cdot(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'+\alpha_{n-2}{}^2)\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi-\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\ \times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2}\,.\sin(\chi'-(r+n-1)(\varphi-\varphi'))\\ +(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi+\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\ \times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2}.\sin(\chi''-(r+n-1)(\varphi+\varphi'))\end{array}\right\}.$$

Man hat demnach schliesslich im zweiten Fall

$$26)\quad R^{2\prime}{}_r=R^2+\tfrac{1}{2}\frac{\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-3}}\cdot\frac{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}{h'^2\alpha_{n-2}\sin^2\varphi}\times$$

$$\times\left[R-\alpha_{n-2}\cos\varphi+\frac{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos3\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}{\sqrt{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}}.\sin(\chi+(r+n-1)2\varphi)\right]$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{R'^{r+n-5}}{R^{r+n-4}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi.\sin\varphi'.(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}{s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}}}.(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'+\alpha_{n-2}{}^2)\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi-\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\ \times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2}.\sin(\chi'-(r+n-1)(\varphi-\varphi'))\\ +(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi+\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\ \times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2}.\sin(\chi''-(r+n-1)(\varphi+\varphi'))\end{array}\right\}.$$

Was $2R\cos\varphi$ betrifft, so hat man nach Abh. I.

$$(2R\cos\varphi)_r=\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}=$$

$$=\alpha_n+\alpha_{n-1}+\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}},$$

und daraus ergibt sich durchaus analog dem Vorhergehenden

$$27)\quad(2R\cos\varphi)_r=2R\cos\varphi+\left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-2}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}\,(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)}{R.h'\alpha_{n-2}\sin\varphi}.\sin(\psi+(r+n-1)\varphi);$$

$$28)\quad \frac{\varDelta^2(2R\cos\varphi)_r - \frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}.\varDelta^2(2R\cos\varphi)_{r-1}}{\varDelta(2R\cos\varphi)_r} = -\frac{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}{R^2};$$

$$29)\quad \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix}\varDelta(2R\cos\varphi)_r, & \varDelta(2R\cos\varphi)_{r+1}\\ \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_r\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_r\\ \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-2}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}\end{vmatrix}};$$

$$30)\quad \left(2\frac{\alpha_{n-2}}{R}.\cos\varphi\right)_r = \frac{\begin{vmatrix}\varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_{r+1}\\ \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-2}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_r\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_r\\ \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-2}, & \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\varDelta(2R\cos\varphi)_{r+1} + \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r.\varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}}{\varDelta(2R\cos\varphi)_r};$$

$$31)\quad (2R\cos\varphi)_r' = (2R\cos\varphi)_r - \varDelta(2R\cos\varphi)_r \times$$

$$\times \frac{\varDelta(2R\cos\varphi)_r - \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r.\varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1}}{\varDelta^2(2R\cos\varphi)_r - \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_r.\varDelta^2(2R\cos\varphi)_{r-1}}.$$

Setze ich dann noch zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix} = \sigma+1,$$

so ergibt sich weiter

$$32)\quad (2R\cos\varphi)_r' = 2R\cos\varphi +$$

$$\frac{\begin{vmatrix}\varrho+2.\begin{vmatrix}\varrho+1, & \sigma+2\\ \varrho, & \sigma+1\end{vmatrix}, & \varrho\;.\begin{vmatrix}\varrho+2, & \sigma+3\\ \varrho+1, & \sigma+2\end{vmatrix}, & \varrho\;.\varrho+1.\sigma+3\\ \varrho+1.\begin{vmatrix}\varrho, & \sigma+1\\ \varrho-1, & \sigma\end{vmatrix}, & \varrho-1.\begin{vmatrix}\varrho+1, & \sigma+2\\ \varrho, & \sigma+1\end{vmatrix}, & \varrho-1.\varrho\;.\sigma+2\\ \varrho\;.\begin{vmatrix}\varrho-1, & \sigma\\ \varrho-2, & \sigma-1\end{vmatrix}, & \varrho-2.\begin{vmatrix}\varrho, & \sigma+1\\ \varrho-1, & \sigma\end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\sigma+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varrho+2.\begin{vmatrix}\varrho+1, & \sigma+2\\ \varrho, & \sigma+1\end{vmatrix}, & \varrho\;.\begin{vmatrix}\varrho+2, & \sigma+3\\ \varrho+1, & \sigma+2\end{vmatrix}, & \varrho\;.\varrho+1.\varrho+2\\ \varrho+1.\begin{vmatrix}\varrho, & \sigma+1\\ \varrho-1, & \sigma\end{vmatrix}, & \varrho-1.\begin{vmatrix}\varrho+1, & \sigma+2\\ \varrho, & \sigma+1\end{vmatrix}, & \varrho-1.\varrho\;.\varrho+1\\ \varrho\;.\begin{vmatrix}\varrho-1, & \sigma\\ \varrho-2, & \sigma-1\end{vmatrix}, & \varrho-2.\begin{vmatrix}\varrho, & \sigma+1\\ \varrho-1, & \sigma\end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho\end{vmatrix}}$$

Dies ist der genaue Wert des Fehlers. Für grosse r nähert sich der Ausdruck, wenn α_{n-3} eine einzelne Wurzel ist, dem Werte

$$33)\quad (2R\cos\varphi)'_r = 2R\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha_{n-2}{}^{2r+2n-4}}{R^{2r+2n-2}}\cdot\frac{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}{h'\alpha_{n-2}{}^2\sin^2\varphi}\times$$

$$\times\left[R\cos\varphi-\alpha_{n-2}+\frac{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos 3\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}{\sqrt{R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2}}\sin(\chi+(2r+2n-3)\varphi)\right]$$

$$+\frac{\alpha_{n-3}{}^{r+n-4}}{R^{r+n-3}}\;\frac{(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-3})^2}{h'\alpha_{n-3}\sin\varphi}\cdot\frac{\alpha_{n-2}{}^2-2\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\cos 2\varphi+\alpha_{n-3}{}^2}{(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)^2}\times$$

$$\times\sqrt{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}\,(R^2-2R\alpha_{n-3}\cos\varphi+\alpha_{n-3}{}^2)\sin(\chi'+(r+n-2)\varphi).$$

Ist aber

$$\alpha_{n-3} = R'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'),\quad \alpha_{n-4} = R'(\cos\varphi'-i\sin\varphi'),$$

so hat man statt des letzten Gliedes den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{R'^{\,r+n-5}}{R^{r+n-3}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi\sin\varphi'(R^2-2R\alpha_{n-2}\cos\varphi+\alpha_{n-2}{}^2)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{h\alpha_n\,h\alpha_{n-1}}{s\alpha_{n-3}\,s\alpha_{n-4}}}\,(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos\varphi'+\alpha_{n-2}{}^2)\times$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi-\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\&\times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2}\sin(\chi'+\varphi-(r+n-1)(\varphi-\varphi'))\\&+(R'^2-2R'\alpha_{n-2}\cos(2\varphi+\varphi')+\alpha_{n-2}{}^2)\times\\&\times\sqrt{R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2}\sin(\chi''+\varphi-(r+n-1)(\varphi+\varphi'))\end{aligned}\right\}$$

Dabei bedeuten ψ, χ, χ', χ'' die nämlichen Constanten wie in den entsprechenden Ausdrücken bei $R_r{}^{2\prime}$.

Handelt es sich um die kleinsten Wurzeln, so sind überall die r negativ zu nehmen, und bei den genäherten Ausdrücken die α_n, α_{n-1}, $\alpha_{n-2}\ldots$ resp. durch α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$ zu ersetzen, nur ist es wieder besser bei $R_{-r}{}^{2\prime}$

$$\left(\frac{\alpha_3{}^2}{R^2}\right)_{-r}=\frac{\begin{vmatrix}\Delta R_{-r+1}{}^2, & \Delta R_{-r+2}{}^2\\ \Delta R_{-r}{}^2, & \Delta R_{-r+1}{}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Delta R_{-r}{}^2, & \Delta R_{-r+1}{}^2\\ \Delta R_{-r-1}{}^2, & \Delta R_{-r}{}^2\end{vmatrix}},$$

und bei $(2R\cos\varphi)_{-r}$

$$\left(\frac{\alpha_3{}^2}{R^2}\right)_{-r}=\frac{\begin{vmatrix}\Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}\\ \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}\\ \Delta 2R\cos\varphi_{-r-1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r}\end{vmatrix}}$$

zu setzen. Von den Beispielen der I. Abh. gehören hierher die grössten Wurzeln des zweiten Beispiels. Es ist dort

$$R_5^2 = \frac{1908}{526} = 3{,}627376\ 425855\ 513,$$

$$R_6^2 = \frac{6921}{1908} = 3{,}627358\ 490566\ 037,$$

$$R_7^2 = \frac{25105}{6921} = 3{,}627365\ 987574\ 049,$$

$$R_8^2 = \frac{91065}{25105} = 3{,}627365\ 066719\ 776,$$

$$R_9^2 = \frac{330326}{91065} = 3{,}627365\ 068906\ 824,$$

$$R_{10}^2 = \frac{1198213}{330326} = 3{,}627365\ 087822\ 333.$$

Dann wird

$$\left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_7 = 0{,}020952\ 13879, \qquad \left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_8 = 0{,}020952\ 02926;$$

$$\Delta R_7^2 \frac{\Delta R_7^2 - \left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_7 \Delta R_6^2}{\Delta^2 R_7^2 - \left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_7 \Delta^2 R_6^2} = 0{,}000000\ 902862\ 142,$$

demnach

$$R_7^{2\prime} = 3{,}627365\ 084711\ 907,$$

und gewiss zu klein

$$R_7^{2\circ} = 3{,}627364\ 181849\ 765;$$

$$\Delta R_8^2 \frac{\Delta R_8^2 - \left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_8 \Delta R_7^2}{\Delta^2 R_8^2 - \left(\frac{\alpha_n - 2^{\mathfrak{Z}}}{R^2}\right)_8 \Delta^2 R_7^2} = -\,0{,}000000\ 017992\ 065,$$

demnach

$$R_8^{2\prime} = 3{,}627365\ 084711\ 841,$$

und gewiss zu gross

$$R_8^{2\circ} = 3{,}627365\ 102703\ 906.$$

$$2R\cos\varphi_5 = -\frac{1197}{526} = -\,2{,}275665\ 399239\ 5437,$$

$$2R\cos\varphi_6 = -\frac{4342}{1908} = -\,2{,}275681\ 341719\ 0775,$$

$$2R\cos\varphi_7 = -\frac{15750}{6921} = -\,2{,}275682\ 704811\ 4434,$$

$$2R\cos\varphi_8 = -\frac{57131}{25105} = -2{,}275682\ 135032\ 8619,$$

$$2R\cos\varphi_9 = -\frac{207235}{91065} = -2{,}275682\ 205018\ 3934,$$

$$2R\cos\varphi_{10} = -\frac{751717}{330326} = -2{,}275682\ 204852\ 1763.$$

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_7 = 0{,}020952\ 02764, \quad \left(\frac{\alpha_{n-2}{}^2}{R^2}\right)_8 = 0{,}020952\ 01339;$$

$$2R\cos\varphi_7' = -2{,}275682\ 203650\ 9899,$$

$$2R\cos\varphi_8' = -2{,}275682\ 203650\ 9860.$$

§ 4.

Ist

$$\alpha_n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \alpha_{n-1} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$\alpha_{n-2} = R'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \quad \alpha_{n-3} = R'(\cos\varphi' - i\sin\varphi'),$$

so ist nach Abh. I.

$$R_r{}^2 = \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}} = \alpha_n\alpha_{n-1} + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2}\dots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= R^2 + \left(\frac{R'}{R}\right)^{r+n-2} \cdot \frac{RA_{r+2}A'_{r+2} - R'A_{r+1}A'_{r+3}}{R'\cdot q^{\alpha_{n-2}}q^{\alpha_{n-3}}\sin\varphi\cdot\sin\varphi'}.$$

Nun wird, wenn man $A_{r+2}A'_{r+2}$ und $A_{r+1}A'_{r+3}$ durch A_{-n+2}, B_{-n+2}, A'_{-n+2}, B'_{-n+2} resp. durch

$$\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} - B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2}, \quad \frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} + B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2},$$

$$\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} + B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2}, \quad \frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} - B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2}$$

ausdrückt,

$$RA_{r+2}A'_{r+2} - R'A_{r+1}A'_{r+3} = A\cos(r+n)(\varphi+\varphi') + B\sin(r+n)(\varphi+\varphi')$$
$$+ C\cos(r+n)(\varphi-\varphi') - D\sin(r+n)(\varphi-\varphi')$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi')) + \sqrt{C^2+D^2}\sin(\psi-(r+n)(\varphi-\varphi')),$$

wenn

$$A = (R - R'\cos(\varphi - \varphi'))\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} - B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2}$$

$$+ R'\sin(\varphi - \varphi')\frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} + B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2},$$

$$B = (R - R'\cos(\varphi - \varphi'))\frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} + B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2}$$

$$- R'\sin(\varphi - \varphi')\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} - B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2}$$

$$C = (R - R'\cos(\varphi + \varphi'))\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} + B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2}$$

$$- R'\sin(\varphi + \varphi')\frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} - B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2},$$

$$D = (R - R'\cos(\varphi + \varphi'))\frac{A_{-n+2}B'_{-n+2} - B_{-n+2}A'_{-n+2}}{2}$$

$$+ R'\sin(\varphi + \varphi')\frac{A_{-n+2}A'_{-n+2} + B_{-n+2}B'_{-n+2}}{2},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{A}{B}, \quad \operatorname{tang}\psi' = \frac{C}{D}$$

gesetzt wird. Dabei ergibt sich dann

$$A^2 + B^2 = \tfrac{1}{4}(R^2 - 2RR'\cos(\varphi - \varphi') + R'^2)(A_{-n+2}^2 + B_{-n+2}^2)$$
$$\times (A'^2_{-n+2} + B'^2_{-n+2})$$
$$= \tfrac{1}{4} h\alpha_n h\alpha_{n-1} q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3}(R^2 - 2RR'\cos(\varphi - \varphi') + R'^2),$$

und ebenso

$$C^2 + D^2 = \tfrac{1}{4} h\alpha_n h\alpha_{n-1} q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3}(R^2 - 2RR'\cos(\varphi + \varphi') + R'^2);$$

ferner

$$\psi = (\alpha' - 2\varphi' - 90^0 + \alpha + \beta), \quad \psi' = (\alpha' - 2\varphi' + 90^0 - \alpha - \beta'),$$

wenn noch

$$\frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \frac{A'_{-n+4}}{B'_{-n+4}} = \operatorname{tang}\alpha',$$

$$\frac{R'\sin(\varphi - \varphi')}{R - R'\cos(\varphi - \varphi')} = \operatorname{tang}\beta, \quad \frac{R'\sin(\varphi + \varphi')}{R - R'\cos(\varphi + \varphi')} = \operatorname{tang}\beta'$$

gesetzt wird. Man hat also im Ganzen

$$34)\quad R_r^2 = R^2 + \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \cdot K[M\sin(\psi + (r+n)(\varphi + \varphi'))$$
$$+ N\sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi'))],$$

wobei gesetzt ist

$$K = \frac{1}{2\sin\varphi\sin\varphi'}\sqrt{\frac{ha_n\, ha_{n-1}}{qa_{n-2}\, qa_{n-3}}}, \quad M = \sqrt{R^2 - 2RR'\cos(\varphi - \varphi') + R'^2},$$

$$N = \sqrt{R^2 - 2RR'\cos(\varphi + \varphi') + R'^2}.$$

Daraus ergibt sich nun weiter

$$\Delta R_{r-1}^2 = \frac{R'^{r+n-4}}{R^{r+n-3}} \cdot K \Big\{ M \Big[\frac{R'}{R} \sin(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi'))$$

$$- \sin(\psi + (r+n-1)(\varphi+\varphi')) \Big] + N \Big[\frac{R'}{R} \sin(\psi' - (r+n)(\varphi - \varphi'))$$

$$- \sin(\psi' - (r+n-1)(\varphi - \varphi')) \Big] \Big\}$$

$$= \frac{R'^{r+n-4}}{R^{r+n-3}} \cdot K \Big\{ M \Big[\Big(\frac{R'}{R} - \cos(\varphi+\varphi') \Big) \sin(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi'))$$

$$+ \sin(\varphi+\varphi')\cos(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi')) \Big] + N \Big[\Big(\frac{R'}{R} - \cos(\varphi-\varphi') \Big)$$

$$\times \sin(\psi' - (r+n)(\varphi-\varphi')) - \sin(\varphi-\varphi')\cos(\psi' - (r+n)(\varphi-\varphi')) \Big] \Big\}.$$

$$\Delta R_r^2 = \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \cdot K \Big\{ M \Big[\frac{R'}{R} \sin(\psi + (r+n+1)(\varphi+\varphi'))$$

$$- \sin(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi')) \Big] + N \Big[\frac{R'}{R} \sin(\psi' - (r+n+1)(\varphi-\varphi'))$$

$$- \sin(\psi' - (r+n)(\varphi-\varphi')) \Big] \Big\}$$

$$= \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} \cdot K \Big\{ M \Big[\Big(\frac{R'}{R} \cos(\varphi+\varphi') - 1 \Big) \sin(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi'))$$

$$+ \frac{R'}{R} \sin(\varphi+\varphi')\cos(\psi + (r+n)(\varphi+\varphi')) \Big]$$

$$+ N \Big[\Big(\frac{R'}{R} \cos(\varphi-\varphi') - 1 \Big) \sin(\psi' - (r+n)(\varphi-\varphi'))$$

$$- \frac{R'}{R} \sin(\varphi-\varphi')\cos(\psi' - (r+n)(\varphi-\varphi')) \Big] \Big\}.$$

Daraus folgt

$$\Delta R_r^2 - \frac{R'^2}{R^2}\Delta R_{r-1}^2 = \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}}$$

$$\times K\left\{M\frac{-R^2+2RR'\cos(\varphi+\varphi')-R'^2}{R^2}\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))\right.$$

$$\left.+N\frac{-R^2+2RR'\cos(\varphi-\varphi')-R'^2}{R^2}\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))\right\}$$

$$=-\frac{R'^2-2RR'\cos\varphi\cos\varphi'+R^2}{R^2}\,\frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}}$$

$$\times K\{M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))+N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))\}$$

$$-2\sin\varphi\sin\varphi'.K\frac{R'^{r+n-2}}{R^{r+n-1}}\{M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))$$

$$-N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))\}.$$

Ganz ebenso ergibt sich aber

$$(R_{r+2}^2-R_r^2)-\frac{R'^4}{R^4}(R_r^2-R_{r-2}^2)=-\left(\frac{R'^4}{R^4}-2\frac{R'^2}{R^2}\cos2\varphi\cos2\varphi'+1\right)$$

$$\times\frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}}K\{M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))+N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi))\}$$

$$-2\sin2\varphi\sin2\varphi'K\frac{R'^{r+n-1}}{R^{r+n}}\{M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))$$

$$-N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))\}.$$

Werden aus beiden Gleichungen die letzten Glieder eliminirt, so kommt:

$$\text{35)}\quad \frac{R'^4}{R^4}(R_r^2-R_{r-2}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'.\Delta R_{r-1}^2+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\times$$

$$\times\Delta R_r^2-(R_{r+2}^2-R_r^2)$$

$$=\left(\frac{R'^2}{R^2}-2\frac{R'}{R}\cos(\varphi+\varphi')+1\right)\left(\frac{R'^2}{R^2}-2\frac{R'}{R}\cos(\varphi-\varphi')+1\right)\frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}}\times$$

$$\times K\{M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))+N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))\}.$$

Wird die entsprechende Gleichung für $r-1$ gebildet, von der vorhergehenden abgezogen und zugleich der Wert von ΔR_{r-1}^2 beachtet, so erhält man

$$\text{36)}\quad \frac{\frac{R'^4}{R^4}(\Delta R_{r-1}^2-\Delta R_{r-3}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'\Delta^2R_{r-2}^2}{\Delta R_{r-1}^2}$$

$$+\frac{+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\Delta^2R_{r-1}^2-(\Delta R_{r+1}^2-\Delta R_{r-1}^2)}{\Delta R_{r-1}^2}$$

$$=\left(\frac{R'^2}{R^2}-2\frac{R'}{R}\cos(\varphi+\varphi')+1\right)\left(\frac{R'^2}{R^2}-2\frac{R'}{R}\cos(\varphi-\varphi')+1\right);$$

Es gibt sonach die 35) selbst wieder

$$\frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-2}} K[M\sin(\psi+(r+n)(\varphi+\varphi'))+N\sin(\psi'-(r+n)(\varphi-\varphi'))]$$

$$= \varDelta R_{r-1}{}^2 \frac{\frac{R'^4}{R^4}(R_r{}^2-R_{r-2}{}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta R_{r-1}{}^2+}{\frac{R'^4}{R^4}(\varDelta R_{r-1}{}^2-\varDelta R_{r-3}{}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta^2 R_{r-2}{}^2+}$$

$$\frac{+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta R_r{}^2-(R_{r+2}{}^2-R_r{}^2)}{+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta^2 R_{r-1}{}^2-(\varDelta R_{r+1}{}^2-\varDelta R_{r-1}{}^2)}.$$

Dies ist die gewünschte Correctur und man hat jetzt

$$37)\quad R_r{}^{2\prime} = R_r{}^2 - \varDelta R_{r-1}{}^2 \times$$

$$\times \frac{\frac{R'^4}{R^4}(R_r{}^2-R_{r-2}{}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta R_{r-1}{}^2+}{\frac{R'^4}{R^4}(\varDelta R_{r-1}{}^2-\varDelta R_{r-3}{}^2)-\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta^2 R_{r-2}{}^2+}$$

$$\frac{+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta R_r{}^2-(R_{r+2}{}^2-R_r{}^2)}{+\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi'\varDelta^2 R_{r-1}{}^2-(\varDelta R_{r+1}{}^2-\varDelta R_{r-1}{}^2)}$$

Was die constanten Factoren betrifft, so ergeben sich diese aus der 36). Diese lässt sich nämlich auf die Form bringen

$$38)\quad \frac{R'^4}{R^4}\varDelta R_{r-3}{}^2-\frac{R'^3}{R^3}a\varDelta R_{r-2}{}^2+\frac{R'^2}{R^2}b\varDelta R_{r-1}{}^2-\frac{R'}{R}a\varDelta R_r{}^2 + \varDelta R_{r+1}{}^2 = 0,$$

wo, wie auch im Folgenden

$$4\cos\varphi\cos\varphi' = a,$$

$$2+4\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') = 4\cos^2\varphi+4\cos^2\varphi'-2 =$$
$$= 2\cos2\varphi+2\cos2\varphi'+2 = 8\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\varphi+\varphi')-2\cos(2\varphi+2\varphi') = b$$

gesetzt ist. Bildet man noch die drei analogen Gleichungen für $r-1$, $r-2$, $r-3$, so ergibt die gewöhnliche Methode

$$39)\quad \frac{R'^4}{R^4} = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta R_{r-2}{}^2, & \varDelta R_{r-1}{}^2, & \varDelta R_r{}^2, & \varDelta R_{r+1}{}^2 \\ \varDelta R_{r-3}{}^2, & . & . & . \\ \varDelta R_{r-4}{}^2, & . & . & . \\ \varDelta R_{r-5}{}^2, & . & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta R_{r-3}{}^2, & \varDelta R_{r-2}{}^2, & \varDelta R_{r-1}{}^2, & \varDelta R_r{}^2 \\ \varDelta R_{r-4}{}^2, & . & . & . \\ \varDelta R_{r-5}{}^2, & . & . & . \\ \varDelta R_{r-6}{}^2, & . & . & . \end{vmatrix}},$$

$$\frac{R'^3}{R^3}4\cos\varphi\cos\varphi' = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\frac{R'}{R}4\cos\varphi\cos\varphi' = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Die 37) lässt sich dann weiter auf eine Form bringen, welche den genauen Wert des Fehlers zeigt. Zunächst nimmt das zweite Glied der rechten Seite durch Division leicht die Form an

$$R_r^2 + \frac{\begin{vmatrix} R_{r-2}^2, & R_r^2 \\ R_{r-3}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}\frac{R'^4}{R^4} - \begin{vmatrix} R_{r-1}^2, & R_r^2 \\ R_{r-2}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix} a\frac{R'^3}{R^3} + \begin{vmatrix} R_r^2, & R_{r+1}^2 \\ R_{r-1}^2, & R_r^2 \end{vmatrix} a\frac{R'}{R} - \begin{vmatrix} R_r^2, & R_{r+2}^2 \\ R_{r-1}^2, & R_{r+1}^2 \end{vmatrix}}{(\Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}^2)\frac{R'^4}{R^4} - \Delta^2 R_{r-2}^2\, a\frac{R'^3}{R^3} + \Delta^2 R_{r-1}^2\, a\frac{R'}{R} - (\Delta R_{r+1}^2 - \Delta R_{r-1}^2)}.$$

Werden hier für die Constanten ihre Werte aus 39) eingeführt, so lässt sich der Nenner leicht in die Form einer Determinante 5ten Grades bringen, nämlich

$$\begin{vmatrix} \Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-3}, & \Delta R_{r-1}^2 - \Delta R_{r-2}, & 0, & -\Delta R_r^2 + \Delta R_{r-1}^2, & -\Delta R_{r+1}^2 + \Delta R_{r-1}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix};$$

Wird noch die zweite Zeile zur ersten addirt, so gibt dies

$$\Delta R_{r-1}^2 \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Der Zähler aber nimmt ebenso die Form an

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{r-2}^2, & R_r^2 \\ R_{r-3}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} R_{r-1}^2, & R_r^2 \\ R_{r-2}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, & 0, & \begin{vmatrix} R_{r+1}^2, & R_r^2 \\ R_r^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} R_{r+2}^2, & R_r^2 \\ R_{r+1}^2, & R_{r-1}^2 \end{vmatrix} \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Wird hier die zweite Zeile mit $-R_r^2$ multiplicirt und zur ersten addirt, so erhält man

$$-\Delta R_{r-1}^2 \begin{vmatrix} R_{r-2}^2, & R_{r-1}^2, & R_r^2, & R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2 \\ \Delta R_{r-4}^2, & \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Man hat sonach, wenn noch Zeilen und Colonnen vertauscht werden

$$37^a)\quad R'^2_r = \frac{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & R_{r+2}^2 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & R_{r+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & \Delta R_{r+1}^2, & 1 \\ \Delta R_{r-3}^2, & \Delta R_{r-2}^2, & \Delta R_{r-1}^2, & \Delta R_r^2, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}$$

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn ich zur Gewinnung der 39) statt der Gleichungen für r, $r-1$, $r-2$, $r-3$, die für $r+1$, r, $r-1$, $r-2$ oder für $r+2$, $r+1$, r, $r-1$ oder für $r+3$, $r+2$, $r+1$, r genommen hätte, ich analog einfache Determinanten bekommen hätte, und nach Anbringung der Correctur der Fehler derselbe gewesen wäre, wie nach dieser Formel für R_{r+1}^2, R_{r+2}^2, R_{r+3}^2. Es gilt darüber dieselbe Bemerkung wie oben. Bei den grössten Wurzeln ist die hier gewählte Combination, bei den kleinsten die letzte die vorteilhafteste.

Um nun den genauen Wert des Fehlers darzustellen, führe ich wieder die Bezeichnung ϱ und $\bar{\varrho}$ der p. 46. ein, und es ergibt sich wie dort

$$\text{40)}\quad R''_r = R^2 + \left|\frac{\begin{matrix} \rho\,.\rho+1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho-1, & \bar{\rho}\\ \rho-2, & \overline{\rho-1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho+1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, \\ \rho-1.\,\rho\,.\rho+1.\begin{vmatrix}\rho-2, & \overline{\rho-1}\\ \rho-3, & \overline{\rho-2}\end{vmatrix}, & \rho-3.\,\rho\,.\rho+1.\begin{vmatrix}\rho-1, & \bar{\rho}\\ \rho-2, & \overline{\rho-1}\end{vmatrix}, \\ \vdots & \vdots \end{matrix}}{\begin{matrix} \rho\,.\rho+1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho-1, & \bar{\rho}\\ \rho-2, & \overline{\rho-1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho+1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, \\ \vdots & \vdots \end{matrix}}\right|$$

$$\left|\frac{\begin{matrix} \rho-2.\rho-1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho-1.\,\rho\,.\begin{vmatrix}\rho+2, & \overline{\rho+3}\\ \rho+1, & \overline{\rho+2}\end{vmatrix}, \\ \rho-3.\rho-2.\rho+1.\begin{vmatrix}\rho, & \overline{\rho+1}\\ \rho-1, & \bar{\rho}\end{vmatrix}, & \rho-3.\rho-2.\rho-1.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, \\ \vdots & \vdots \end{matrix}}{\begin{matrix} \rho-2.\rho-1.\rho+2.\begin{vmatrix}\rho+1, & \overline{\rho+2}\\ \rho, & \overline{\rho+1}\end{vmatrix}, & \rho-2.\rho-1.\,\rho\,.\begin{vmatrix}\rho+2, & \overline{\rho+3}\\ \rho+1, & \overline{\rho+2}\end{vmatrix}, \\ \vdots & \vdots \end{matrix}}\right|$$

$$\left.\frac{\begin{matrix} \rho-2.\rho-1.\,\rho\,.\rho+1.\overline{\rho+3} \\ \rho-3.\rho-2.\rho-1.\,\rho\,.\overline{\rho+2} \\ \vdots \end{matrix}}{\begin{matrix} \rho-2.\rho-1.\,\rho\,.\rho+1.\rho+2 \\ \vdots \end{matrix}}\right|.$$

Um nun zu finden, welchem Wert sich der Fehler für grosse r nähert, sind wieder statt der Divisionscoefficienten ihre Näherungswerte einzusetzen. Man hat aber in unserm Fall als erste Näherungswerte

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1} \sin\varphi}\,.\,A_{r+1},$$

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) = \frac{R'^{\,r+n-4}}{q\alpha_{n-2}\, q\alpha_{n-3} \sin\varphi}\,.\,A'_{r+1};$$

demnach

$$\rho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n^2\, h\alpha_{n-1}^2 \sin^2\varphi}\begin{vmatrix}A_{r+1}, & A_{r+2}\\ A_r, & A_{r+1}\end{vmatrix} = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}};$$

$$\bar{\rho} = \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1} \sin\varphi}\cdot\frac{R'^{\,r+n-4}}{q\alpha_{n-2}\, q\alpha_{n-3} \sin\varphi'}\begin{vmatrix}RA_{r+1}, & R'A'_{r+2}\\ A_r, & A'_{r+1}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{R^{r+n-5}}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1} \sin\varphi}\cdot\frac{R'^{\,r+n-4}}{q\alpha_{n-2}\, q\alpha_{n-3} \sin\varphi'}\,.\,K_{r+1};$$

$$\begin{vmatrix} \varrho, & \overline{\varrho+1} \\ \varrho-1, & \bar{\varrho} \end{vmatrix} = \frac{R^{3r+3n-8} R'^{r+n-4}}{ha_n^2 ha_{n-1}^2 \sin\varphi \, qa_{n-2} qa_{n-3} \sin\varphi'} (RK_{r+1} - R'K_{r+2}).$$

In Folge davon wird der Nenner der 40):

$$\frac{R^{46r+46n-188} R'^{4r+4n-30}}{ha_n^{25} ha_{n-1}^{25} \sin^4\varphi \, qa_{n-2}^4 qa_{n-3}^4 \sin^4\varphi'} \times$$

$$\begin{vmatrix} R'^4(RK_r - R'K_{r+1}), & R'^4(RK_{r+1} - R'K_{r+2}), & R'^4(RK_{r+2} - R'K_{r+3}), & \cdots & R'^4(RK_{r+3} - R'K_{r+4}), & R^4 \\ R'^3(RK_{r-1} - R'K_r), & R'^3(RK_r - R'K_{r+1}), & R'^3(RK_{r+1} - R'K_{r+2}), & \cdots & R'^4(RK_{r+2} - R'K_{r+3}), & R^3 \\ R'^2(RK_{r-2} - R'K_{r-1}), & . & . & \cdots & . & R^2 \\ R' (RK_{r-3} - R'K_{r-2}), & . & . & \cdots & . & R \\ (RK_{r-4} - R'K_{r-3}), & . & . & \cdots & . & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun verificirt sich leicht die wichtige Identität

41) $A_r A'_s - a.A_{r-1} A'_{s-1} + b.A_{r-2} A'_{s-2} - a.A_{r-3} A'_{s-3} + A_{r-4} A'_{s-4} = 0.$

Wird demnach in unserer Determinante die 2te und 4te Zeile mit $-a$, die 3te mit b multiplicirt, und werden dann alle Zeilen zur ersten addirt, so verschwinden die vier ersten Glieder der ersten Zeile, und man erhält für die Determinante den Wert

$$(R^2 - 2RR'\cos(\varphi+\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR'\cos(\varphi-\varphi') + R'^2) . R'^6 \times$$

$$\begin{vmatrix} RK_{r-1} - R'K_r, & RK_r - R'K_{r+1}, & RK_{r+1} - R'K_{r+2}, & RK_{r+2} - R'K_{r+3} \\ RK_{r-2} - R'K_{r-1}, & RK_{r-1} - R'K_r, & RK_r - R'K_{r+1}, & RK_{r+1} - R'K_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Dass diese Determinante 4ten Grades constant ist ergibt sich schon daraus, dass sie mit Hülfe der 41) leicht in die umgeformt werden kann, für welche r um 1 kleiner oder grösser ist. Der Wert ergibt sich folgendermassen:

Man findet leicht

$$\begin{aligned} 42) \quad A_{r+i} A'_{s+k} &= A_r A'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' + A_r B'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ &\quad + B_r A'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' + B_r B'_s \sin i\varphi \sin k\varphi'; \\ A_{r+i} B'_{s+k} &= A_r B'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' - A_r A'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ &\quad + B_r B'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' - B_r A'_s \sin i\varphi \sin k\varphi'; \\ B_{r+i} A'_{s+k} &= B_r A'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' + B_r B'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ &\quad - A_r A'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' - A_r B'_s \sin i\varphi \sin k\varphi'; \\ B_{r+i} B'_{s+k} &= B_r B'_s \cos i\varphi \cos k\varphi' - B_r A'_s \cos i\varphi \sin k\varphi' \\ &\quad - A_r B'_s \sin i\varphi \cos k\varphi' + A_r A'_s \sin i\varphi \sin k\varphi'. \end{aligned}$$

Demnach ergibt sich nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten

$$
43)\quad \begin{vmatrix} A_rA'_s, & A_{r+1}A'_{s+1}, & A_{r+2}A'_{s+2}, & A_{r+3}A'_{s+3} \\ A_{r-1}A'_{s-1}, & A_rA'_s, & A_{r+1}A'_{s+1}, & A_{r+2}A'_{s+2} \\ A_{r-2}A'_{s-2}, & A_{r-1}A'_{s-1}, & A_rA'_s, & A_{r+1}A'_{s+1} \\ A_{r-3}A'_{s-3}, & A_{r-2}A'_{s-2}, & A_{r-1}A'_{s-1}, & A_rA'_s \end{vmatrix} =
$$

$$
\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \cos\varphi\cos\varphi', & \cos\varphi\sin\varphi', & \sin\varphi\cos\varphi', & \sin\varphi\sin\varphi' \\ \cos 2\varphi\cos 2\varphi', & \cos 2\varphi\sin 2\varphi', & \sin 2\varphi\cos 2\varphi', & \sin 2\varphi\sin 2\varphi' \\ \cos 3\varphi\cos 3\varphi', & \cos 3\varphi\sin 3\varphi', & \sin 3\varphi\cos 3\varphi', & \sin 3\varphi\sin 3\varphi' \end{vmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix} A_rA'_s, & A_rB'_s, & B_rA'_s, & B_rB'_s \\ A_{r-1}A'_{s-1}, & A_{r-1}B'_{s-1}, & B_{r-1}A'_{s-1}, & B_{r-1}B'_{s-1} \\ A_{r-2}A'_{s-2}, & A_{r-2}B'_{s-2}, & B_{r-2}A'_{s-2}, & B_{r-2}B'_{s-2} \\ A_{r-3}A'_{s-3}, & A_{r-3}B'_{s-3}, & B_{r-3}A'_{s-3}, & B_{r-3}B'_{s-3} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \cos\varphi\cos\varphi', & \cos\varphi\sin\varphi', & \sin\varphi\cos\varphi', & \sin\varphi\sin\varphi' \\ \cos 2\varphi\cos 2\varphi', & . & . & . \\ \cos 3\varphi\cos 3\varphi', & . & . & . \end{vmatrix}^2 \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix} A_rA'_s, & A_rB'_s, & B_rA'_s, & B_rB'_s \\ A_rB'_s, & -A_rA'_s, & B_rB'_s, & -B_rA'_s \\ B_rA'_s, & B_rB'_s, & -A_rA'_s, & -A_rB'_s \\ B_rB'_s, & -B_rA'_s, & -A_rB'_s, & A_rA'_s \end{vmatrix}
$$

$$
= 16.\sin^4\varphi\sin^4\varphi'\sin^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi').[(A_rA'_s+B_rB'_s)^2 + (A_rB'_s-B_rA'_s)^2].[(A_rA'_s-B_rB'_s)^2+(A_rB'_s+B_rA'_s)^2].
$$

Die Ableitung bleibt dieselbe, wenn an Stelle von $A_rA'_s$ irgend eine lineare Function solcher Ausdrücke tritt. In unserm Fall ist dies $RK_{r-1} - R'K_r$, und es ergibt sich daraus der Wert der Determinante

$$
16.\sin^4\varphi\sin^4\varphi'\sin^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\, ha_n^2\, ha_{n-1}^2\, qa_{n-2}^2\, qa_{n-3}^2 \times \times (R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2)^2.(R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2)^2,
$$

so dass also der ganze Nenner für grosse r sich dem Werte nähert

$$
44)\quad \frac{R^{46r+46n-188}\, R'^{4r+4n-24}}{ha_n^{23}\, ha_{n-1}^{23}\, qa_{n-2}^2\, qa_{n-3}^2}.16.\sin^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi') \times \times (R^2-2RR'\cos(\varphi+\varphi')+R'^2)^3.(R^2-2RR'\cos(\varphi-\varphi')+R'^2)^3.
$$

Den Zähler betrachte ich wieder lieber in der Form

$$
\begin{vmatrix} \varrho-1.\varrho.\varrho+1.\varrho+2.\overline{\varrho-1}, & \varrho-2.\varrho.\varrho+1.\varrho+2.\bar{\varrho}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho+1.\varrho+2.\overline{\varrho+1}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} \varrho-2.\varrho-1.\varrho.\varrho+2.\overline{\varrho+2}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho.\varrho+1.\overline{\varrho+2} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix},
$$

die ich erhalte, wenn ich die letzte Colonne zur vorletzten, und so fort, jede zur vorhergehenden addire. Für die ersten Näherungswerte wird daraus

$$\frac{R^{45r+45n-180}\,R'^{5r+5n-25}}{h\alpha_n{}^{25}\,h\alpha_{n-1}{}^{25}\sin\varphi^5\,q\alpha_{n-2}{}^5\,q\alpha_{n-3}{}^5\sin\varphi'^5}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2}, & K_{r+3}, & K_{r+4} \\ K_{r-1}, & K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2}, & K_{r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

in Folge der Gleichung 41), durch welche ich z. B. alle Glieder der letzten Colonne auf den Wert null bringen kann. Es ist demnach zu den zweiten Näherungswerten überzugehn, und sind dabei wieder die beiden Fälle zu unterscheiden, ob α_{n-4} ein einzelner reeller Wert ist, oder ob α_{n-4} und α_{n-5} auch noch ein Paar complexe Werte sind. Ich untersuche zunächst den ersten Fall. Es sind hier die Näherungswerte

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n) = \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n} + \frac{\alpha_{n-1}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}{}^{r+n-1}}{f'\alpha_{n-3}} =$$

$$= \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}A_{r+1} + \frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}\times$$

$$\times\frac{R^2A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi\,A'_{r+2} + R'^2A'_{r+1}}{M^2N^2}$$

wie analog p. 34. gefunden wird, und

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2}) = \frac{\alpha_{n-2}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-3}} + \frac{\alpha_{n-4}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-4}} =$$

$$= \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}A'_{r+1} + \frac{\alpha_{n-4}{}^{r+n-3}}{h'\alpha_{n-4}}.$$

Hieraus erhält man bei Vernachlässigung des gegen die andern verschwindenden Gliedes

$$\varrho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}} + \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot\frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi' M^2N^2}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} RA_{r+1}, & R'(R^2A'_{r+4} - 2RR'\cos\varphi\,A'_{r+3} + R'^2A'_{r+2}) \\ A_r, & (R^2A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi\,A'_{r+2} + R'^2A'_{r+1}) \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot\frac{R'^{r+n-3}}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi' M^2N^2}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} R'(R^2A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi\,A'_{r+2} + R'^2A'_{r+1}), & RA_{r+2} \\ (R^2A'_{r+2} - 2RR'\cos\varphi\,A'_{r+1} + R'^2A'_r), & A_{r+1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}} - \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot\frac{R'^{r+n-3}}{q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi' M^2N^2}\cdot Q_r,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$Q_r = R^2 A_{r+2}(R^2 A'_{r+2} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+1} + R'^2 A'_r)$$
$$- 2RR' A_{r+1}(R^2 A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+2} + R'^2 A'_{r+1})$$
$$+ R'^2 A_r (R^2 A'_{r+4} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+3} + R'^2 A'_{r+2});$$

und

$$\bar{\varrho} = \frac{R^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\cdot\frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}\cdot K_{r+1} - \frac{R'^{2r+2n-6}(R^2-R'^2)}{q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}M^2N^2}$$
$$+ \frac{R^{r+n-3}\alpha_{n-4}{}^{r+n-3}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi\, h'\alpha_{n-4}}.(RA_{r+1} - \alpha_{n-4}A_r).$$

Dann erhält man weiter, wieder unter Vernachlässigung der gegen die andern verschwindenden Glieder

$$(\varrho-1).\varrho.(\varrho+1).(\varrho+2).(\overline{\varrho-1}) = \frac{R^{9r+9n-16}R'^{r+n-5}}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin\varphi\, q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}K_r$$
$$- \frac{R^{8r+8n-17}R'^{2r+2n-10}}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin^2\varphi\, q\alpha_{n-2}{}^2 q\alpha_{n-3}{}^2\sin^2\varphi'}\cdot\frac{K_r}{M^2N^2}\times$$
$$\times(R^3R'Q_{r-1} + R^2R'^2Q_r + RR'^3Q_{r+1} + R'^4Q_{r+2})$$
$$- \frac{R^{8r+8n-12}R'^{2r+2n-8}(R^2-R'^2)}{h\alpha_n{}^4 h\alpha_{n-1}{}^4 q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}M^2N^2} + \frac{R^{9r+9n-16}\alpha_{n-4}{}^{r+n-4}}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin\varphi\, h'\alpha_{n-4}}\times$$
$$\times(RA_r - \alpha_{n-4}A_{r-1});$$

$$(\varrho-2).\varrho.(\varrho+1).(\varrho+2)\,\bar{\varrho} = \frac{R^{9r+9n-17}R'^{r+n-4}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}K_{r+1}$$
$$- \frac{R^{8r+8n-18}R'^{2r+2n-9}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}K_{r+1}(R^4Q_{r-2} + R^2R'^2Q_r + RR'^3Q_{r+1} + R'^4Q_{r+2})$$
$$- \frac{R^{8r+8n-14}R'^{2r+2n-6}(R^2-R'^2)}{\text{,,}\qquad\text{,,}} + \frac{R^{9r+9n-17}\alpha_{n-4}{}^{r+n-3}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}\times$$
$$\times(RA_{r+1} - \alpha_{n-4}A_r);$$

$$(\varrho-2).(\varrho-1).(\varrho+1).(\varrho+2).(\overline{\varrho+1}) = \frac{R^{9r+9n-18}R'^{r+n-3}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}K_{r+2}$$
$$- \frac{R^{8r+8n-19}R'^{2r+2n-8}.K_{r+2}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}(R^4Q_{r-2} + R^3R'Q_{r-1} + RR'^3Q_{r+1} + R'^4Q_{r+2})$$
$$- \frac{R^{8r+8n-16}R'^{2r+2n-4}(R^2-R'^2)}{\text{,,}\qquad\text{,,}} + \frac{R^{9r+9n-18}\alpha_{n-4}{}^{r+n-2}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}\times$$
$$\times(RA_{r+2} - \alpha_{n-4}A_{r+1});$$

$$(\varrho-2).(\varrho-1).\varrho.(\varrho+2).(\overline{\varrho+2}) = \frac{R^{9r+9n-19}\,R'^{r+n-2}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}K_{r+3}$$

$$-\frac{R^{8r+8n-20}\,R'^{2r+2n-7}.K_{r+3}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}(R^4Q_{r-2}+R^3R'Q_{r-1}+R^2R'^2Q_r+R'^4Q_{r+2})$$

$$-\frac{R^{8r+8n-18}\,R'^{2r+2n-2}(R^2-R'^2)}{\text{,,}\qquad\text{,,}}+\frac{R^{9r+9n-19}\,\alpha_{n-4}{}^{r+n-1}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}\times$$

$$\times\,(RA_{r+3}-\alpha_{n-4}A_{r+2});$$

$$(\varrho-2).(\varrho-1).\varrho.(\varrho+1).(\overline{\varrho+3}) = \frac{R^{9r+9n-20}\,R'^{r+n-1}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}K_{r+4}$$

$$-\frac{R^{8r+8n-21}\,R'^{2r+2n-6}.K_{r+4}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}(R^4Q_{r-2}+R^3R'Q_{r-1}+R^2R'^2Q_r+RR'^3Q_{r+1})$$

$$-\frac{R^{8r+8n-20}\,R'^{2r+2n}(R^2-R'^2)}{\text{,,}\qquad\text{,,}}+\frac{R^{9r+9n-20}\,\alpha_{n-4}{}^{r+n}}{\text{,,}\qquad\text{,,}}\times$$

$$\times\,(RA_{r+4}-\alpha_{n-4}A_{r+3}).$$

Werden diese Werte in die Zählerdeterminante eingesetzt, so zerfällt diese in 1024 Einzeldeterminanten. Von diesen kommen aber nur in Betracht: die erste, welche in allen Colonnen das 1ste Glied enthält und identisch null wird, wie wir schon gesehen haben; ausserdem

die fünf, welche je in einer Colonne das 2te }
die fünf, „ „ „ 3te } Glied, in allen übrigen das erste enthalten.
die fünf, „ „ „ 4te }

Es wäre dem Leser zu viel zugemutet, wenn ich die Auswertung dieser fünfzehn Determinanten hier durchführen wollte, und sei deshalb nur der betretene Weg angedeutet.

Mit Hülfe der Gleichung 41), welche für die K_r sowohl als für die Q_r gültig bleibt, lassen sich immer je fünf zusammengehörige Determinanten so umformen, dass sie die vier ersten Colonnen gleich haben. Dann kann man sie in eine zusammenfassen und wieder mit Hülfe der 41) durch Addition der Zeilen die 4 ersten Glieder zum Verschwinden bringen. Man hat dann noch in den 3 Fällen das letzte Glied der ersten Zeile multiplicirt mit der Determinante 4ten Grades

$$\begin{vmatrix} K_{r-1}, & K_r, & K_{r+1}, & K_{r+2} \\ K_{r-2}, & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

welche ein besonderer Fall der 43) ist, und nach der dortigen Entwicklung den Wert bekommt

$16\sin^4\varphi\,.\sin^4\varphi'.\sin^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')h\alpha_n{}^2 h\alpha_{n-1}{}^2 q\alpha_{n-2}{}^2 q\alpha_{n-3}\,M^2N^2.$

Die letzten Glieder der ersten Zeilen erfordern verschiedene Behandlung, und man kommt schliesslich zu dem Resultat:

$$45)\quad R'^2_r = R^2 + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-7}}.A.\{B.\sin(\chi+(r+n-4)(2\varphi+2\varphi'))$$
$$+C.\sin(\chi'-(r+n-4)(2\varphi-2\varphi'))+D.\sin(w+(r+n-4)2\varphi')$$
$$+E.\sin(w'+(r+n-4)2\varphi)+F\}+\frac{\alpha_{n-4}{}^{r+n-8}}{R^{r+n-8}}.G.\sin(v+(r+n-2)\varphi);$$

wo die Werte der Constanten die folgenden sind:

$$A = \frac{h\alpha_n h\alpha_{n-1}}{8q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin^2\varphi\,.\sin^2\varphi'.\,M^2N^2},$$

$$B = \frac{1}{N}.(R^2-2RR'\cos(3\varphi+3\varphi')+R'^2)(R^2-2RR'\cos(3\varphi+\varphi')$$
$$+R'^2)(R^2-2RR'\cos(\varphi+3\varphi')+R'^2),$$

$$C = \frac{1}{M}.(R^2-2RR'\cos(3\varphi-3\varphi')+R'^2)(R^2-2RR'\cos(3\varphi-\varphi')$$
$$+R'^2)(R^2-2RR'\cos(\varphi-3\varphi')+R'^2),$$

$$D = 2.(R^2-2RR'\cos(\varphi+3\varphi')+R'^2)(R^2-2RR'\cos(\varphi-3\varphi')+R'^2)\times$$
$$\times\sqrt{R^2-2RR'\cos\varphi\,.\cos\varphi'+R'^2\cos^2\varphi},$$

$$E = 2(R^2-2RR'\cos(3\varphi+\varphi')+R'^2)(R^2-2RR'\cos(3\varphi-\varphi')+R'^2)\times$$
$$\times\sqrt{R^2-2RR'\cos\varphi.\cos\varphi'+R'^2\cos^2\varphi'},$$

$$F = 2(R-R'\cos\varphi\,.\cos\varphi')M^2N^2,$$

$$G = \frac{(\alpha_{n-4}{}^2-2\alpha_{n-4}R'\cos\varphi'+R'^2)^2.(\alpha_{n-4}{}^2-2\alpha_{n-4}R'\cos(2\varphi+\varphi')+R'^2)}{h'\alpha_{n-4}\sin\varphi\,.\,M^4N^4}$$
$$\times(\alpha_{n-4}{}^2-2\alpha_{n-4}R'\cos(2\varphi-\varphi')+R'^2)\times$$
$$\times\sqrt{h\alpha_n h\alpha_{n-1}(R^2-2R\alpha_{n-4}\cos\varphi+\alpha_{n-4}{}^2)}.$$

Die Werte der constanten Winkel aber werden

$$\chi = 90+2\alpha'-4\nu'+2\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon,$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{A_{-n+2}}{B_{-n+2}},\quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{A'_{-n+4}}{B'_{-n+4}},$$

$$\operatorname{ang}\gamma = \frac{(R^2-R'^2)\sin(\varphi-\varphi')}{R^2\cos(\varphi-\varphi')-2RR'+R'^2\cos(\varphi-\varphi')},$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{R^2R'(\sin(\varphi+\varphi') - a\sin(2\varphi+2\varphi')) + RR'^2(a.\sin(5\varphi+5\varphi') - \sin(6\varphi+6\varphi')) - R'^3\sin(7\varphi+7\varphi')}{R^3 + R^2R'(\cos(\varphi+\varphi') - a.\cos(2\varphi+2\varphi')) + RR'^2(a.\cos(5\varphi+5\varphi') - \cos(6\varphi+6\varphi')) - R'^3\cos(7\varphi+7\varphi')},$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{R^4.\sin(-5\varphi-3\varphi') - R^3R'a.\sin(-3\varphi-\varphi') + R^2R'^2b.\sin(-\varphi+\varphi') - RR'^3a.\sin(\varphi+3\varphi') + R'^4\sin(3\varphi+5\varphi')}{R^4.\cos(-5\varphi-3\varphi') - R^3R'a.\cos(-3\varphi-\varphi') + R^2R'^2b.\cos(-\varphi+\varphi') - RR'^3a.\cos(\varphi+3\varphi') + R'^4\cos(3\varphi+5\varphi')};$$

$$\chi' = 90^0 + 2\alpha' - 4\varphi' - 2\alpha - \gamma' - \delta' - \varepsilon',$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\gamma' = \frac{(R^2 - R'^2)\sin(\varphi+\varphi')}{R^2\cos(\varphi+\varphi') - 2RR' + R'^2\cos(\varphi+\varphi')}$$

$$\operatorname{tang}\delta' = \frac{R^2R'(\sin(\varphi-\varphi') - a.\sin(2\varphi-2\varphi')) + RR'^2(a.\sin(5\varphi-5\varphi') - \sin(6\varphi-6\varphi')) - R'^3\sin(7\varphi-7\varphi')}{R^3 + R^2R'(\cos(\varphi-\varphi') - a.\cos(2\varphi-2\varphi')) + RR'^2(a.\cos(5\varphi-5\varphi') - \cos(6\varphi-6\varphi')) - R'^3\cos(7\varphi-7\varphi')},$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon' = \frac{R^4\sin(-5\varphi+3\varphi') - R^3R'a.\sin(-3\varphi+\varphi') + R^2R'^2b.\sin(-\varphi-\varphi') - RR'^3a.\sin(\varphi-3\varphi') + R'^4\sin(3\varphi-5\varphi')}{R^4\cos(-5\varphi+3\varphi') - R^3R'a.\cos(-3\varphi+\varphi') + R^2R'^2b.\cos(-\varphi-\varphi') - RR'^3a.\cos(\varphi-3\varphi') + R'^4\cos(3\varphi-5\varphi')};$$

$$\omega = 2\alpha' - 4\varphi' - 90^0 - \zeta + \eta_1 - \eta_2 + \vartheta,$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{(R^2 - R'^2).\sin\varphi'}{R^2\cos\varphi' - 2RR'\cos\varphi + R'^2\cos\varphi'},$$

$$\operatorname{tang}\eta_1 = \frac{-2RR'\cos\varphi.\sin3\varphi' + R'^2\sin6\varphi'}{R^2 - 2RR'\cos\varphi.\cos3\varphi' + R'^2\cos6\varphi'},$$

$$\operatorname{tang}\eta_2 = \frac{R'\cos\varphi.\sin\varphi'}{R - R'\cos\varphi.\cos\varphi'},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{R^4\sin(-3\varphi') - R^3R'a.\sin(-\varphi') + R^2R'^2b.\sin\varphi' - RR'^3a.\sin3\varphi' + R'^4\sin5\varphi'}{R^4\cos(-3\varphi') - R^3R'a.\cos(-\varphi') + R^2R'^2b.\cos\varphi' - RR'^3a.\cos3\varphi' + R'^4\cos5\varphi'};$$

$$\omega' = 2\alpha - 90 + \zeta' + \eta'_1 - \eta'_2 + \vartheta',$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\zeta' = \frac{(R^2 - R'^2)\sin\varphi}{R^2\cos\varphi - 2RR'\cos\varphi' + R'^2\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\eta'_1 = \frac{-2RR'\cos\varphi'\sin 3\varphi + R'^2\sin 6\varphi}{R^2 - 2RR'\cos\varphi'\cos 3\varphi + R'^2\cos 6\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\eta'_2 = \frac{R'\cos\varphi'.\sin\varphi}{R - R'\cos\varphi'.\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{R^4.\sin(-5\varphi) - R^3R'a.\sin(-3\varphi) + R^2R'^2b\sin(-\varphi) - RR'^3a.\sin\varphi + R'^4\sin 3\varphi}{R^4.\cos(-5\varphi) - R^3R'a.\cos(-3\varphi) + R^2R'^2b\cos(-\varphi) - RR'^3a.\cos\varphi + R'^4\cos 3\varphi};$$

$$v = \alpha + 2\mu + \nu$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{(\alpha_{n-4}^2 - R^2)\sin 2\varphi}{\alpha_{n-4}^2\cos 2\varphi - 2\alpha_{n-4}R'\cos\varphi' + R'^2\cos 2\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\nu = \frac{\alpha_{n-4}\sin\varphi}{R - \alpha_{n-4}\cos\varphi}.$$

Im zweiten Fall sei

$$\alpha_{n-4} = R''(\cos\varphi'' + i.\sin\varphi''), \quad \alpha_{n-5} = R''(\cos\varphi'' - i.\sin\varphi'').$$

Man hat dann als zweite Näherungswerte wie beim ersten Fall

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi}\; A_{r+1} + \frac{R'^{r+n-2}}{q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi'} \times \frac{R^2A'_{r+3} - 2RR'\cos\varphi A'_{r+2} + R'^2A'_{r+1}}{M^2N^2},$$

und analog, wenn noch

$$(\chi - \alpha_1)(\chi - \alpha_2)\ldots(\chi - \alpha_{n-6}) = t$$

und

$$R'^2 - 2R'R''\cos(\varphi' - \varphi'') + R''^2 = M'^2,$$
$$R'^2 - 2R'R''.\cos(\varphi' + \varphi'') + R''^2 = N'^2$$

gesetzt wird:

$$(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2}) = \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}.A'_{r+1} + \frac{R''^{r+n-4}}{t\alpha_{n-4}\,t\alpha_{n-5}\sin\varphi''} \times \times \frac{R'^2A''_{r+3} - 2R'R''\cos\varphi' A''_{r+2} + R''^2A''_{r+1}}{M'^2N'^2}.$$

Dann wird auch ϱ derselbe Wert wie p. 70., dagegen wird jetzt

$$\bar{\varrho} = \frac{R^{r+n-3}R'^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi\, q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}.K_{r+1} - \frac{R'^{2r+2n-6}(R^2 - R'^2)}{q\alpha_{n-2}q\alpha_{n-3}M^2N^2} + \frac{R^{r+n-3}R''^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi\, t\alpha_{n-4}t\alpha_{n-5}\sin\varphi'' M'^2N'^2}.P_{r+1},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$P_{r+1} = RA_{r+1}(R'^2A''_{r+3} - 2R'R''\cos\varphi' A''_{r+2} + R''^2A''_{r+1}) - R'A_r(R'^2A''_{r+4} - 2R'R''\cos\varphi' A''_{r+3} + R''^2A''_{r+2}).$$

In Folge davon werden auch bei den Näherungswerten für die $(\varrho-1).\varrho.(\varrho+1)(\varrho+2)(\bar{\varrho}-1)$ u. s. f. die drei ersten Glieder die nämlichen wie p. 71., nur die vierten Glieder werden anders, nämlich der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{l} R^{9r+9n-16}R''^{r+n-5}.P_r \\ R^{9r+9n-17}R''^{r+n-4}.P_{r+1}, \\ R^{9r+9n-18}R''^{r+n-3}.P_{r+2}, \\ R^{9r+9n-19}R''^{r+n-2}.P_{r+3}, \\ R^{9r+9n-20}R''^{r+n-1}.P_{r+4}, \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{abgesehen von dem gemeinsamen Nenner} \\ ha_n{}^5 ha_{n-1}{}^5 \sin\varphi . ta_{n-4} ta_{n-5} \sin\varphi'' . M'^2N'^2.\end{array}$$

Von den Einzeldeterminanten, in welche der Zähler durch Einsetzen der Näherungswerte zerfällt, werden dann auch die 11 ersten die nämlichen wie im ersten Fall. Die fünf aber, welche in je einer Colonne das vierte, in den übrigen das erste Glied der Näherungswerte enthalten, werden anders. Sie lassen sich aber analog behandeln, und man findet schliesslich

$$46)\quad R'^2 = R^2 + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-7}}.A.\{B.\sin(\chi+(r+n-4)(2\varphi+2\varphi') + C\sin(\chi'-(r+n-4)(2\varphi-2\varphi')) + D\sin(\omega+(r+n-4)2\varphi') + E.\sin(\omega'+(r+n-4)2\varphi) + F\} + \frac{R''^{r+n-9}}{R^{r+n-8}}.H.\{J.\sin(\xi-(r+n-2)(\varphi-\varphi')) + K.\sin(\xi'+(r+n-2)(\varphi+\varphi'))\}.$$

Dabei haben die Constanten A, B, C, D, E, F, χ, χ', ω, ω' die Bedeutung wie p. 73. Die übrigen bedeuten

$$H = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{ha_n ha_{n-5}}{ta_{n-4}ta_{n-5}}}.\frac{M'N'}{\sin\varphi.\sin\varphi'' M^4N^4},$$

$$J = (R'^2 - 2R'R''\cos(2\varphi-\varphi''+\varphi') + R''^2) \times (R'^2 - 2R'R''\cos(2\varphi-\varphi''-\varphi') + R''^2) \times \sqrt{R^2 - 2RR''\cos(\varphi+\varphi'') + R''^2};$$

$$K = (R'^2 - 2R'R''\cos(2\varphi+\varphi''+\varphi') + R''^2) \times (R'^2 - 2R'R''\cos(2\varphi+\varphi''+\varphi') + R''^2) \times \sqrt{R^2 - 2RR''\cos(\varphi-\varphi'') + R''^2};$$

$$\xi = \alpha'' - 3\varphi'' + 90 - \alpha - \varrho + \sigma - o,$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang}\alpha'' = \frac{A''_{-n+6}}{B''_{-n+6}}. \quad \operatorname{tang} o = \frac{R''.\sin(\varphi+\varphi'')}{R - R''\cos(\varphi+\varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}\varrho = \frac{R''^4\sin(2\varphi-2\varphi'') - aR''^3R'\sin(\varphi-\varphi'')}{R''^4\cos(2\varphi-2\varphi'') - aR''^3R'\cos(\varphi-\varphi'')}$$
$$\frac{+aR''R'^3\sin(\varphi-\varphi'') - R'^4\sin(2\varphi-2\varphi'')}{+bR''^2R'^2 - aR''R'^3\cos(\varphi-\varphi'') + R'^4\cos(2\varphi-2\varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{(R'^2 - R''^2)\sin(2\varphi-\varphi'')}{R'^2\cos(2\varphi-\varphi'') - 2R'R''\cos\varphi' + R''^2\cos(2\varphi-\varphi'')};$$

$$\xi' = \alpha'' - 3\varphi'' - 90 + \alpha + \varrho' - \sigma' + o',$$

wenn gesetzt wird

$$\operatorname{tang} o' = \frac{R''\sin(\varphi-\varphi'')}{R - R''\cos(\varphi-\varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}\varrho' = \frac{R''^4\sin(2\varphi+2\varphi'') - aR''^3R'\sin(\varphi+\varphi'')}{R''^4\cos(2\varphi+2\varphi'') - aR''^3R'\cos(\varphi+\varphi'')}$$
$$\frac{+aR''R'^3\sin(\varphi+\varphi'') - R'^4\sin(2\varphi+2\varphi'')}{+bR''^2R'^2 - aR''R'^3\cos(\varphi+\varphi'') + R'^4\cos(2\varphi+2\varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}\sigma' = \frac{(R'^2 - R''^2)\sin(2\varphi+\varphi'')}{R'^2\cos(2\varphi+\varphi'') - 2R'R''\cos\varphi' + R''^2\cos(2\varphi+\varphi'')}.$$

Handelt es sich um die kleinsten Wurzeln, so ist einfach r negativ zu nehmen und statt α_n, α_{n-1} ... resp. α_1, α_2 ... zu schreiben. Ich erhalte dann

$$47)\quad R^{2\prime}_{-r} = R^2_{-r} - \Delta R^2_{-r-1} \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4}(R^2_{-r} - R^2_{-r-2})}{\frac{R'^4}{R^4}(\Delta R^2_{-r-1} - \Delta R^2_{-r-3})}$$
$$\frac{-\frac{R'^3}{R^3}a.\Delta R^2_{-r-1} + \frac{R'}{R}a.\Delta R^2_{-r} - (R^2_{-r+2} - R^2_{-r})}{-\frac{R^3}{R^3}a.\Delta^2R^2_{-r-2} + \frac{R'}{R}.a\Delta^2R^2_{-r-1} - (\Delta R^2_{-r+1} - \Delta R^2_{-r-1})}.$$

Die Constanten aber werden, um möglichst wenig Werte über den zu corrigirenden hinaus berechnen zu müssen, diesmal bequemer bestimmt durch die Gleichungen

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3}, & \varDelta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'^3}{R^3} 4\cos\varphi.\cos\varphi'\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3}, & \varDelta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'}{R} 4\cos\varphi.\cos\varphi'\right)_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Es wird dann

$$R^{2\prime}_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3}, & \varDelta R^2_{-r+4}, & R^2_{-r+2} \\ \varDelta R^2_{-r}, & \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3}, & R^2_{-r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta R^2_{-r+1}, & \varDelta R^2_{-r+2}, & \varDelta R^2_{-r+3}, & \varDelta R^2_{-r+4} & 1 \\ \varDelta R_{-r}^2, & \varDelta R_{-r+1}^2, & \varDelta R_{-r+2}^2, & \varDelta R^2_{-r+3}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Was die Berechnung von $2R\cos\varphi$ betrifft, so hat man nach Abh. I.

$$(2R\cos\varphi)_r = \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}} = \alpha_n + \alpha_{n-1}$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2} \ldots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}} = 2R\cos\varphi$$

$$+ \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-1}} \cdot \frac{RA_{r+1}A'_{r+2} - R'A_rA'_{r+3}}{q^{\alpha_{n-2}}q^{\alpha_{n-3}} \sin\varphi \sin\varphi'}.$$

Daraus enthält man dieselbe Entwicklung wie p. 49, nur dass statt A_{-n+2} und B_{-n+2} jetzt A_{-n+1} und B_{-n+1} steht. Da dann weiter $\frac{A_{-n+1}}{B_{-n+1}} = \frac{A_{-n+2}\cos\varphi - B_{-n+2}\sin\varphi}{B_{-n+2}\cos\varphi + A_{-n+2}\sin\varphi}$ ist, sieht man, dass statt α jetzt $\alpha - \varphi$, und folglich statt ψ und ψ' jetzt $\psi - \varphi$ und $\psi' + \varphi$ zu setzen ist. Es ist sonach

$$48)\quad (2R\cos\varphi)_r = 2R\cos\varphi + \frac{R'^{r+n-3}}{R^{r+n-3}} . K \times$$

$$\times [M.\sin(\psi - \varphi + (r+n)(\varphi + \varphi') + N.\sin(\psi' + \varphi - (r+n)(\varphi - \varphi'))],$$

wo die Constanten dieselben sind wie p. 50. Dann ergiebt sich weiter ganz analog

$$49)\quad (2R\cos\varphi)'_r = (2R\cos\varphi)_r - \varDelta(2R\cos\varphi)_{r-1} \times$$

$$\times \frac{\frac{R'^4}{R^4}(2R\cos\varphi_r - 2R\cos\varphi_{r-2}) - \frac{R'^3}{R^3}a.\varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}}{\frac{R'^4}{R^4}(\varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}) - \varDelta 2R\cos\varphi_{r-3}) - \frac{R'^3}{R^3}a.\varDelta^2 2R\cos\varphi_{r-2}}$$

$$\frac{+\frac{R'}{R}a.\varDelta 2R\cos\varphi_r - (2R\cos\varphi_{r+2} - 2R\cos\varphi_r)}{+\frac{R'}{R}a.\varDelta^2 2R\cos\varphi_{r-1} - (\varDelta 2R\cos\varphi_{r+1} - \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1})},$$

wobei die Constanten zu berechnen sind aus den Gleichungen

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_r = \frac{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r+3}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'^3}{R^4}4\cos\varphi\,.\cos\varphi'\right)_r$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-3}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-3}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'}{R}4\cos\varphi\,.\cos\varphi'\right)_r$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-3}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-3}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte kommt

$$(2R\cos\varphi)'_r$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1}, & 2R\cos\varphi_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varDelta 2R\cos\varphi_{r-2}, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r-1}, & \varDelta 2R\cos\varphi_r, & \varDelta 2R\cos\varphi_{r+1}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Haben ϱ und σ dieselbe Bedeutung wie p. 57., so hat man den genauen Wert des Fehlers in der Form

$$50)\quad (2R\cos\varphi)'_r = 2R\cos\varphi + \frac{\begin{vmatrix} \varrho.\varrho+1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho-1, & \sigma \\ \varrho-2, & \sigma-1 \end{vmatrix}, \\ \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varrho.\varrho+1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho-1, & \sigma \\ \varrho-2, & \sigma+1 \end{vmatrix}, \\ \vdots \end{vmatrix}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\begin{vmatrix} \varrho-2.\varrho+1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varrho-2.\varrho+1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho, & \sigma+1 \\ \varrho-1, & \sigma \end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho+2 \begin{vmatrix} \varrho+1, & \sigma+2 \\ \varrho, & \sigma+1 \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\begin{vmatrix} \varrho-2.\varrho-1.\varrho. \begin{vmatrix} \varrho+2, & \sigma+3 \\ \varrho+1, & \sigma+2 \end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho.\varrho+1.\sigma+3 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varrho-2.\varrho-1.\varrho. \begin{vmatrix} \varrho+2, & \sigma+3 \\ \varrho+1, & \sigma+2 \end{vmatrix}, & \varrho-2.\varrho-1.\varrho.\varrho+1.\varrho+2 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Um den Ausdruck zu finden, welchem sich der Fehler für grosse r nähert, hat man als erste Näherungswerte

$$\varrho = \frac{R^{2r+2n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}},$$

$$\sigma = \frac{R^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3}\sin\varphi'} \cdot \begin{vmatrix} RA_r, & R'A'_{r+1} \\ A_{r-1}, & A'_{r+2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{R^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi} \cdot \frac{R'^{r+n-4}}{q\alpha_{n-2} q\alpha_{n-3}\sin\varphi'} \cdot K'_{r+1},$$

$$\varrho.\varrho+1.\varrho+2. \begin{vmatrix} \varrho-1, & \sigma \\ \varrho-2, & \sigma-1 \end{vmatrix} = \frac{R^{9r+9n-18} R'^{r+n-5}}{h\alpha_n^5 h\alpha_{n-1}^5 \sin\varphi\, q\alpha_{n-3} q\alpha_{n-3}\sin\varphi'} \times$$

$$\times (RK'_r - R'K'_{r+1}).$$

Durch Einsetzen dieser Werte und das analoge Verfahren wie oben wird der Nenner

$$\frac{R^{46r+46n-192} R^{14r+4n-24}}{h\alpha_n^{23} h\alpha_{n-1}^{23} q\alpha_{n-2}^2 q\alpha_{n-3}^2} . 16.\sin^2(\varphi+\varphi').\sin^2(\varphi-\varphi').M^6 N^6.$$

Der Zähler wird null und man muss zu den zweiten Näherungswerten übergehen. Dabei sind wieder die beiden Fälle zu unterscheiden.

Im ersten Fall, wenn α_{n-4} ein einzelner Wert ist, ist ϱ derselbe Wert wie p. 70. und

$$\sigma = \frac{R^{r+n-4}R'^{r+n-4}}{h\alpha_n h\alpha_{n-1}\sin\varphi\, q^{\alpha}{}_{n-2}q^{\alpha}{}_{n-3}\sin\varphi'}.K'_{r+1}$$

$$-\frac{R'^{2r+2n-6}(2R\cos\varphi - 2R'\cos\varphi')}{q^{\alpha}{}_{n-2}\,q^{\alpha}{}_{n-3}M^2N^2}$$

$$+\frac{R^{r+n-4}\alpha_{n-4}(RA_r - \alpha_{n-4}A_{r-1})}{h\alpha_n\, h\alpha_{n-1}\sin\varphi\,.h'\alpha_{n-4}}.$$

In Folge davon wird

$$(\varrho-1).\varrho.(\varrho+1)(\varrho+2)(\sigma-1) = \frac{R^{9r+9n-17}R'^{r+n-5}K'_r}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin\varphi\, q\alpha_{n-2}\,q\alpha_{n-3}\sin\varphi'}$$

$$-\frac{R^{8r+8n-18}.R'^{2r+2n-10}}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin^2\varphi\, q\alpha_{n-2}{}^2 q\alpha_{n-3}{}^2\sin^2\varphi'}.\frac{K'_r}{M^2N^2}\times$$

$$\times(R^3R'Q_{r-1} + R^2R'^2Q_r + RR'^3Q_{r+1} + R'^4R_{r+2})$$

$$-\frac{R^{8r+8n-12}R'^{2r+2n-8}(2R\cos\varphi - 2R'\cos\varphi')}{h\alpha_n{}^4 h\alpha_{n-1}{}^4 q\alpha_{n-2}\,q''_{n-3}M^2N^2}$$

$$+\frac{R^{9r+9n-17}\alpha_{n-4}(RA_{r-1} - \alpha_{n-4}A_{r-2})}{h\alpha_n{}^5 h\alpha_{n-1}{}^5\sin\varphi\,.h'\alpha_{n-4}}$$

Durch Einsetzen dieses und der analogen Werte zerfällt wieder die Determinante in Einzeldeterminanten, von welchen nur 16 in Betracht kommen. Die erste ist identisch null. Die fünf nächsten unterscheiden sich von den fünf ersten der p. 59. nur dadurch, dass der Exponent von R um 5 kleiner ist und dass an der Stelle der K_r die K'_r stehen; die fünf folgenden unterscheiden sich von den entsprechenden der p. 72. ausser durch den Exponenten von R nur durch den Factor $2R\cos\varphi - 2R\cos\varphi - 2R'\cos\varphi'$ statt $R^2 - R'^2$; bei den fünf letzten endlich ist nur der Exponent von R um 5 kleiner.

Man erhält als Resultat

51) $$(2R\cos\varphi)'_r = 2R\cos\varphi + \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-6}}.A\times$$

$$\{B.\sin(\chi-\varphi+(r+n-4)(2\varphi+2\varphi')) + C.\sin(\chi'+\varphi-(r+n-4)(2\varphi-2\varphi'))$$

$$+D'.\sin(w+\eta_2-\eta_3+(r+n-4)2\varphi') + E.\sin(w'-\varphi+(r+n-4)2\varphi) + F'\}$$

$$+\frac{\alpha_{n-4}{}^{r+n-8}}{R^{r+n-7}}.G.\sin(v+(r+n-2)\varphi).$$

Dabei sind die Constanten A, B, C, E, G, χ, χ', w, w', v, η_2 dieselben wie p. 73.

Dagegen ist jetzt

$$D' = 2(R^2 - 2RR'\cos(\varphi + 3\varphi') + R'^2)(R^2 - 2RR'\cos(\varphi - 3\varphi') + R'^2) \times$$
$$\times \sqrt{R^2\cos^2\varphi - 2RR'\cos\varphi\cos\varphi' + R'^2},$$
$$F' = (2R\cos\varphi - 2R'\cos\varphi')M^2N^2,$$
$$\text{tang}\,\eta_3 = \frac{R'\sin\varphi'}{R\cos\varphi - R'\cos\varphi'}.$$

Im zweiten Fall hat ϱ den nämlichen Wert wie im ersten. Dagegen wird

$$\sigma = \frac{R^{r+n-4}R'^{r+n-4}}{ha_n ha_{n-1}\sin\varphi\, qa_{n-2}qa_{n-3}\sin\varphi'}K'_{r+1}$$
$$- \frac{R'^{2r+2n-6}(2R\cos\varphi - 2R'\cos\varphi')}{qa_{n-2}qa_{n-3}M^2N^2}$$
$$+ \frac{R^{r+n-4}R''^{r+n-4}.P'_{r+1}}{ha_n ha_{n-1}\sin\varphi\, ta_{n-4}ta_{n-5}\sin\varphi'' M'^2N'^2},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$P'_{r+1} = RA_r(R'^2A''_{r+3} - 2R'R''\cos\varphi' A''_{r+1} + R''^2A''_{r+1})$$
$$- R''A_{r-1}(R'^2A''_{r+4} - 2R'R''\cos\varphi' A''_{r+3} + R''^2A''_{r+2}).$$

Es bleiben also auch bei dem Näherungswert für $(\varrho-1)\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)(\sigma-1)$ die drei ersten Glieder dieselben wie im ersten Fall, das letzte wird

$$\frac{R^{9r+9n-17}R''^{r+n-5}.P'_r}{ha_n^5 ha_{n-1}^5\sin\varphi\, ta_{n-4}ta_{n-5}\sin\varphi'' M'^2N'^2}.$$

Es bleiben dann auch die 11 ersten Determinanten dieselben. Die 5 letzten unterscheiden sich von denen der p. 76 nur dadurch, dass der Exponent von R um 5 kleiner ist, und an Stelle der K_r und P_r die K'_r und P'_r stehen. Dies übt nur einen Einfluss auf die Werte von ξ und ξ', statt deren man jetzt hat $\xi + \varphi$ und $\xi' - \varphi$. Demnach ist im zweiten Fall

52) $$(2R\cos\varphi)'_r = 2R\cos\varphi$$
$$+ \frac{R'^{2r+2n-10}}{R^{2r+2n-6}}A\{B\sin(\chi - \varphi + (r+n-4)(2\varphi + 2\varphi'))$$
$$+ C\sin(\chi' + \varphi - (r+n-4)(2\varphi - 2\varphi'))$$
$$+ D'\sin(\omega + \eta_2 - \eta_3 + (r+n-4)2\varphi')$$
$$+ E\sin(\omega' - \varphi + (r+n-4)2\varphi) + F'\}$$
$$+ \frac{R''^{r+n-9}}{R^{r+n-7}}H\{J\sin(\xi + \varphi - (r+n-2)(\varphi - \varphi'))$$
$$+ K\sin(\xi' - \varphi + (r+n-2)(\varphi + \varphi'))\},$$

wo die Constanten dieselbe Bedeutung haben wie vorher.

Wenn es sich um die kleinsten Wurzeln handelt, könnte man wieder einfach r überall negativ nehmen. Es ist aber wieder bequemer zu setzen:

$$53)\quad (2R\cos\varphi)'_{-r} = 2R\cos\varphi_{-r} - \Delta 2R\cos\varphi_{-r-1} \times$$

$$\times \frac{\frac{R'^4}{R^4}(2R\cos\varphi_{-r} - 2R\cos\varphi_{-r-2}) - \frac{R'^3}{R^3}a.\Delta 2R\cos\varphi_{-r-1}}{\frac{R'^4}{R^4}(\Delta 2R\cos\varphi_{-r-1} - \Delta 2R\cos\varphi_{-r-3}) - \frac{R'^3}{R^3}a.\Delta^2 2R\cos\varphi_{-r-2}}$$

$$\frac{+\frac{R'}{R}a.\Delta 2R\cos\varphi_{-r} - (2R\cos\varphi_{-r+2} - 2R\cos\varphi_{-r})}{+\frac{R'}{R}a.\Delta^2 2R\cos\varphi_{-r-1} - (\Delta 2R\cos\varphi_{-r+1} - \Delta 2R\cos\varphi_{-r-1})}$$

und dabei die Constanten zu bestimmen durch die Gleichungen

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-r} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'^3}{R^3}.4\cos\varphi\cos\varphi'\right)_{-r} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}},$$

$$\left(\frac{R'}{R}.4\cos\varphi\cos\varphi'\right)_{-r} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Dadurch wird

$$(2R\cos\varphi)'_{-r} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+4}, & 2R\cos\varphi_{-r+2} \\ \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & 2R\cos\varphi_{-r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+4}, & 1 \\ \Delta 2R\cos\varphi_{-r}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+1}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+2}, & \Delta 2R\cos\varphi_{-r+3}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}.$$

Von den Beispielen der ersten Abhandlung gehören hierher die kleinsten Wurzeln des 3ten Beispiels. Die numerische Berechnung wird jedoch so umständlich, dass sie kaum praktisch anwendbar ist. Bei dem speciellen Beispiel ist übrigens auch die Annäherung nicht gross, wenn nicht höhere Divisionscoefficienten berechnet werden. Man hat

$$R_{-6}^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$R_{-7}^2 = \frac{2.8}{79} = 0{,}202531\ 645569\ 62$$

$$R_{-8}^2 = \frac{2.79}{824} = 0{,}191747\ 572815\ 53$$

$$R_{-9}^2 = \frac{2.824}{8810} = 0{,}187060\ 158910\ 32$$

$$R_{-10}^2 = \frac{2.8810}{94556} = 0{,}186344\ 600025\ 38$$

$$R_{-11}^2 = \frac{2.94556}{1008973} = 0{,}187430\ 188914\ 86$$

$$R_{-12}^2 = \frac{2.1008973}{10\ 768514} = 0{,}187393\ 172354\ 14$$

$$R_{-13}^2 = \frac{2.10768514}{114\ 896933} = 0{,}187446\ 500421\ 38$$

$$R_{-14}^2 = \frac{2.114896933}{1226\ 145888} = 0{,}187411\ 521132\ 14$$

$$R_{-15}^2 = \frac{2.1226145888}{13085\ 200972} = 0{,}187409\ 561476\ 92$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-11} = 95{,}365153\ 4784,$$

$$\left(a\frac{R'^3}{R^3}\right)_{-11} = -25{,}626882\ 6847,$$

$$\left(a\frac{R'}{R}\right)_{-11} = -2{,}547611\ 8912,$$

$$\varDelta R_{-12}^2 \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4}(R_{-11}^2 - R_{-13}^2) - a\frac{R'^3}{R^3}\varDelta R_{-12}^2}{\frac{R'^4}{R^4}(\varDelta R_{-12}^2 - \varDelta R_{-14}^2) - a\frac{R'^3}{R^3}\varDelta^2 R_{-13}^2}$$

$$\frac{+a\frac{R'}{R}\varDelta R_{-11}^2 - (R_{-9}^2 - R_{-11}^2)}{+a\frac{R'}{R}\varDelta^2 R_{-12}^2 - (\varDelta R_{-10}^2 + \varDelta R_{-12}^2)} = 0{,}000019\ 954556\ 47,$$

also

$$R_{-11}^{2'} = 0{,}187410\ 234358\ 39,$$

und gewiss zu klein der Wert

$$R_{-11}^{2''} = 0{,}187390\ 279801\ 92.$$

$$\left(\frac{R'^4}{R^4}\right)_{-12} = 98{,}177243\ 8280,$$

$$\left(a\frac{R'^3}{R^3}\right)_{-12} = -25{,}975808\ 0078,$$

$$\left(a\frac{R'}{R}\right)_{-12} = -2{,}618366\ 7974,$$

$$\varDelta R_{-13}^2 \cdot \frac{\frac{R'^4}{R^4}(R_{-12}^2 - R_{-14}^2) - a\frac{R'^3}{R^3}\varDelta R_{-13}^2}{\frac{R'^4}{R^4}(\varDelta R_{-13}^2 - \varDelta R_{-15}^2) - a\frac{R'^3}{R^3}\varDelta^2 R_{-14}^2}$$

$$\frac{+a\frac{R'}{R}\varDelta R_{-12}^2 - (R_{-10}^2 - R_{-12}^2)}{+a\frac{R'}{R}\varDelta^2 R_{-12}^2 - (\varDelta R_{-11}^2 - \varDelta R_{-13}^2)} = -0{,}000017\ 208624\ 48,$$

also

$$R_{-12}^{2'} = 0{,}187410\ 380978\ 62,$$

und gewiss zu gross der Wert

$$R_{-12}^{2^\circ} = 0{,}187427\ 589603\ 10.$$

Zweibrücken, 31. Januar 1877.

III.

Ueber rationale Dreikante und Tetraeder.

Von

R. Hoppe.

Ein Dreieck heisst rational, wenn die Sinus und Cosinus der 3 Winkel rational sind, eine dreikantige Ecke und ein Tetraeder, wenn es die Sinus und Cosinus aller Seiten- und Flächenwinkel sind. Um die Bedingungen der Rationalität auf die notwendigen einzuschränken, so genügt für das Dreieck die Rationalität der Seiten und des Inhalts, für das Tetraeder die der Kanten, des Seiten- und Körperinhalts, für die Ecke die der Sinus und Cosinus aller Seitenwinkel und die des Sinus eines Flächenwinkels. Auch ist das Tetraeder rational, wenn es die Ecken sind, und zwar ist die Bedingung auf 3 Ecken ausgedehnt schon mehr als hinreichend, auf 2 nicht hinreichend.

§. 1. Rationale Dreikante.

Betrachten wir zuerst eine dreikantige Ecke. Seien a, b, c die Tangenten der halben Seitenwinkel, dann ist der Cosinus des Flächenwinkels (b, c) ausgedrückt durch

$$\frac{\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}\,\frac{1-c^2}{1+c^2}}{\frac{2b}{1+b^2}\,\frac{2c}{1+c^2}}=\frac{b^2+c^2-a^2(1+b^2c^2)}{2bc(1+a^2)}$$

Dies addirt zu 1 und subtrahirt von 1 giebt die 2 Grössen:

$$\frac{(b+c)^2-a^2(1-bc)^2}{2bc(1+a^2)},\quad \frac{a^2(1+bc)^2-(b-c)^2}{2bc(1+a^2)}$$

Die Zähler zerfallen wieder rational in die Factoren

$$\left.\begin{aligned} D &= a+b+c-abc \\ A &= -a+b+c+abc \\ B &= a-b+c+abc \\ C &= a+b-c+abc \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

daher ist der Sinus des genannten Flächenwinkels

$$\frac{K}{2bc(1+a^2)} = \frac{\sqrt{ABCD}}{2bc(1+a^2)} \quad (2)$$

und $\frac{K}{4abc}$ das Sinusverhältniss. Die Ecke ist also rational, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist.

Indem wir Winkel $> 2R$, deren Zulassung die Untersuchung nutzlos erschweren würde, von der Betrachtung ausschliessen, haben wir es nur mit positiven a, b, c zu tun. Dann aber sind auch A, B, C, D, wie eine leichte Betrachtung ergiebt, einzeln positiv.

Damit $ABCD$ eie Quadrat sei, müssen die Factoren die Form haben

$$A = \alpha_1{}^2\alpha\varepsilon\zeta; \quad B = \beta_1{}^2\beta\zeta\delta; \quad C = \gamma_1{}^2\gamma\delta\varepsilon; \quad D = \delta_1{}^2\alpha\beta\gamma$$

wo sämmtliche Buchstaben positive rationale Zahlen bedeuten. Eliminirt man a, α, δ und setzt

$$\alpha_1 = \frac{\delta_1\lambda}{\varkappa}; \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1\lambda}{h}; \quad \zeta = \gamma\varkappa; \quad \varepsilon = \frac{\beta\varkappa gh}{\lambda^2}$$

woraus umgekehrt

$$g = \frac{\alpha_1\gamma_1\varepsilon}{\beta_1\delta_1\beta}; \quad h = \frac{\alpha_1\beta_1\zeta}{\gamma_1\delta_1\gamma}; \quad \varkappa = \frac{\zeta}{\gamma}; \quad \lambda = \frac{\alpha_1\zeta}{\delta_1\gamma}$$

so behält man noch eine Bedingungsgleichung

$$\frac{1+b^2}{b}\,\frac{1+h^2}{h} = \frac{1+c^2}{c}\,\frac{1+g^2}{g} \quad (3)$$

welche offenbar durch 2 analoge ersetzt werden kann,

$$\frac{1+c^2}{c}\,\frac{1+f^2}{f} = \frac{1+a^2}{a}\,\frac{1+h^2}{h} \quad (4)$$

$$\frac{1+a^2}{a}\,\frac{1+g^2}{g} = \frac{1+b^2}{b}\,\frac{1+f^2}{f} \quad (5)$$

Die directen Beziehungen zwischen den 6 Grössen sind:

$$f=\sqrt{\frac{BC}{AD}};\quad g=\sqrt{\frac{CA}{BD}};\quad h=\sqrt{\frac{AB}{CD}} \tag{6}$$

$$a=\frac{b+c}{1-bc}\,\frac{1-gh}{1+gh};\quad b=\frac{c+a}{1-ca}\,\frac{1-hf}{1+hf};\quad c=\frac{a+b}{1-ab}\,\frac{1-fg}{1+fg} \tag{7}$$

und zwar hat man:

$$BC+AD=4bc(1+a^2)$$

so dass

$$\frac{2f}{1+f^2}=\frac{\sqrt{ABCD}}{2bc(1+a^2)}$$

den Sinus des Flächenwinkels (b, c) darstellt. Demnach sind f, g, h die Tangenten der halben Flächenwinkel, und die Gl. (3) (4) (5) die Proportionen der Sinus der Seiten- und Flächenwinkel.

Kennt man nun 4 Rationalzahlen x_1, x_2, x_3, x_4, welche die Gleichung

$$\frac{1+x_1^2}{x_1}\,\frac{1+x_4^2}{x_4}=\frac{1+x_2^2}{x_2}\,\frac{1+x_3^2}{x_3} \tag{8}$$

befriedigen, so kann man zunächst 32 verschiedene rationale Dreikante bilden, indem man b, c, g, h oder deren Reciproke mit den verschiedenen x identificirt. Je 4 solcher Dreikante sind jedoch blosse Nebenecken von einander, die sämmtlich von denselben 3 sich schneidenden Ebenen gebildet werden. Die Nebenecken sind dadurch kenntlich, dass von den Grössen a, b, c eine gemeinsam, die beiden andern reciprok sind. Dieselbe Beziehung findet dann immer entsprechend zwischen f, g, h statt. Handelt es sich also um Bestimmung von b, c, g, h, so gehören die 4 Combinationen

$$\left(b,\ c,\ g,\ h\right)\left(\frac{1}{b},\ c,\ \frac{1}{g},\ h\right)\left(b,\ \frac{1}{c},\ g,\ \frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{g},\ \frac{1}{h}\right)$$

zu Nebenecken. Schliessen wir die Nebenecken aus, so ergeben sich aus jeder Lösung der Gl. (8), die wir abkürzend

$$(x_1,\ x_4)=(x_2,\ x_3) \tag{9}$$

schreiben wollen, 8 wesentlich verschiedene Dreikante. Diese aber liefern, wie weiterhin gezeigt werden soll, neue Lösungen.

Es kam nun darauf an eine Lösung mit kleinst möglichen Primfactoren zu erhalten, um von dieser die unbegrenzten Reihen der daraus abgeleiteten zu beginnen. Ich habe deshalb für die vier x alle echten Brüche bis zum Nenner 9 durchprobirt. Es fand sich nur ein einziges Wertsystem, das der Gleichung genügte:

$$\left(\frac{3}{7},\ \frac{2}{3}\right)=\left(\frac{7}{9},\ \frac{2}{5}\right) \tag{10}$$

Hieraus ergeben sich nach (7) (6) die 8 rationalen Dreikante (11)

a	b	c	f	g	h
$\frac{19}{42}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{21}{22}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{41}{13}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{87}{41}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{29}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{87}{41}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{41}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{19}{42}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{22}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{3}{7}$

und liefern folgende 8 neue Lösungen der Gl. (9): (12)

$$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{19}{42}\right); \qquad \left(\frac{3}{7}, \frac{8}{19}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{19}{42}\right)$$

$$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{21}{22}\right); \qquad \left(\frac{3}{7}, \frac{8}{11}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{21}{22}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{13}\right); \qquad \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{29}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{1}{13}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{41}\right); \qquad \left(\frac{3}{7}, \frac{41}{87}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{13}{41}\right)$$

Nach jeder lassen sich 8 Dreikante (ohne Nebenecken) bilden, von denen nur je 2 auf die vorigen zurückkommen, im ganzen also 48 neue. Um die daraus hervorgehenden Lösungen mit den alten übersichtlich zusammenzustellen, wollen wir die Productgleichung (9) in die Proportionsform umsetzen und schreiben:

$$(x_1 : x_2) = (x_3 : x_4) \tag{13}$$

abgekürzt statt

$$\frac{1+x_1^2}{x_1} : \frac{1+x_2^2}{x_2} = \frac{1+x_3^2}{x_3} : \frac{1+x_4^2}{x_4} \tag{14}$$

dann ergeben sich nach zweiter Vervielfältigung der Lösungen folgende 2 Gleichheiten von je 8 und 8 Gleichheiten von je 4 Sinusverhältnissen:

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{2}{5}:\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{13}:\frac{3}{29}\right)=\left(\frac{13}{41}:\frac{41}{87}\right)=\left(\frac{7.31}{9.67}:\frac{2.67}{17^2}\right)$$
$$=\left(\frac{10.23}{11.47}:\frac{11.23}{6.47}\right)=\left(\frac{49.17}{33.179}:\frac{99.17}{49.179}\right)=\left(\frac{10.107}{31.163}:\frac{6.163}{31.107}\right) \tag{15}$$

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{7}{9}:\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{19}{42}:\frac{8}{19}\right)=\left(\frac{21}{22}:\frac{8}{11}\right)=\left(\frac{49.73}{93.41}:\frac{70.31}{41.73}\right)$$
$$=\left(\frac{51.23}{343}:\frac{49.17}{10.23}\right)=\left(\frac{7.37}{9.13.79}:\frac{6.13}{37.79}\right)=\left(\frac{91.31}{27.71}:\frac{13.71}{18.31}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}:\frac{1}{13}\right)=\left(\frac{2}{3}:\frac{3}{29}\right)=\left(\frac{8.17}{5.19}:\frac{2}{19}\right)=\left(\frac{8.5}{11.17}:\frac{1}{22}\right)$$

$$\left(\frac{2}{5}:\frac{13}{41}\right)=\left(\frac{2}{3}:\frac{41}{87}\right)=\left(\frac{25.11}{8.37}:\frac{2.11}{41}\right)=\left(\frac{37}{8.25}:\frac{19}{2.41}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{1}{13}\right)=\left(\frac{7}{9}:\frac{3}{29}\right)=\left(\frac{15.7}{11.17}:\frac{1}{11}\right)=\left(\frac{5.19}{21.17}:\frac{1}{19}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{13}{41}\right)=\left(\frac{7}{9}:\frac{41}{87}\right)=\left(\frac{3.25.7}{19.37}:\frac{19}{41}\right)=\left(\frac{25.11}{21.37}:\frac{11}{41}\right)$$

$$\left(\frac{7}{9}:\frac{19}{42}\right)=\left(\frac{2}{3}:\frac{8}{19}\right)=\left(\frac{3.25}{17.41}:\frac{41}{26.29}\right)=\left(\frac{25}{3.17}:\frac{13}{2.19}\right)$$

$$\left(\frac{7}{9}:\frac{21}{22}\right)=\left(\frac{2}{3}:\frac{8}{11}\right)=\left(\frac{3.37}{5.41}:\frac{2.41}{11.13}\right)=\left(\frac{3.5}{37}:\frac{11}{2.13}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{19}{42}\right)=\left(\frac{2}{5}:\frac{8}{19}\right)=\left(\frac{17}{25}:\frac{29}{2.19}\right)=\left(\frac{25}{17.41}:\frac{41}{2.29}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}:\frac{21}{22}\right)=\left(\frac{2}{5}:\frac{8}{11}\right)=\left(\frac{37}{5.41}:\frac{2.41}{11.29}\right)=\left(\frac{5}{37}:\frac{11}{2.29}\right)$$

Jede der ersteren repräsentirt 28, jede der letzteren 6 Gleichungen; unter diesen 104 Gleichungen sind 9 identisch mit vorausgehenden. Daher hat man im ganzen 95 verschiedene Lösungen.

Um das Gesetz der Vervielfältigung wenigstens recurrirend anzugeben, sind noch die f rational in den b, c, g, h darzustellen. Eliminirt man a zwischen den 2 ersten Gl. (7) und entwickelt daraus f, so findet man mit Anwendung der Gl. (3):

$$f=\frac{1+gh}{g-h}\,\frac{b-c}{b+c} \tag{16}$$

Durch (7) ist a bekannt, und die abgeleitete Lösung

$$(b:g) = (c:h) = (a:f)$$

lautet nun in dem System der x als Grundlösung ausgedrückt:

$$(x_1:x_2) = (x_3:x_4) = \left(\frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3}\,\frac{1-x_2x_4}{1+x_2x_4} : \frac{x_1+x_3}{x_1-x_3}\,\frac{x_2-x_4}{1+x_2x_4}\right)$$

Die Vervielfältigung bei jeder successiven Ableitung beruht dann auf 2 Operationen, erstlich der Umkehrung eines der 4 Brüche x, zweitens der Vertauschung der Mittelglieder der Proportion, woraus:

$$(x_1:x_2) = (x_3:x_4) = \left(\frac{x_1+x_3}{1-x_1x_3}\,\frac{x_2-x_4}{x_2+x_4} : \frac{x_1+x_3}{x_1-x_3}\,\frac{1-x_2x_4}{x_2+x_4}\right)$$

$$(x_1:x_3) = (x_2:x_4) = \left(\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}\,\frac{1-x_3x_4}{1+x_3x_4} : \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x_3-x_4}{1+x_3x_4}\right)$$

Gl. (16) zeigt, dass gleichschenklige Dreikante eine Ausnahme bilden. Setzt man in (1) $b=c$, so wird $B=C$, also braucht man bloss

$$AD = \{2b+a(1-b^2)\}\{2b-a(1-b^2)\}$$

zum Quadrat zu machen, indem man setzt

$$\left.\begin{aligned} 2b+a(1-b^2) &= \alpha^2\gamma \\ 2b-a(1-b^2) &= \beta^2\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

woraus nach Elimination von γ:

$$a = \frac{2b}{1-b^2}\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

oder einfacher:

$$a = \frac{2b}{1-b^2}\,\frac{1-n^2}{1+n^2} \qquad (19)$$

Dies eingeführt in (1) (2) giebt das Sinusverhältniss:

$$\frac{K}{4abc} = \frac{1+b^2}{b}\,\frac{n}{1+n^2}$$

folglich ist $\frac{2n}{1+n^2}$ der Sinus der zwei gleichen Flächenwinkel, und n hat die Bedeutung von $g=h$. Den Wert von f zur Bestimmung des dritten Flächenwinkels erhält man am leichtesten aus (6), nämlich

$$f = \frac{2n}{1-n^2}\,\frac{1-b^2}{1+b^2} \qquad (20)$$

Offenbar lassen sich a und f mit ihren Reciproken vertauschen. Demnach findet man immer ein und nur ein rationales gleichschenk-

liges Dreikant, wenn man die Tangenten der halben gleichen Seiten- und Flächenwinkel beliebig rational macht (die Nebenecke ungerechnet).

Diesem Falle steht derjenige zur Seite, wo sich 2 Seiten- oder 2 Flächenwinkel zu 2 Rechten ergänzen, was immer gleichzeitig stattfindet, weil ihre Sinus zugleich gleich werden. Hier verschwindet im Ausdruck (7) von a Zähler und Nenner. Man findet:

$$A = D = \frac{1+b^2}{b}; \quad B = 2a + \frac{1-b^2}{b}; \quad C = 2a - \frac{1-b^2}{b}$$

und hat BC zum Quadrat zu machen, was bei der Substitution (18) auf B, C angewandt zu folgendem Werte führt:

$$a = \frac{1-b^2}{2b}\,\frac{1+n^2}{1-n^2} \tag{21}$$

Ebenso ergiebt sich

$$f = \frac{1+b^2}{1-b^2}\,\frac{1-n^2}{2n} \tag{22}$$

und der resultirende Satz gilt auch für solche Dreikante.

§. 2. Rationale Tetraeder.

Geht man zur Darstellung rationaler Tetraeder von den Ecken aus, so kann man zunächst 2 Ecken rational wählen, die nur einen Flächenwinkel gemein haben müssen, im übrigen innerhalb gewisser Grenzen beliebig sein können, Grenzen die durch die notwendige Convergenz der Kanten auferlegt werden. Sind nämlich von den 4 Ecken A, A', B, C die beiden ersten bestimmt durch die Werte a, b, c und a', b', c' im Sinne von §. 1., so dass b, b' der Seite ABA', c, c' der Seite ACA' zugehören, so ist $f = f'$, und, damit AB mit $A'B$, AC mit $A'C$ convergirt,

$$bb' < 1; \quad cc' < 1$$

Ist dem genügt, so lässt sich bemerken, dass der Inhalt des Tetraeders, gemessen nach der Kante $AA' = k$, schon rational ist; denn die Dreiecke (ABA') und (ACA') sind rational, und das Tetraeder

$$T = \frac{(ABA').(ACA')}{6k}\sin(AA')$$

Gleichwol ist die sechste Kante BC noch nicht als rational bestimmt, und von den anliegenden Seitenwinkeln sind es nur die Tangenten. Es bleibt also noch eine Grösse, etwa BC rational zu machen. Die Bedingung ist dann, dass

$$\left.\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos BAC \\ &= A'B^2 + A'C^2 - 2A'B.A'C\cos BA'C \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

ein Quadrat wird. Da beide Ausdrücke von Natur identisch sind, so muss sich die Bedingung symmetrisch in den mit gleichen Buchstaben bezeichneten Grössen darstellen lassen.

Man hat:

$$\sin ABA' = \sin(A'AB + AA'B) = \frac{2b(1-b'^2)+2b'(1-b^2)}{(1+b^2)(1+b'^2)}$$

$$= \frac{2(b+b')(1-bb')}{(1+b^2)(1+b'^2)}$$

$$\sin AA'B = \frac{2b'}{1+b'^2} = \frac{(b+b')(1+bb')-(b-b')(1-bb')}{(1+b^2)(1+b'^2)}$$

daher

$$AB = k\frac{\sin AA'B}{\sin ABA'} = \frac{k}{2}\left(\frac{1+bb'}{1-bb'} - \frac{b-b'}{b+b'}\right)$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$b_1 = \frac{1+bb'}{1-bb'}; \quad b_2 = \frac{b-b'}{b+b'}; \quad c_1 = \frac{1+cc'}{1-cc'}; \quad c_2 = \frac{c-c'}{c+c'}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} AB &= k\frac{b_1-b_2}{2}; \quad AC = k\frac{c_1-c_2}{2} \\ A'B &= k\frac{b_1+b_2}{2}; \quad A'C = k\frac{c_1+c_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Ferner ist, wenn man

$$n = \cos(AA') = \frac{1-f^2}{1+f^2}$$

setzt,

$$\cos BAC = \cos A'AB \cos A'AC + n \sin A'AB \sin A'AC$$

$$= \frac{(1-b^2)(1-c^2)+4nbc}{(1+b^2)(1+c^2)}$$

$$= \frac{\{(b+b')(1-bb')-(b-b')(1+bb')\} \times}{\{(b+b')(1+bb')-(b-b')(1-bb')\} \times}$$

$$\frac{\times \{(c+c')(1-cc')-(c-c')(1+cc')\}+16nbcb'c'}{\times \{(c+c')(1+cc')-(c-c')(1-cc')\}}$$

$$= \frac{(1-b_1b_2)(1-c_1c_2)+m}{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}$$

wo zur Abkürzung

$$m = \frac{16nbcb'c'}{(1-bb')(1-cc')(b+b')(c+c')}$$

Dies nebst (24) eingeführt in (23) giebt:

$$4BC^2 = (b_1 \mp b_2)^2 + (c_1 \mp c_2)^2 - 2(1 \mp b_1 b_2)(1 \mp c_1 c_2) - 2m$$

Die Doppelzeichen, entsprechend den 2 Ausdrücken in (23), heben sich nach Entwickelung, und man erhält:

$$4l^2 = 4BC^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 - 2 - 2b_1 b_2 c_1 c_2 - 2m$$

oder: (25)

$$4l^2 = \left(\frac{1+bb'}{1-bb'}\right)^2 + \left(\frac{b-b'}{b+b'}\right)^2 + \left(\frac{1+cc'}{1-cc'}\right)^2 + \left(\frac{c-c'}{c+c'}\right)^2 - 2$$

$$-2\,\frac{(1+bb')(b-b')(1+cc')(c-c') + 16bb'cc'\dfrac{1-f^2}{1+f^2}}{(1-bb')(b+b')(1-cc')(c+c')}$$

Die Bedingung ist nun, dass b, c, f und b', c', f' zwei rationalen Ecken entsprechen, und den letzten Ausdruck zum Quadrat machen, überdies dass

$$bb' < 1; \quad cc' < 1$$

sei. Die letzte Bedingung lässt sich immer dadurch erfüllen, dass man, wenn $bb' > 1$; $cc' > 1$ wird, für b, c oder für b', c' oder für alle 4 Grössen die reciproken Werte setzt, wenn dagegen $bb' > 1$; $cc' < 1$ oder $bb' < 1$; $cc' > 1$ ist, beziehungsweise mit b, b', f oder mit c, c', f dasselbe tut, wenn endlich bb' oder cc' beide $= 1$ werden, die Umkehrung mit dem grössten der reciproken Brüche vornimmt.

Um einzelne Lösungen zu finden, kann man die im vorigen gefundenen rationalen Ecken zu Grunde legen. Für f ist eine beliebige Lösung der Gl. (8) zu setzen; zu jedem f gehören unendlich viele b, zu jeder Combination f, b vier Werte von c. Sei z. B. $f = \frac{2}{3}$; dann hat man:

(26)

$$b = \quad \frac{3}{7} \qquad \frac{1}{13} \qquad \frac{13}{41} \qquad \frac{22}{21} \qquad \frac{42}{19} \cdots$$

$$c = \begin{cases} \dfrac{1}{13} & \dfrac{3}{7} & \dfrac{3}{7} & \dfrac{3}{7} & \dfrac{3}{7} \cdots \\[2ex] \dfrac{13}{31} & \dfrac{2}{19} & \dfrac{22}{41} & \dfrac{26}{11} & \dfrac{38}{13} \cdots \\[2ex] \dfrac{22}{21} & 22 & \dfrac{82}{19} & \dfrac{82}{143} & \dfrac{26.19}{41} \cdots \\[2ex] \dfrac{42}{19} & \dfrac{9.67}{7.31} & \dfrac{33.179}{49.17} & \dfrac{51.23}{7^3} & \dfrac{49.73}{93.41} \cdots \end{cases}$$

Die Werte der b, c sind dann aus einer, die der b', c' aus derselben oder einer andern Verticalreihe zu entnehmen, dann für die übrigen

Werte von f die entsprechenden Tabellen zu construiren und mit ihnen ebenso zu verfahren. Die Versuchsrechnung kürzt sich einigermassen dadurch, dass man alle Wertsysteme verwerfen kann, bei denen nicht jeder einzelnstehende Primfactor des Zählers von $1+f^2$ in Zähler oder Nenner von $bb'cc'$ oder im Nenner von $(1-bb')(b+b') \times (1-cc')(c+c')$ enthalten ist.

Von den rationalen gleichschenkligen Dreikanten lässt sich verschiedene Anwendung auf die Tetraeder machen, indem man zum gemeinsamen Flächenwinkel einen der zwei gleichen oder den ungleichen wählt.

Ist der gemeinsame Flächenwinkel in beiden Ecken der ungleiche, so ist nach (20) die Bedingung zu erfüllen:

$$f = \frac{1-b^2}{1+b^2}\,\frac{2g}{1-g^2} = \frac{1-b'^2}{1+b'^2}\,\frac{2g'}{1-g'^2}$$

Diese Gleichung ist nicht allgemein löslich, doch bietet sich die besondere Lösung

$$b = b'; \quad g = g'$$

dar. Setzt man demgemäss in Gl. (25) $b = c = b' = c'$, so kommt:

$$l^2 = \left(\frac{2bf}{1-b^2}\right)^2 \frac{1}{1+f^2}$$

und man hat bloss $1+f^2$ zum Quadrat zu machen. Hiernach muss f die Form haben

$$f = \frac{2n}{1-n^2}$$

und die Bedingungsgleichung wird

$$\frac{n-g}{n+g}\,\frac{1+gn}{1-gn} = b^2$$

Es sind also 4 Zahlen zu finden, die in der reciproken Beziehung stehen:

$$\frac{1-\frac{g}{n}}{1+\frac{g}{n}} = \frac{g'}{n'}; \qquad \frac{1-gn}{1+gn} = g'n'$$

Sei zweitens der gemeinsame Flächenwinkel der ungleiche in der einen, der gleiche in der andern Ecke. Dann ist

$$f = \frac{1-b^2}{1+b^2}\,\frac{2g}{1-g^2}; \qquad c' = \frac{2b'}{1-b'^2}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}; \qquad c = b$$

und Gl. (25) ist nach Einsetzung der Werte von c, c' und f durch beliebige b, b', g zu erfüllen.

Nimmt man von beiden Ecken einen der gleichen Flächenwinkel zum gemeinsamen, so können die ungleichen Seitenwinkel beider Ecken noch entweder auf derselben oder auf verschiedener Seite liegen. Im erstern Falle ist

$$c = \frac{2b}{1-b^2}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}; \qquad c' = \frac{2b'}{1-b'^2}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}$$

im letztern

$$c = \frac{2b}{1-b^2}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}; \qquad b' = \frac{2c'}{1-c'^2}\,\frac{1-f^2}{1+f^2}$$

Es bleiben dann nach Einführung bzhw. b, b', f oder b, c', f beliebig.

Statt der gleichschenkligen Ecken kann man auch solche nehmen, in denen 2 Flächenwinkel sich zu 2 Rechten ergänzen. Hier gehen nur einige Grössen in die reciproken Werte über.

Ferner kann man eine gleichschenklige Ecke mit einer rationalen aus der Tabelle combiniren.

Zum Schluss wollen wir noch die einfachere Aufgabe betrachten, ein rationales Tetraeder von congruenten Seiten darzustellen. Da hier auch die Ecken congruent sind, so ist das Tetraeder rational, wenn eine Ecke es ist. Nun sind aber die Seitenwinkel jeder Ecke einzeln gleich den Winkeln jeder Seite, mithin an die Bedingung gebunden, dass ihre Summe = 2 Rechten sei. Geht man hiervon aus und bezeichnet durch α, β, γ die 3 Seitenwinkel, so wird der Cosinus des Gegenwinkels von α

$$= -\frac{\cos(\beta+\gamma)+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = 1-2\cot\beta\cot\gamma$$

also der Sinus

$$= 2\sqrt{\cot\beta\cot\gamma(1-\cot\beta\cot\gamma)} = \frac{2\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

Die Bedingung ist dann, dass $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ von der Form

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2b}{1-b^2}; \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2c}{1-c^2}$$

und dass $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1$ ein Quadrat sei; dies giebt die Gleichung:

$$(1-b^2)(1-c^2)(b+c+1-bc)(b+c-1+bc) = k^2 \qquad (27)$$

Die Aufsuchung der Lösungen wird durch folgende Bemerkung sehr abgekürzt. Der Nenner des reducirten Bruchs $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ muss als Quadrat alle Primfactoren, der Zähler, weil von der Form m^2+n^2, alle Primfactoren $4k-1$ in gerader Potenz enthalten; folglich müssen $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\gamma$ überhaupt dieselben Primfactoren $4k-1$ in ungerader

Potenz haben. Man teile also die Werte von $\operatorname{tg}\beta$, tabellarisch entwickelt, zuerst in Classen je nach den Primfactoren $4k-1$, ordne die unechten Brüche jeder Classe nach Umkehrung aller echten nach ihrer Grösse, und combinire innerhalb jeder Classe nur solche Brüche, dass im Nenner des Products auch die Primfactoren $4k+1$ in gerader Potenz erscheinen, wobei noch zu beachten, dass jeder Bruch mit den vorhergehenden und mit deren reciproken Werten zu combiniren, nie aber der grössere beider Brüche umzukehren ist, damit das Product >1 wird.

Bei einem Umfang der Tabelle, wo Zähler und Nenner von b die Zahl 20 nicht überschreiten, finden sich auf diesem Wege folgende 8 Lösungen:

(28)

$$\frac{15^2-2^2}{2.2.15}\,\frac{5^2-1}{2.5}-1=\left(\frac{14}{5}\right)^2; \quad \frac{10^2-3^2}{2.3.10}\,\frac{7^2-3^2}{2.3.7}\quad -=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{6^2-1}{2.6}\,\frac{7^2-3^2}{2.3.7}-1=\left(\frac{4}{3}\right)^2; \quad \frac{6^2-1}{2.6}\,\frac{10^2-7^2}{2.7.10}-1=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\frac{7^2-1}{2.7}\,\frac{6^2-1}{2.6}-1=3^2; \quad \frac{14^2-3^2}{2.3.14}\,\frac{11^2-3^2}{2.3.11}-1=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\frac{33^2-7^2}{2.7.33}\,\frac{16^2-5^2}{2.5.16}-1=\left(\frac{3}{2}\right)^2; \quad \frac{33^2-7^2}{2.7.33}\,\frac{7^2-4^2}{2.4.7}-1=\left(\frac{4}{7}\right)^2$$

Aus den hier aufgeführten Tangenten der Seitenwinkel kann man leicht Sinus und Cosinus derselben und dann den Sinus des dritten ableiten. Die 3 Sinus ergeben dann die Verhältnisszahlen der Kanten. So erhält man 8 rationale Tetraeder mit congruenten Seiten, deren 3 ungleiche Kanten sich (in gleicher Reihenfolge) verhalten wie die ganzen Zahlen

(29)

$$25.73:13^2.17:12.229; \qquad 51.61:91.29:20.109$$
$$15.13:7.29:4.37; \qquad 104.53:35.149:51.37$$
$$13.41:24.37:5^3.7; \qquad 75.29:143.17:56.41$$
$$17.29.277:520.281:231.569; \qquad 7.29.181:200.13^2:33.569$$

Durch Vertauschung der Kanten würden sich noch 16 Lösungen für Gl. (27) ergeben.

Die Ecken dieser 8 Tetraeder vermehren die in §. 1. aufgestellten rationalen Dreikante. Indem wir dieselben, wie dort, durch die Tangenten der halben Seiten- und Flächenwinkel a, b, c, f, g, h bestimmen, entnehmen wir die Werte von b und c aus den Gl. (28). Hier finden sich die Factoren des Minuends der linken Seite in der Form geschrieben

$$\frac{b'^2 - b''^2}{2b'b''} = \operatorname{tg}\beta$$

woraus dann fliesst:

$$b = \frac{b' - b''}{b' + b''}; \quad a = \frac{1 - bc}{b + c}$$

Aus a, b, c hat man dann nach (1) zu bilden A, B, C, D, und erhält nach (6) die Werte der f, g, h. So ergiebt sich die folgende Tabelle.

(30)

a	b	c	f	g	h
$\frac{25}{73}$	$\frac{13}{17}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{168}{229}$
$\frac{51}{61}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{14}{29}$	$\frac{40}{109}$
$\frac{25}{39}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{28}{29}$	$\frac{16}{37}$
$\frac{52}{53}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{17}$	4	$\frac{35}{149}$	$\frac{3}{37}$
$\frac{13}{41}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{21}{25}$
$\frac{15}{29}$	$\frac{11}{17}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{28}{41}$
$\frac{277}{17.29}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{240}{281}$	$\frac{693}{2.569}$
$\frac{181}{7.29}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{32}{65}$	$\frac{132}{569}$

Jedes dieser 8 Wertsysteme lässt sich als neue Grundlösung der Gl. (14) betrachten, und daraus nach den Formeln (17) u. f. unbegrenzte Mengen von Lösungen ableiten.

In den Tabellen (15) und (30) kommen die 3 Brüche

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{13}{41}$$

gemeinsam vor. Man kann daher die Vorbedingung der Aufgabe beliebige rationale Tetraeder darzustellen $f = f'$ auch dadurch erfüllen, dass man für f je einen der 3 Werte wählt und die b, c aus der einen, die b', c' aus der andern Tabelle entnimmt.

IV.

Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum Gebrauche für die Schule.

Von

F. W. Fischer.

Beim Unterrichte in der Trigonometrie scheint es nicht weniger belehrend als anregend zu sein, durch ausgeführte Messungen von Höhen, Entfernungen oder Flächen den Schülern die Anwendung der trigonometrischen Sätze in der Praxis zu zeigen. Das Verständniss und die klare Auffassung der betreffenden Sätze wird einerseits dadurch befestigt und belebt, andererseits aber wird der Schüler aufmerksam gemacht und darauf hingelenkt, wie die Resultate der Wissenschaft auch für das praktische Leben verwertet werden. Auch hat die Erklärung der Messinstrumente etwas Lehrreiches, was namentlich noch für den Unterricht in der Physik nicht zu unterschätzen ist.

Wenngleich jedoch der Nutzen solcher Messungen wol von den meisten anerkannt werden mag, unterbleibt doch deren Ausführung nicht selten, weil dem Lehrer keine geeigneten Apparate zur Verfügung stehen. Einfachere Messapparate sind in den Handlungen, welche mathematische und physikalische Instrumente führen, wenig anzutreffen und feinere für ein mittleres physikalisches Cabinet anzuschaffen, wäre in der Tat nicht zu billigen, da sie zu wenig zur Verwendung kommen können. Auch erfordern feinere Instrumente einige Umständlichkeit in der Behandlung, die oft nur wenige Zuhörer die eigentliche Einrichtung des Messapparates und die ganze Art der Messung überhaupt deutlich erkennen lässt. Dazu kommt, dass eine auch weniger genau, d. h. bis zu einer gewissen Fehlergrenze ausgeführte Messung, wenn dabei die Theorie derselben genau

und bestimmt erklärt werden kann, gewiss denselben Vorteil für den Zuhörer hat, als eine mit grosser Genauigkeit gemachte, welcher vielleicht eine nicht so deutliche theoretische Erklärung gegeben wird.

Im Folgenden möchte ich nun ein einfaches Instrument zur Messung von Winkeln, wie ich es vor einigen Jahren zu eigenem Gebrauche für den Unterricht angefertigt habe, vorführen, welches mir bei der Anstellung von Messungsversuchen ausreichende Dienste leistete.

Ein starker Dreifuss von Eichenholz trägt einen geraden, unten drehrunden, nach oben hin vierkantigen Ständer, welcher bis zu 5^{cm} dick und $1{,}11^{m}$ lang ist, so dass das ganze Gestell ungefähr eine Höhe von $1{,}42^{m}$ hat. Der obere Teil des Ständers von etwa 32^{cm} Länge ist um einen im unteren Teile befestigten Zapfen um seine Längsaxe drehbar und kann durch eine gegen den Zapfen wirkende (eiserne) Druckschraube, welche der Festigkeit wegen in einem um den Ständer gelegten etwa zwei Centimeter breiten, eisernen Bande geht, in jeder Stellung arretirt werden. Der obere Teil trägt weiter eine kreisrunde etwa 62^{cm} im Durchmesser haltende Scheibe von dickem Pappendeckel oder dünnem Holze, welche durch ein Charniergelenk so mit demselben verbunden ist, dass dieses, in der Mitte der Scheibe senkrecht zu dieser befestigt, in verticaler Ebene um jenen sich drehen und auch durch eine Druckschraube in jeder durch die Drehung möglichen Stellung gehalten werden kann. Figur 1) stellt eine Seitenansicht des ganzen Instrumentes dar, welche die Beschaffenheit desselben und die Zusammensetzung der einzelnen Teile erkennen lässt. Wenn der obere Teil des Instrumentes aus einander genommen ist, so gibt Figur 2) noch besonders die Seitenansicht eines verticalen Durchschnittes der Kreisscheibe und des damit fest verbundenen Gelenkes, so wie des oberen, eingeschnittenen Teiles des Ständers.

Bei der angegebenen Einrichtung kann die Ebene der Scheibe in die Horizontale und in jede beliebige Lage gegen die Horizontale gebracht werden. An dem Rande der Scheibe ist eine Einteilung von ganzen Graden gemacht und zwar ist bei senkrechter Stellung der Ebene der Scheibe die Linie, welche die beiden Nullpunkte verbindet, (möglichst) horizontal. Ueber dieser Teilung bewegt sich ein in der Mitte der Scheibe drehbar befestigter hölzerner Zeiger, welcher ein Diopter trägt und wegen der Reibung an seinem Drehpunkte sich auf jeden Teilstrich einstellen lässt. Der Zeiger ist aus zwei dünnen, auf einander geleimten Leistchen von trockenem Apfelbaumholz gefertigt, um ihm möglichst die Zugkraft des Holzes zu nehmen. Um eine genaue Einteilung des Randes der Scheibe zu erhalten, kann man denselben, nachdem er durch die Peripherie eines auf der Scheibe

verzeichneten, mit ihr concentrischen Kreises, genau markirt ist, zunächst in vier genau gleiche Teile und jeden derselben wieder in drei gleiche Teile einteilen. Einen solchen Bogen von 30^0 teilt man nun nochmals in drei gleiche Teile und trägt den erhaltenen Teil von 10^0 auf Zeichenpapier genau auf. Nachdem man nun diesen Bogenteil von 10^0 in zehn gleiche Teile geteilt hat, führt man diese Bogenteilung längs der Peripherie der Scheibe (oder des darauf verzeichneten, mit der Scheibe concentrischen Kreises) und markirt die einzelne Grade angebenden Teilstriche auf dem Rande. Die Teilung lässt sich bei einiger Uebung in dieser Weise ziemlich genau ausführen und macht es möglich, (wenn man den Fehler wegen der Excentricität des Drehpunktes des Zeigers eliminirt) einen Winkel bis auf 12 Minuten genau zu bestimmen. Will man eine genauere Bestimmung bis etwa auf 6 Minuten oder weniger, so lassen sich dafür füglich Nonien an dem Zeiger anbringen, die denn zugleich auch zur Erklärung der Vorrichtung des Nonius dienen könnten.

Um die horizontale Stellung des Zeigers und seine verticale Drehungsebene zu bestimmen, dient eine gewöhnliche kleine Bleilotwage, welche an dem Ständer des Instrumentes (s. d. Fig.) schicklich ihren Aufbewahrungsplatz finden kann.

Was die mittelst des beschriebenen Instrumentes, dessen Gebrauch und Anwendung für sich ersichtlich ist, zu erlangenden Resultate angeht, so sind dieselben für ihren Zweck hinreichend genau. Messungen, welche neben der Bestimmung einer Seite blos die eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck erfordern, wie die Messung der Höhe eines Gegenstandes, können, wenn man diesen Winkel in der Gegend von 40^0 bis 50^0 nimmt, wie man leicht sieht, keinen Fehler gleich 0,01 der gemessenen Seite ergeben, welcher in dem gemessenen Winkel allein seinen Grund hätte; da ja in diesem Falle die gefundenen Seiten proportional sind den Tangenten der Gegenwinkel, und diese Tangenten in der Gegend von 40^0 bis 50^0 von 12 zu 12 Minuten nur um ungefähr 0,007 wachsen. Um überhaupt die mögliche Genauigkeit von Messungen, bei welchen nicht allein die durch die Winkelmessung, sondern auch die aus den Längen gemessener Linien entstehenden Fehler berücksichtigt werden, näher zu betrachten, möge noch eine betreffende elementare Entwicklung hier Platz haben.

Es seien a, b, c die durch Messung gefundenen Seiten eines Dreiecks, A, B, C die denselben bezüglich gegenüberliegenden Winkel. Ferner seien Δa, Δb, Δc und ΔA, ΔB, ΔC Grössen, in welche die Seiten, bezüglich die Winkel sich verändern können und zwar so, dass von drei bestimmenden Stücken die drei übrigen abhängig sind. Letztere Grössen, welche selbstverständlich ihre Kleinheitsgrenze haben,

können denn die Werte angeben, um welche die gemessenen Stücke eines Dreiecks und die daraus gefundenen zu klein oder zu gross sind, jenachdem diese Grössen einen positiven oder negativen Wert haben. Die wahren Werte der Seiten des Dreiecks sind dann

$$a+\Delta a, \quad b+\Delta b, \quad c+\Delta c$$

und die der Winkel

$$A+\Delta A, \quad B+\Delta B, \quad C+\Delta C$$

und man hat, um aus der Aenderung dreier bestimmender Stücke die übrigen zu finden, in die trigonometrischen Formeln für die Auflösung eines Dreiecks statt obiger, letztere Werte einzusetzen. Unter Annahme gewisser Voraussetzungen, welche im Verfolge angegeben werden, lässt sich dann die Aenderung eines Stückes und das Verhältniss der Aenderung eines Linienstückes zu seinem ursprünglichen $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ aus gegebenen Stücken leicht elementar herleiten.

I. Gemessen sei von einem Dreieck eine Seite a und die beiden daranliegenden Winkel B, C; zu bestimmen $\frac{\Delta b}{b}$, $\frac{\Delta c}{c}$ und ΔA. Setzt man in die bekannte Formel $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$, für b, a, B, A an die Stelle die Werte $b+\Delta b$, $a+\Delta a$, $B+\Delta B$, $A+\Delta A$, so wird

$$\frac{b+\Delta b}{a+\Delta a}=\frac{\sin(B+\Delta B)}{\sin(A+\Delta A)}=\frac{\sin B.\cos\Delta B+\cos B.\sin\Delta B}{\sin A.\cos\Delta A+\cos A.\sin\Delta A}.$$

Wird nun angenommen, dass ΔA und auch $\Delta B \leqq 12'$ (wie es oben der Fall war), so ist

$$\cos\Delta B = 0{,}99999$$

oder (bis auf mehr als drei Decimalen genau)

$$\cos\Delta B = 1$$

und

$$\sin\Delta A$$

und ebenso

$$\sin\Delta B = 0{,}00349 = \operatorname{arc}\Delta B.$$

Hiernach wird nun, unter ΔA und ΔB die in Teilen des Radius $=1$ ausgedrückten, den Winkeln ΔA und ΔB zugehörigen Bogen verstanden,

$$\frac{b+\Delta b}{a+\Delta a}=\frac{\sin B+\cos B.\Delta B}{\sin A+\cos A.\Delta A}$$

oder

$$b.\sin A + b.\cos A.\Delta A + \sin A.\Delta b + \cos A.\Delta A\Delta.b$$
$$= a.\sin B + a.\cos B\Delta B + \sin B\Delta a + \cos B\Delta B.\Delta a.$$

Da die Grössen mit Δ die Grenzen angeben, unter welchen eine Grösse keinen Einfluss auf die Rechnung hat, so ist das Product zweier solcher Grössen für dieselbe ohne Einfluss und es kann daher $\cos A.\Delta A.\Delta b$ und $\cos B.\Delta B.\Delta a$ wegbleiben. Dann ist, weil noch

$$b.\sin A = a.\sin B,$$

$$(\mathfrak{A})\quad b.\cos A.\Delta A + \sin A\Delta b = a.\cos B\Delta B + \sin B\Delta a$$

und, wenn man die letzte Gleichung durch die vorletzte dividirt,

$$\operatorname{cotg} A\Delta A + \frac{\Delta b}{b} = \operatorname{cotg} B\Delta B + \frac{\Delta a}{a};$$

also

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \operatorname{cotg} B.\Delta B - \operatorname{cotg} A.\Delta A.$$

Da noch

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = 0$$

oder

$$\Delta A = -\Delta B - \Delta C,$$

so wird

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \operatorname{cotg} B\Delta B + \operatorname{cotg} A\Delta B + \operatorname{cotg} A\Delta C$$

oder

$$1)\quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + [\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg}(B+C)]\Delta B - \operatorname{cotg}(B+C)\Delta C.$$

Aehnlich findet sich

$$2)\quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + [\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg}(B+C)]\Delta C - \operatorname{cotg}(B+C)\Delta B$$

und für ΔA hat man noch

$$3)\quad \Delta A = -(\Delta B + \Delta C).$$

Für den Fall, dass gegeben ist $C = \frac{\pi}{2}$, wird $\Delta C = 0$ und daher aus Gl. 1)

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \left[\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg}\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\right]\Delta B$$

oder

$$4)\quad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{2\Delta B}{\sin 2B}.$$

Ebenso ist für diesen Fall aus Gl. 2)

$$5)\quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \operatorname{tng} B.\Delta B.$$

Zu bemerken ist noch, dass in Gl. 4) $\frac{\Delta b}{b}$ ein Minimum wird, wenn $\sin 2B$ ein Maximum, d. h. wenn $B = \frac{\pi}{4}$ ist.

II. Von einem Dreieck seien gemessen zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A; zu bestimmen $\frac{\Delta a}{a}$, ΔB und ΔC. Setzt man in die Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, für a, $a + \Delta a$, für b, $b + \Delta b$ u. s. w., so wird

$$(a + \Delta a)^2 = (b + \Delta b)^2 + (c + \Delta c)^2 - 2(b + \Delta b)(c + \Delta c).\cos(A + \Delta \mathrm{A}).$$

Wenn man die einzelnen Glieder dieser Gleichung entwickelt und das vorhin über die Grössen mit Δ Bemerkte berücksichtigt, erhält man nach gehöriger Reduction

$$(8)\quad a\Delta a = b\Delta b + c\Delta c + bc\sin A\Delta A - bc\cos A\Delta c - c\cos A\Delta b$$

und daher

$$6)\begin{cases} \alpha.\ \dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{bc\sin A\Delta A + (b - c\cos A)\Delta b + (c - b\cos A)\Delta c}{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}. \\ \text{Ebenso findet sich, wenn } a,\ c \text{ und } B \text{ gemessen sind,} \\ \beta.\ \dfrac{\Delta b}{b} = \dfrac{ac\sin B\Delta B + (a - c\cos B)\Delta a + (c - a\cos B)\Delta c}{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} \\ \text{und, wenn } a,\ b \text{ und } C \text{ gemessen sind,} \\ \gamma.\ \dfrac{\Delta c}{c} = \dfrac{ab\sin C\Delta C + (a - b\cos C)\Delta a + (b - a\cos C)\Delta b}{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}. \end{cases}$$

Um weiter ΔB zu bestimmen, erhält man aus Gl. 6) β.

$$\Delta B = \frac{b\Delta b - (a - c.\cos B)\Delta a - (c - a.\cos B)\Delta c}{ac.\sin B}$$

und, da

$$a = b.\cos C + c.\cos B$$

und

$$c = b.\cos A + a\cos B$$

ist,

$$7)\quad \Delta B = \frac{b\Delta b - b\cos C\Delta a - b\cos A\Delta c}{ac\sin B}.$$

Ebenso ergibt sich aus Gl. 6) γ.)

$$8)\quad \Delta C = \frac{c\Delta c - c\cos C\Delta a - c\cos A\Delta b}{ab\sin C}.$$

III. Von einem Dreieck seien gemessen zwei Seiten b und c und einer der Gegenwinkel B; man soll bestimmen $\frac{\Delta a}{a}$, ΔA und ΔC.

Nach Gl. 7) ist

$$ac \sin B \Delta B = b \Delta b - b \cos C \Delta a - b \cos A \Delta c,$$

also

$$9) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{b \Delta b - b \cos A \Delta c - ac \sin B \Delta B}{ab \cos C}.$$

Ferner ergibt sich nach einiger Umrechnung aus Gl. (𝔅)

$$10) \begin{cases} \alpha. \quad \Delta A = \dfrac{a \Delta a - a \cos C \Delta b - a \cos B \Delta c}{bc \sin A} \\ \text{oder aus Gl. (𝔄)} \\ \beta. \quad \Delta A = \dfrac{a \cos B \Delta B + \sin B \Delta a - \sin A \Delta b}{b \cdot \cos A}. \end{cases}$$

Nach Gl. 8) ist ferner

$$11) \begin{cases} \alpha. \quad \Delta C = \dfrac{c \Delta c - c \cos C \Delta a - c \cos A \Delta b}{ab \sin C} \\ \text{oder aus Gl. (𝔄), wenn man darin die Buchstaben } a \text{ und } A \text{ mit } c \text{ und } C \text{ vertauscht,} \\ \beta. \quad \Delta C = \dfrac{c \cos B \Delta B + \sin B \Delta c - \sin C \Delta b}{b \cos C}. \end{cases}$$

IV. Von einem Dreieck seien gemessen die drei Seiten a, b, c; man soll bestimmen ΔA, ΔB, ΔC.

Es ist nach Gl. 10) α.

$$\Delta A = \frac{a \Delta a - a \cos C \Delta b - a \cos B \Delta c}{bc \sin A}$$

$$\Delta A = \frac{a \Delta a - a \cdot \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Delta b - a \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Delta c}{bc \sin A}$$

$$\Delta A = \frac{2abc \Delta a - (a^2 + b^2 - c^2) c \Delta b - (a^2 + c^2 - b^2) b \Delta c}{2b^2 c^2 \sin A}$$

oder, da

$$\sin A = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{bc},$$

wo

$$S = \frac{a + b + c}{2},$$

$$12)\quad \Delta A = \frac{2abc\,\Delta a - (a^2+b^2-c^2)\,c\,\Delta b - (a^2+c^2-b^2)\,b\,\Delta c}{4bc\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}.$$

Eben so findet sich

$$13)\quad \Delta B = \frac{2abc\,\Delta b - (a^2+b^2-c^2)\,c\,\Delta a - (b^2+c^2-a^2)\,a\,\Delta c}{4ac\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

und

$$14)\quad \Delta C = \frac{2abc\,\Delta c - (a^2+c^2-b^2)\,b\,\Delta a - (b^2+c^2-a^2)\,a\,\Delta b}{4ab\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}.$$

Ein Beispiel einer gewöhnlich vorkommenden Messung möchte ich noch beifügen.

Zur Bestimmung der Höhe b eines Turmes sei vom Fusse desselben bis zu dem Punkte, wo das Winkelmessinstrument aufgestellt ist, eine horizontale Standlinie $a = 42{,}3^m$ und der Winkel B, welchen diese Linie mit der Visirlinie nach der Spitze des Turmes bildet, gleich $48^0\,15'$ gemessen. Ferner möge die Linie a um $0{,}08^m$ und der Winkel B um $12'$ fehlerhaft gemessen sein. Nehmen wir nun an, dass die Linie a zu gross, hingegen der Winkel B zu klein gemessen sei, so ist

$$\Delta a = -0{,}08^m$$

und, da einem Winkel von $12'$ ein Bogen von 0,0034907 entspricht,

$$\Delta B = 0{,}0034907.$$

Wenn wir diese Werte und die für a und B in Gl. 4) einsetzen, wird

$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{0{,}08}{42{,}3} + \frac{0{,}0069813}{\sin 96^0\,30'}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = -0{,}0018913 + 0{,}0070264$$

$$\frac{\Delta b}{b} = 0{,}0051351.$$

Es wäre also der Fehler der Messung ungefähr 0,005 der Höhe des Turmes. Um den Wert Δb selbst zu finden, hat man noch b zu bestimmen.

Es ist aber

$$b = 42{,}3 \,.\, \text{tng}\, 48^0\,15',$$

woraus

$$b = 47{,}393.$$

Demnach ist

$$\Delta b = 47{,}393^m \,.\, 0{,}005$$

$$\Delta b = 0{,}236965^m$$

oder ungefähr

$$\Delta b = 0{,}24^{m}.$$

Die Höhe des Turmes ist also in diesem Falle um 24^{cm} zu klein gemessen und der Fehler nicht beträchtlich.

Wären die Linie a und auch B beide zu gross gemessen, so hätte man

$$\Delta a = -0{,}08^{m}$$

$$\Delta B = -0{,}0034907.$$

Alsdann wäre

$$\frac{\Delta b}{b} = -0{,}0018913 - 0{,}0070264$$

$$\frac{\Delta b}{b} = -0{,}0089177$$

oder ungefähr

$$\frac{\Delta b}{b} = -0{,}009.$$

Wären die Linien a und auch B beide zu klein gemessen, so wäre

$$\Delta a = 0{,}08^{m}$$

$$\Delta B = 0{,}0034907$$

und daher

$$\frac{\Delta b}{b} = 0{,}009.$$

Wäre endlich die Linie a zu klein, aber b zu gross, so wäre

$$\Delta a = 0{,}08^{m}$$

$$\Delta B = -0{,}0034907$$

und es würde sich ergeben

$$\frac{\Delta b}{b} = -0{,}005.$$

In vorstehendem Beispiele würde also oben beschriebenes Instrument zur Messung von Winkeln ausreichende Genauigkeit für den Unterricht ergeben, schon bei der Annahme, dass selbiges Winkel bis auf 12′ genau gibt.

Kempen a. Rh. den 10. Jan. 1876.

V.

Beschreibung eines Modells für den ersten Unterricht in der Goniometrie.

Von

F. Hoza,

Professor in Königgräz.

(Hiezu Abbild. auf Taf. II).

Um jene Veränderungen, welche die goniometrischen Functionen erleiden, wenn der Winkel alle Werte von 0^0 bis 360^0 stetig durchläuft, anschaulich darzustellen, habe ich eine auf Taf. II. abgebildete Vorrichtung construirt und hoffe, dass nachfolgende kurze Beschreibung derselben manche Mathematiklehrer interessiren werde.

Die Abbildung habe ich so detaillirt, dass eine Reproduction des Modells sehr leicht sein wird. Möge es recht bald Eingang finden überall, wo Anfangsgründe der Goniometrie gelehrt werden.

Auf einer kreisrunden, hölzernen Scheibe H ist Zeichenpapier aufgespannt, auf dem die nötigen Grundlinien gezeichnet sind und zwar ein Kreis K, dessen Halbmesser gleich ist 1^{dm}, zwei aufeinander senkrechte Coordinatenaxen X, Y und zwei Tangenten A, B, die den Kreis in den Punkten a, b berühren. Jede dieser Geraden besteht aus einer positiven (+) und einer negativen (—) Hälfte, erstere ist rot und letztere blau ausgezogen. Auch sind sie in Centimeter geteilt, die von den Punkten o, a, b aus in positiver und negativer Richtung gezählt werden.

Die Scheibe H ist am Rande mit einer Gradteilung versehen und in der Mitte durchbohrt. Der Bolzen o, der rückwärts in eine

auf der Scheibe befestigte Platte p fest eingeschraubt ist, dient als Drehaxe dem Lineal C, dessen eine Kante genau im Durchmesser des Kreises K liegt und denselben in einem Punkte trifft, in welchem das Kreuz D, E mittelst eines Schräubchens c, dessen Mutter in C liegt, aufgehängt ist.

Das Lineal C umfasst auf einer Seite den Rand der Scheibe H und wird an denselben mit einer Druckschraube d gepresst, so dass es in jeder Lage befestigt werden kann.

Sowohl das Lineal C, als auch die beiden Axen D, E sind am positiven Teil rot, am negativen blau lackirt und mit Centimeterteilung versehen. Die positiven Richtungen von D, E stimmen mit den negativen von Y, X überein.

Der linke Rand von D, der obere von E und untere von C treffen einander genau auf der Kreislinie K.

Um den Arm D stets parallel zu Y zu erhalten, ist an seinem unteren Ende eine Metallscheibe F mittelst des Schräubchens e excentrisch befestigt und kann um e etwas nach rechts oder links gedreht werden, wodurch ihr Schwerpunkt so verlegt wird, dass der Arm D die gewünschte Richtung annimmt.

Da das Kreuz D, E in jeder Lage um etwas mehr als die Dicke des Lineals C von der Oberfläche H absteht, wird der vollkommen freien Umdrehung des ganzen Systems C, D, E, F nichts im Wege stehen, wobei D stets zu X parallel verbleibt.

Um etwaigen Veränderungen der Scheibe H in Folge von Temperaturverhältnissen zu begegnen, sind rückwärts zwei starke Leisten L angebracht, wovon die untere mittelst zweier Holzschrauben m an die Ständer M angeschraubt wird. Diese Ständer sind in eine Platte N eingezapft, die wieder mittelst dreier Füsschen n am Tische aufliegt.

Statt hölzerner Füsschen können Stellschrauben angebracht werden, mittelst welchen die Scheibe H vertical gestellt werden könnte. Bleibt das Lineal C in einer gewissen Lage stehen, so kann man am Rande der Scheibe H den Winkel (XC) ablesen. Der Arm D zeigt hernach an seiner Teilung von c bis X den Sinus dieses Winkels sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach. Ebenso kann man am Arme E den Cosinus ablesen (von c bis Y). Die Tangente wird auf A, die Cotangente auf B gemessen. Das Lineal C zeigt die Secante und Cosecante jenes Winkels.

Besonders gut lassen sich die Zeichenwechsel der einzelnen Functionen beim Uebergange von C aus einen Quadranten in den nächstfolgenden darstellen. Auch kann sehr leicht wenigstens angenähert zu einer gegebenen Function der zugehörige Winkel gefunden werden.

Jeder, der einmal in der Lage war, Anfängern die ersten Sätze der Goniometrie beizubringen, wird einsehen, wie notwendig eine solche Vorrichtung ist, um vollständige Klarheit in die Grundvorstellungen zu bringen.

VI.

Miscellen.

1.

Zu einem Satze von Steiner.

In dem von Herrn Dr. Geiser herausgegebenen ersten Teile der Vorlesungen Steiner's über synthetische Geometrie findet sich im § 12. p. 65 der interessante Satz: „Beschreibt man durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte jeder Seite eines der Ellipse umschriebenen Parallelogrammes Kreise, so haben diese vier Kreise gleiche Radien". Hierzu ist ergänzend zu bemerken: die Mittelpunkte dieser vier Kreise liegen auf einem fünften Kreise, dessen Radius denen der vier anderen gleich und dessen Centrum der benutzte Brennpunkt ist.

Meutzner.

2.

Relation zwischen Orthogonalcoefficientensystemen.

Bekanntlich lässt sich ein rechtwinkliges Axensystem bei festem Anfangspunkt durch einfache Rotation um eine, dadurch völlig bestimmte Axe in jede beliebige Stellung bringen. Wir nehmen nun 3 Coordinatensysteme der XYZ, der xyz und der $x'y'z'$ an. Die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf diese mögen in der Relation stehen:

$$X = ax + by + cz = a'x' + b'y' + c'z'$$
$$Y = a_1x + b_1y + c_1z = a_1'x' + b_1'y' + c_1'z'$$
$$Z = a_2x + b_2y + c_2z = a_2'x' + b_2'y' + c_2'z'$$

Liegt dann der Punkt (XYZ) auf der Axe derjenigen Rotation, welche das System der xyz in das System der $x'y'z'$ überführt, so ist

$$x = x'; \qquad y = y'; \qquad z = z'$$

daher

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c')z = 0$$
$$(a_1 - a_1')x + (b_1 - b_1')y + (c_1 - c_1')z = 0$$
$$(a_2 - a_2')x + (b_2 - b_2')y + (c_2 - c_2')z = 0$$

und nach Elimination von x, y, z

$$\begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ a_1 - a_1' & b_1 - b_1' & c_1 - c_1' \\ a_2 - a_2' & b_2 - b_2' & c_2 - c_2' \end{vmatrix} = 0$$

Die letzte Relation gilt, weil sie von der Annahme über den Punkt (xyz) unabhängig ist, von je 2 beliebigen Orthogonalcoefficientensystemen. Speciell folgt daraus, wenn man die $x'y'z'$ mit den XYZ zusammenfallen lässt, so dass $a' = b_1' = c_2' = 1$, die übrigen Coefficienten null werden:

$$\begin{vmatrix} a - 1 & b & c \\ a_1 & b_1 - 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Auf gleiche Weise kann man offenbar aus der allgemeinen Formel eine beliebige Menge anderer Relationen gewinnen, die zwischen den Orthogonalcoefficienten jedes einzelnen Systems bestehen.

R. Hoppe.

Fig. 1.

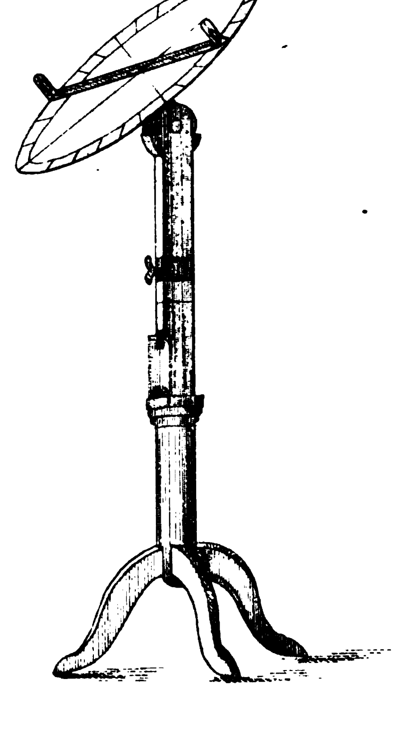
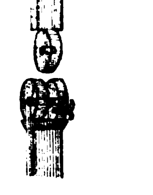


Fig. 2.



V. Fischer: Winkelmessinstrument.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.

Aufriss.

V. Hoza: Modell für Unterricht in der Goniometrie.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechszigster Teil. Zweites Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1877.

VII.

Geometrische Veranschaulichung des binomischen Satzes.

Von

Herrn **Koppe**,
ordentl. Lehrer an der Andreas-Realschule in Berlin.

Das Folgende ist eine weitere Ausführung einer von Prof. Schellbach im 17. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten elementaren Entwicklung der einfachsten transcendenten Functionen.

In einen Kreis vom Radius 1 trage man vom Punkte P aus λ Sehnen PA_1, A_1B_1, B_1C_1, ... K_1L_1 von gleicher Länge s ein. Dieselben bilden eine gebrochene Linie t_1, deren Winkelpunkte man durch Radien mit dem Mittelpunkte O verbinde. Aus der so entstandeneh Reihe gleichschenkliger Dreiecke leite man durch folgende Construction eine zweite ab. Man verlängere B_1A_1 über A_1 um A_1P bis B_2, C_1B_1 über B_1 um B_1B_2 bis C_2, D_1C_1 über C_1 um C_1C_2 bis D_2 u. s. w. und verbinde die Punkte P, B_2, C_2, D_2 ... L_2 durch eine gebrochene Linie t_2 mit einander. Eine dritte Reihe gleichschenkliger Dreiecke ergiebt sich, wenn man C_2B_2 über B_2 um B_2P bis C_3, D_2C_2 über C_2 um C_2C_3 bis D_3, E_2D_2 über D_2 um D_2D_3 bis E_3 verlängert u. s. w. und die Punkte P, C_3, D_3, E_3 ... L_3 durch eine gebrochene Linie t_3 verbindet. Eine vierte Reihe erfüllt den Raum zwischen t_3 und der gebrochenen Linie $PD_4E_4 \ldots L_4 = t_4$. Die Anzahl der geradlinigen Stücke, aus denen die gebrochenen Linien t zusammengesetzt sind, vermindert sich um je eine Einheit, so dass die letzte, t_λ, aus nur einer Strecke, PL_λ, besteht.

Nach der Construction ist:

$$L_1L_2 = L_1K_1 \ldots B_1A_1P = t_1$$
$$L_2L_3 = L_2K_2 \ldots B_2A_2P = t_2$$
$$\vdots$$

Beachtet man ausserdem, dass alle in der Figur vorkommenden gleichschenkligen Dreiecke einander ähnlich sind, folglich in jedem die Basis das s-fache des Schenkels beträgt, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken für die Länge der t. Es ist:

$$t_1 = \lambda s$$

woraus:

$$A_1P = s, \quad B_1B_2 = 2s, \quad C_1C_2 = 3s, \ \ldots$$

Ferner:

$$\begin{aligned} t_2 &= PB_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + \ldots + K_2L_2 \\ &= s(A_1P + B_1B_2 + C_1C_2 + \ldots + K_1K_2) \\ &= s(s + 2s + 3s + \ldots + (\lambda - 1)s) \\ &= \frac{(\lambda-1)\lambda}{1.2} s^2 \end{aligned}$$

woraus

$$B_2P = s^2, \quad C_2C_3 = \frac{2.3}{1.2} s^2, \quad D_2D_3 = \frac{3.4}{1.2} s^2, \ldots$$

Mit Benutzung dieser Werte:

$$\begin{aligned} t_3 &= PC_3 + C_3D_3 + D_3E_3 + \ldots + K_3L_3 \\ &= s(B_2P + C_2C_3 + D_2D_3 + \ldots + K_2K_3) \\ &= s\left(\frac{1.2}{1.2}s^2 + \frac{2.3}{1.2}s^2 + \frac{3.4}{1.2}s^2 + \ldots + \frac{(\lambda-2)(\lambda-1)}{1.2}s^2\right) \\ &= \frac{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}{1.2.3} s^3 \end{aligned}$$

Demnach ist:

$$C_3P = s^3, \quad D_3D_4 = \frac{2.3.4}{1.2.3} s^3, \quad E_3E_4 = \frac{3.4.5}{1.2.3} s^3, \ldots$$

Ebenso würde:

$$t_4 = \frac{(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}{1.2.3.4} s^4$$

u. s. w.

Die Punkte O und P sind, ausser durch die Grade OP, noch durch folgende Reihe gebrochener Linien mit einander verbunden:

$$OA_1P = u_1$$
$$OB_1B_2P = u_2$$
$$OC_1C_2C_3P = u_3$$
$$\vdots$$
$$OL_1L_2 \ldots L\lambda P = u\lambda$$

Die einzelnen geradlinigen Teile derselben bilden mit einander Winkel, die unter sich gleich und zwar gleich dem Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke sind. Es ist:

$$u_1 = OA_1 + A_1P = 1 + s$$
$$u_2 = OB_1 + B_1B_2 + B_2P = 1 + 2s + s^2$$
$$u_3 = OC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3P$$
$$= 1 + \frac{3}{1}s + \frac{2.3}{1.2}s^2 + \frac{1.2.3}{1.2.3}s^3$$

und allgemein:

$$u_\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}s^2 + \ldots + s^\lambda$$

Einen Ausdruck von anderer Form erhält man folgendermassen. Man ordne einem jeden Punkte Q des Radius OP je einen Punkt auf u_1, u_2, u_3 ... u_λ zu, und zwar so, dass, wenn man diese Punkte mit A, B, C ... L bezeichnet, die gebrochene Linie $v = QABC \ldots L$ innerhalb eines jeden gleichschenkligen Dreiecks der Halbirungslinie desjenigen seiner Winkel parallel ist, dessen Scheitelpunkt der vom Punkte P abgewandte Endpunkt der Basis ist. Bei unserer Bezeichnung ist dies der nach alphabetischer Reihenfolge spätere der beiden Endpunkte. Wird der Schenkel C_1C_2 von der Halbirungslinie des Winkels $C_1D_2C_2$ in c_2 geschnitten, so soll also $DC \parallel D_2c_2$ sein. Dem Punkte Q liege ein Punkt Q' auf OP so nahe, dass, wenn A', B', ... L' die ihm zugeordneten Punkte sind, zwischen C und C' kein Winkelpunkt von u_3, zwischen D und D' keiner von u_4 enthalten sei. Dann ist:

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{D_2C_1}{c_2C_1}$$

und da $\frac{D_2C_1}{c_2C_1} = \frac{D_2C_2}{c_2C_2}$:

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{D_2C_1 + D_2C_2}{C_1C_2} = 1 + s$$

Diese Relation bleibt richtig, wenn die Punkte Q und Q' weiter von einander entfernt sind als eben vorausgesetzt wurde. Denn man kann stets zwischen Q und Q' eine Reihe von Punkten so einschalten, dass die von letzteren ausgehenden gebrochenen Linien v sowohl CC' als DD' in geradlinige Strecken zerlegen. Dann ist jeder Teil von DD' das $(1+s)$-fache des entsprechenden von CC', demnach allgemein:

$$\frac{DD'}{CC'} = 1 + s$$

Ebenso:

$$\frac{CC'}{BB'} = 1 + s, \quad \frac{BB'}{AA'} = 1 + s, \quad \frac{AA'}{QQ'} = 1 + s$$

folglich:

$$\frac{DD'}{QQ'} = (1+s)^4$$

und allgemein:

$$\frac{LL'}{QQ'} = (1+s)^\lambda$$

Lässt man Q' mit O, Q mit P zusammenfallen, so fallen die dem Punkte Q' resp. Q zugeordneten Punkte ebenfalls sämmtlich in den Punkt O resp. P, so dass sich

$$u_\lambda = (1+s)^\lambda$$

ergiebt. Man gelangt zu diesem Endresultat einfacher, indem man nachweist, dass in der Reihe OP, u_1, u_2, u_3, ... jedes Glied das $(1+s)$-fache des voranstehenden ist. Man kann z. B. u_2 dadurch in u_3 verwandeln, dass man statt der geraden Strecken, OB_1, B_1B_2, B_2P, aus denen u_2 besteht, die gebrochenen OC_1B_1, $B_1C_2B_2$, B_2C_3P, also statt je eines Schenkels die Summe aus Schenkel und Basis eines gleichschenkligen Dreiecks setzt, wodurch jedes Glied $(1+s)$-mal vergrössert wird.

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für u_λ giebt den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten:

$$(1+s)^\lambda = 1+\frac{\lambda}{1}s+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}s^2+\ldots+s^\lambda$$

Denselben Satz für ganzzahlige negative Exponenten erhält man durch Betrachtung einer andern Reihe vom Punkte O ausgehender gebrochener Linien. Das Netz gleichschenkliger Dreiecke werde dadurch erweitert, dass man an Stelle von λ die Zahlen $\lambda+1$, $\lambda+2$, ... setzt. Die Linien:

$$U_1 = OA_1B_2C_3 \ldots$$
$$U_2 = OB_1C_2D_3 \ldots$$
$$U_3 = OC_1D_2E_3 \ldots$$
$$\vdots$$

bestehen aus unendlich vielen geradlinigen Strecken, die mit einander einen constanten Winkel bilden, der gleich dem Complemente des Basiswinkels ist. Die Länge der einzelnen Strecken ergiebt sich aus den obigen Ausdrücken für die Länge der Linien t. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} U_3 &= OC_1+C_1D_2+D_2E_3+E_3F_4+\ldots. \\ &= OB_1+C_1C_2+D_2D_3+E_3E_4+\ldots \\ &= 1+\frac{3}{1}s+\frac{3.4}{1.2}s^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}s^3+\ldots \end{aligned}$$

und allgemein:

$$U\lambda = OL_1 + L_1M_2 + M_2N_3 + \dots$$
$$= 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}s^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3}s^3 + \dots$$

Hiernach bilden, wenn $s \geqq 1$, die Strecken OL_1, L_1M_2, M_2N_3, ... eine Reihe zunehmender Grössen, so dass ihre Summe $= \infty$ ist. Ist dagegen $s < 1$, so werden dieselben Strecken unendlich klein. Dass in letzterem Falle die Linie $U\lambda$ von endlicher Länge ist, die obige Reihe also convergirt, lässt sich geometrisch zeigen, indem man die Summe einer beliebig grossen endlichen Anzahl ihrer Glieder bestimmt.

Man ziehe von einem beliebigen Punkte q des Radius OP eine gebrochene Linie V, die innerhalb jedes einzelnen gleichschenkligen Dreiecks geradlinig und zwar zu der Halbirungslinie desjenigen seiner Winkel senkrecht ist, dessen Scheitelpunkt der dem Punkte P zugewandte Endpunkt der Basis ist. Diese Linie schneidet, wenn $s < 1$, die sämmtlichen Linien U_1, U_2, ... der Reihe nach. Nehmen wir an, sie habe sich bis zu einem Punkte a auf U_1 fortsetzen lassen. Der von U_1 und U_2 begrenzte Teil der Ebene wird durch die Geraden A_1B_1, B_2C_2, C_3D_3 ... in eine Reihe gleichschenkliger Dreiecke zerlegt. Trägt man auf C_3C_2 die Strecke $C_3d_3 = C_3D_3$, auf D_4D_3 die Strecke $D_4e_4 = D_4E_4$, auf E_5E_4 die Strecke $F_5f_5 = E_5F_5$ ab und zieht d_3D_3, e_4E_4, f_5F_5, so geben diese Linien die Richtungen an, welche V innerhalb der Dreiecke $C_2C_3D_3$, $D_3D_4E_4$, $E_4E_5F_5$ haben soll. Ist daher $C_3a > C_3D_3$, so schneidet die Linie V, indem sie das Dreieck $C_2C_3D_3$ verlässt, die Linie U_2 auf der Strecke C_2D_3. Ist dagegen $C_3a < C_3D_3$, so tritt die Linie V durch den Punkt γ der Basis dieses Dreiecks in das nächste der den Raum zwischen U_1 und U_2 erfüllenden Dreiecke ein. Ist nun $D_4\gamma < D_4E_4$, so überschreitet V jetzt die Linie U_2, wenn nicht, so tritt sie im Punkte δ in das nächste Dreieck, $E_4E_5F_5$, ein, und überschreitet endlich, dieses Dreieck verlassend, im Punkte b die Linie U_2, wenn wir $E_5\delta > E_5F_5$ voraussetzen. Dass schliesslich einmal die erforderliche Ungleichheit erfüllt sein wird, folgt daraus, dass die Strecken

$$C_3a, \quad D_4\gamma = D_4C_3a, \quad E_5\delta = E_5D_4C_3a, \dots$$

eine Reihe zunehmender Grössen bilden, dagegen

$$C_3D_3 = s.C_2D_3, \quad D_4E_4 = s.D_3E_4, \quad E_5F_5 = s.E_4F_5$$

nach dem Obigen zu unendlich kleinen Werten abnehmen.

Bewegt sich der Punkt q auf OP nach O, so bewegen sich auch die ihm zugeordneten Punkte a, b, ... l auf u_1, u_2, ... $u\lambda$ nach dem-

selben Punkte hin. Nähert sich q dem Punkte P, so entfernen sich auch die zugeordneten Punkte immer weiter von O.

Dem Punkte q liege auf OP ein Punkt q' so nahe, dass, wenn durch die in ihm beginnende Linie V' ihm die Punkte a' auf U_1 und b' auf U_2 zugeordnet werden, aa' sowohl als bb' geradlinige Teile von U_1 und U_2 sind. Dann ist:

$$\frac{bb'}{\delta\delta'} = \frac{E_4F_5}{E_4f_5} = \frac{E_4F_5}{E_4E_5 - E_5F_5} = \frac{1}{1-s}$$

und, da $\delta\delta' = \gamma\gamma' = aa'$:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{1}{1-s}$$

Sind q und q' weiter von einander entfernt, so bleibt diese Relation richtig, denn sie gilt dann für die Teilstrecken, in welche aa' und bb' durch diejenigen Linien V zerlegt werden, welche durch die den Strecken aa' und bb' angehörenden Winkelpunkte hindurchgehen.

Ebenso ist:

$$\frac{aa'}{qq'} = \frac{1}{1-s}$$

daher:

$$\frac{bb'}{qq'} = \frac{1}{(1-s)^2}$$

und allgemein:

$$\frac{ll'}{qq'} = (1-s)^{-\lambda}$$

Verlegt man den Punkt q' in den Punkt O, so wird hieraus:

$$\frac{Ol}{Oq} = (1-s)^{-\lambda}$$

Versteht man unter l einen der Winkelpunkte $L_1, M_2, N_3, \ldots$, so ist $Ol = Oq(1-s)^{-\lambda}$ die Summe von 1, resp. 2, 3 ... Gliedern der Reihe $U\lambda$. Je grösser die Anzahl der summirten Glieder ist, desto näher rückt q dem Punkte P, so dass schliesslich

$$U\lambda = (1-s)^{-\lambda}$$

wird. Die Vergleichung mit dem ersten Ausdruck giebt:

$$(1-s)^{-\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1}s + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}s^2 + \ldots$$

Lässt man λ unendlich gross werden und gleichzeitig s abnehmen, so dass der Bogen PL_1 einen constanten Wert φ behält, den wir als rational voraussetzen wollen, so kann man die Sehne s gleich dem

zugehörigen Bogen $\frac{\varphi}{\lambda}$ setzen. Gleichzeitig werden die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke $=\frac{\pi}{2}$, und demselben Werte nähern sich die Winkel, welche zwei aufeinanderfolgende Linien aus der Reihe $t_1, t_2, t_3, \ldots$ im Punkte P mit einander bilden. Die gebrochene Linie t_1 geht in den Kreisbogen OL_1, t_2 in die Evolvente desselben über. Wickelt man letztere vom Punkte P aus ab, so erhält man die Curve, der sich t_3 nähert, so dass die Reihe der gebrochenen Linien t in die Reihe der successiven Evolventen des Kreisbogens übergeht. Die gebrochenen Linien $u\lambda$ und $U\lambda$ fallen in eine einzige aus unendlich vielen geraden Strecken bestehende rechtwinklige Spirale

$$u = OL_1L_2L_3 \ldots$$

zusammen. Von je zwei in einem Winkelpunkte zusammenstossenden Teilen derselben ist jedesmal der frühere Normale, der spätere Tangente derjenigen Evolvente, auf der dieser Winkelpunkt liegt.

Setzt man in den obigen Ausdrücken für $t_1, t_2, \ldots$ an Stelle von s den Wert $\frac{\varphi}{\lambda}$, so ergeben dieselben für $\lambda = \infty$:

$$L_1P = L_1L_2 = \varphi$$
$$L_2P = L_2L_3 = \frac{\varphi^2}{1.2}$$
$$L_3P = L_3L_4 = \frac{\varphi^3}{1.2.3}$$
$$\vdots$$

Die beiden von einem Punkte Q ausgehenden gebrochenen Linien v und V gehen in eine einzige Curve v über, deren Verlauf dadurch bestimmt ist, dass sie innerhalb des Kreises die Radien desselben, zwischen dem Kreise und seiner ersten Evolvente die Normalen der letzteren, überhaupt in dem Zwischenraum zwischen zwei Evolventen die Normalen der äussern oder Tangenten der innern unter einem Winkel von 45° schneidet. In den Punkten, wo die Curve v den Kreis oder eine Evolvente desselben überschreitet, ändert sie ebenso wie die Schaar der Geraden, deren Trajectorie sie bildet, ihre Richtung pötzllich um 30°. Da nach dem Obigen die Curve v im Punkte L die Spirale $u = (OLP)$ in demselben Verhältniss theilt wie im Punkte Q den Radius OP, so folgt, dass erstere von endlicher Länge, oder dass die Reihe:

$$(\dot{O}LP) = OL_1 + L_1L_2 + L_2L_3 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \ldots$$

convergirt. Um ihre Summe geometrisch zu finden, lege man durch L_1 eine Curve v. Schneidet diese den Radius OP im Punkte Q_1, so ist:

$$(OLP):OL_1 = OP:OQ_1$$

Demnach ist OQ_1 der reciproke Wert der Länge von (OLP). Projicirte man mittelst der Curven v auch die Punkte L_2, L_3, ... auf den Radius OP, so erhielte man auf demselben eine unendliche Reihe von Punkten, Q_1, Q_2, Q_3, ..., die sich nach dem Punkte P hin zusammendrängen, und deren Abstände von einander den einzelnen Gliedern der obigen Reihe proportional sind.

Lässt sich die Sehne s in den Bogen PH_1, dessen Länge gleich dem Radius sei, μ mal eintragen, so ist

$$\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$$

Construirt man noch die zu H_1 gehörende rechtwinklige Spirale, so ist:

$$(OHP) = (1+s)^{\mu}, \quad (OLP) = (1+s)^{\lambda} = (1+s)^{\mu\varphi}$$

oder auch

$$(OHP) = (1-s)^{-\mu}, \quad (OLP) = (1-s)^{-\lambda} = (1-s)^{-\mu\varphi}$$

woraus:

$$(OLP) = (OHP)^{\varphi}$$

Setzt man also:

$$(OHP) = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots = e$$

so ist:

$$(OLP) = 1+\frac{\varphi}{1}+\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\ldots = e^{\varphi}$$

Ist $OQ = q$, und schneidet die von Q ausgehende Curve v die Spiralen (OHP) und (OLP) in H, resp. in L, so hat man ferner:

$$OH = qe, \quad OL = qe^{\varphi}$$

wenn die Strecken OH, OL auf den Spiralen gemessen werden.

Ist PR senkrecht auf OL_1, und betrachtet man O als Anfangspunkt, OL_1 als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lehrt ein Blick auf die Figur, dass die Ordinaten von L_2, L_3 grösser, die von L_4L_5 kleiner, die von L_6L_7 wieder grösser als die Ordinate von P sein müssen u. s. f., dass dagegen, mit Berücksichtigung des Zeichens, die Abscissen von L_1, L_2 grösser, die von L_3, L_4 kleiner, die von L_5, L_6 wieder grösser als die Abscisse von P sind. Die Spirale (OLP) muss daher, sobald ihre Teile angefangen haben abzunehmen, sich immer mehr auf den Punkt P zusammenziehen. Demnach ist:

$$PR = L_1L_2 - L_3L_4 + L_5L_6 - \dots$$
$$-OR = OL_1 - L_2L_3 + L_4L_5 - \dots$$

oder:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \dots$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \dots$$

Die Lage eines beliebigen Punktes, z. B. L, ist in der Ebene bestimmt, wenn der Winkel φ gegeben ist, den die durch ihn zu legende rechtwinklige Spirale $OL_1L_2 \dots$ im Punkte O mit dem festen Radius OP bildet, und die Strecke r, um welche er auf dieser von O entfernt ist. In dem Polarcoordinatensystem (r, φ) hat jeder Radiusvector, obwohl aus unendlich vielen geradlinigen Strecken bestehend, eine obere Grenze, e^φ, die er im Punkte P erreicht. Die durch die Gleichung

$$r = e^\varphi$$

gegebene Curve reducirt sich daher auf diesen Punkt. Die Gleichungen des Kreisbogens PL_1 und seiner Evolventen PL_2, PL_3, ... sind in diesen Coordinaten:

$$r = 1$$
$$r = 1 + \frac{\varphi}{1}$$
$$r = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2}$$
$$\vdots$$

Die Trajectorie v oder $QHL \dots$ wird in ihrer ganzen Ausdehnung durch die Gleichung

$$r = qe^\varphi$$

definirt, während im Allgemeinen eine und dieselbe Curve in verschiedenen der durch die Evolventen getrennten Teile der Ebene durch verschiedene Gleichungen bestimmt wird. Dies ist schon für die etwas allgemeinere Curve der Fall, welche die Radienvectoren r unter einem von $\frac{\pi}{4}$ verschiedenen constanten Winkel schneidet. Ebenso haben auch die Ausdrücke für das Linien- und das Flächen-Element für die einzelnen Gebiete besondere Formen.

VIII.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von XV. in T. LX.

Artikel VI. (§ 25—34.)

Specielle Behandlung des Annäherungs-Problems.

A. Zur Darstellung der Wurzeln durch Potenzreihen.

§ 25.

I. Sei (cc') ein beliebig gegebenes Intervall,

$$c \leqq x_1 \leqq c',$$

$$x_1 \text{ keine Wurzel von } f(x) = 0,$$

so lässt das Problem:

Ein Intervall $(x_1 x)$ oder $(x x_1)$ mit gegebenem Anfangswert x_1 so zu bestimmen, dass dasselbe keine zwischen c und c' liegende Wurzel enthält —

nach § 11, 2. algebr. Lösung*) (Teil LVII, S. 361, Z. 1 v. u.) eine Lösung in folgender Form zu.

---

*) $x = c - a + \sqrt[r]{(x_1 - c + a)^r - kfx_1}$.

$$Fx - Fx_1 + \mathfrak{t} fx_1 = 0,$$

$$Fx = \lambda(x-h)^r.$$

Oder, da

$$Fx - Fx_1 = (x - x_1)F'u,$$

wo u einen bestimmten Wert zwischen x_1 und x bezeichnet, und $F'(x)$ mit x wächst,

einfacher:

$$x - x_1 = -\frac{\mathfrak{t} fx_1}{F'c'},$$

(1)
$$\begin{cases} x = x_1 + t fx_1, \\ t = -\dfrac{\mathfrak{t}}{F'c'} = \text{const. für alle } x_1 \text{ in } (c\,c'). \end{cases}$$

II. x liegt zwischen x_1 und der benachbarten Wurzel $w \gtrless x_1$ von $fx = 0$, wenn eine solche vorhanden und $c < w < c'$.

Es sei hier und im Folgenden w eine ein- oder mehrfache Wurzel.

Sei obiges x_1 bezeichnet durch

$$x$$

ferner

$$x_1 = t fx + x$$
$$x_2 = t fx_1 + x_1$$
$$\vdots$$
$$x_r = t fx_{r-1} + x_{r-1}, \quad \text{sei} = [\ ]_r,$$

(1) so liegt jeder folgende dieser Werte der Wurzel w näher als der vorhergehende.

(2)
$$w = \lim_{r=\infty} x_r.$$

Wir wollen versuchen, x_r in eine Potenzreihe, welche nach Potenzen von fx fortschreitet, zu verwandeln, d. i.

$$x_r = [\ ]_r = tf[\,_{r-1}\, tf[\,_{r-2} \dots tf(x) + x \dots]_{r-2} + [\ ]_{r-2}\,]_{r-1} + [\ ]_{r-1}.$$

III. Es ist, zur Abkürzung

$f(x) = f$, $f'(x) = f' = f_1$, $f''(x) = f'' = 2!f_2$, $f'''(x) = f''' = 3!f_3$ etc.

gesetzt:

$$x_2 = x + tf - tf(x + tf)$$
$$= x + tf + t(f + f'tf + f_2t^2f^2 + f_3t^3f^3 + \dots)$$
$$= x + (2 + tf')tf + f_2t^3f^2 + f_3t^4f^3 + \dots$$
$$x_3 = x_2 + tfx_2$$
$$= x_2 + t(f + f'.(x_2 - x_1) + f_2.(x_2 - x)^2 + \dots)$$

Hieraus erkennen wir schon, wie am besten zu verfahren ist.

Sei kurz

$$tf = g, \quad tf_1 = z - 1, \quad tf_2 = k_1, \quad tf_3 = k_2 \dots tf_m = k_{m-1},$$

ferner

$$\Delta_r = x_r - x,$$

so ist

$$\Delta_r = \Delta_{r-1} + tf(x + \Delta_{r-1}).$$

Nach dem Taylor'schen Satze entwickelt:

(1) $$\Delta_r = g + z\Delta_{r-1} + k_1\Delta_{r-1}{}^2 + k_2\Delta_{r-1}{}^3 + \dots k_{n-1}\Delta_{r+1}{}^n,$$

also

$$\Delta_1 = g$$
$$\Delta_2 = g + zg + k_1g^2 + \dots k_{n-1}g^n$$
$$\Delta_3 = g + z\Delta_2 + k_1\Delta_2{}^2 + k_2\Delta_2{}^3 + \dots k_{n-1}\Delta_2{}^n$$
$$= C_{1,3}g + C_{2,3}g^2 + C_{3,3}.g^3 + \dots$$
$$\vdots$$

(2) $$\begin{cases} \Delta_r = C_{1,r}g + C_{2,r}g^2 + \dots C_{p,r}.g^p \\ \text{wo} \qquad p = n^{r-1} \end{cases}$$

(3) $$w = x + \lim_{r=\infty} \Delta_r$$

Als Coefficienten der Potenzen von g treten Ausdrücke von der Form auf:

(4) $$N = Z.k_a{}^\alpha.k_b{}^\beta.k_c{}^\gamma \dots + Z'.k_{b'}{}^{\alpha'}.k_{b'}{}^{\beta'}.k_{c'}{}^{\gamma'} \dots + \dots,$$

wo Z, Z' ... ganze rationale Functionen von Z mit ganzzahligen positiven Coefficienten sind.

Wir bezeichnen einen solchen kürzer durch

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots, \quad a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \dots)$$

Die Exponenten 1 lassen wir fort, setzen also z. B.

$$Zk_2 + Z'k_1{}^2 = (2, \overset{2}{1}).$$

Der Symmetrie halber sei

$$k_0 = 1, \quad (0) = k_0.Z.$$

Mit Hülfe des polynomischen Satzes*) ergiebt sich für die zunächst auftretenden $C_{m,r}$ folgende symbolische Darstellung.

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1 &= g \\
\Delta_2 &= (0)g + (1)g^2 \\
&\qquad + k_2 g^3 + k_3 g^4 + k_4 g^5 + \ldots \\
\Delta_3 &= (0)g + (1)g^2 + (2, \overset{2}{1})g^3 + (3, 21, \overset{3}{1})g^4 \\
&\qquad + (4, 31, \overset{2}{2}, 2\overset{2}{1})g^5 + (5, 41, 32, 3\overset{2}{1}, \overset{2}{2}1, 2\overset{3}{1})g^6 \\
&\qquad + (6, 51, 42, 4\overset{2}{1}, \overset{2}{3}, 321, 3\overset{3}{1}, \overset{3}{2}, \overset{2}{2}\overset{2}{1})g^7 \\
&\qquad + (7, 61, 52, 5\overset{2}{1}, 43, 421, 4\overset{3}{1}, \overset{2}{3}1, 3\overset{2}{2}, 321, 3\overset{4}{1}, 2\overset{3}{1})g^8 \\
&\qquad + \ldots \\
\Delta_4 &= (0)g + \ldots (3, 21, \overset{3}{1})g^4 + (\underbrace{4}_{\text{wie } C_{5,3}} \ldots \overset{4}{1})g^5 + (\underbrace{5}_{\text{wie } C_{6,3}} \ldots \overset{5}{1})g^6 \\
&\qquad + (\underbrace{6}_{\text{wie } C_{7,2}} \ldots 2\overset{4}{1}, \overset{6}{1})g^7 + (\underbrace{7}_{\text{wie } C_{8,3}} \ldots \overset{2}{2}\overset{3}{1}, 2\overset{5}{1}, \overset{7}{1})g^8 \\
&\qquad + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Aus dieser kurzen Entwicklung ist schon das Bildungsgesetz der ersten 8 Glieder von Δ_r ersichtlich. Wir kommen hierauf zurück (§ 27).

§ 26.

Hülfsbetrachtungen.

Nennen wir eine Form wie in § 25. III. (4)

$$N = \Sigma Z . k_a^{\alpha} k_b^{\beta} k_c^{\gamma} \ldots ,$$

für welche

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \ldots = \ldots = m,$$

eine Form N der $m$ten Ordnung und bezeichnen sie durch

$$(\;)_m.$$

---

*) Das allgemeine Glied von $(a+b+c+\ldots)^m$, wo m eine ganze Zahl, ist

$$= \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} \cdot a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots ,$$

die Exponenten so gewählt dass

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = m.$$

Wir unterscheiden demnach solche der 1sten, 2ten ... Ordnung, anderseits vollständige und unvollständige, je nachdem alle möglichen Producte

$$k_1^{\alpha} k_2^{\beta} k_3^{\gamma} \ldots,$$

d. h. für welche

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots = m,$$

vorkommen oder nicht.

Erstere seien durch $\underline{m}$, letztere durch $\underset{-\,-}{m}$ bezeichnet.

Ueber besagte Formen gelten eine Reihe von Hülfssätzen, die sich wie folgt symbolisch ausdrücken lassen.

1) $(\ )_l (\ )_m = (\ )_{l+m}$.

Denn das allgemeine Glied in $(\ )_l$, $(\ )_m$ ist proportional

$$k_1^{\alpha} k_2^{\beta} k_3^{\gamma} \ldots \text{ wo } \alpha.1 + \beta.2 + \gamma.3 + \ldots = l,$$

resp.

$$k_1^{a} k_2^{b} k_3^{c} \ldots \text{ wo } a.1 + b.2 + c.3 + \ldots = m,$$

mithin das in $(\ )_l . (\ )_m$ proportional

$$k_1^{\alpha+a} . k_2^{\beta+b} . k_3^{\gamma+c} \ldots \text{ wo } (\alpha+a)1 + (\beta+b)2 + \ldots = l+m$$

Folgesatz: $(\ )_l . (\ )_m . (\ )_n \ldots = (\ )_{l+m+n\ldots}$

2) Die vollständigen Formen lassen sich symbolisch so schreiben:

$$\underline{1} = (1)$$

$$\underline{2} = (2, \overset{2}{1}) = (2, 11)$$

$$\underline{3} = (3, 21, \overset{3}{1}) = (3, 21, 1(\underset{*}{2}\ \overset{2}{1}))$$

$$\underline{4} = (4, 31, \overset{2}{2}, \overset{2}{21}, \overset{4}{1}) = (4, 31, 2(2, \overset{2}{1}), 1(\underset{*}{3}, \underset{*}{21}, \overset{3}{1}))$$

wo die * bedeuten, dass die entsprechenden Glieder in den vorhergehenden vorkommen und daher wegfallen können.

$$\underline{m} = \sum_{i=1}^{i=m} k_i \underline{m-i}, \quad \text{wo} \quad \underline{0} = 1$$

3) Sei

$$m = 2p \text{ oder } 2p+1,$$

so lässt sich $\underline{m}$ auf die Form bringen

$$\underline{m} = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i \underline{m-i} + \Sigma Z k_1^{\alpha} k^{2\beta} k_3^{\gamma} \ldots,$$

worin

$$\alpha.1 + \beta.2 + \gamma.3 + \ldots = m.$$

Um so mehr

$$\underline{m} = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i \underline{m-i} + \Sigma\, \underline{1}^{\alpha}.\underline{2}^{\beta}.\underline{3}^{\gamma}\ldots\underline{p}^{\pi},$$

wo

$$\alpha.1+\beta.2+\gamma.3+\ldots=m.$$

4) Denken wir uns das Product

$$P=\underline{1}^{\alpha}.\underline{2}^{\beta}.\underline{3}^{\gamma}\ldots\underline{p}^{\pi}$$

in seine einfachen Factoren $\underline{1}.\underline{1}\ldots\underline{2}.\underline{2}\ldots$ zerlegt und solche 2

$$\underline{l} \quad \text{und} \quad \underline{n}$$

in $\underline{l+n}$ zusammen gefasst (Vergl. 1) und zwar so, dass

$$l+n \leqq p.$$

In der neuen Reihe von Factoren, deren Anzahl um 1 geringer ist, d. i.: $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\pi-1$, fassen wir wieder 2 z. B.

$$\underline{r} \quad \text{und} \quad \underline{s}$$

so zusammen, dass

$$r+s \leqq p.$$

Bei dem hierdurch entstehenden, wieder einen Factor weniger enthaltenden Producte verfahren wir in gleicher Weise u. s. f. bis sich die Anzahl der Factoren nicht mehr verkleinern lässt. Wir behaupten:

Diese kleinste Anzahl ist höchstens $=3$.

Beweis: die letzte Form, die man für P erhält, sei

$$P=\underline{a}.\underline{b}.\underline{c}\ldots,$$

die Anzahl der Factoren x, so muss sein

$$\begin{aligned} a+b &\geqq p+1 \\ a+c &\geqq \quad " \\ &\vdots \\ b+c &\geqq \quad " \\ &\vdots \end{aligned}$$

addirt giebt

$$(x-1)(a+b+c+\dots) \geqq \frac{x(x-1)}{2}(p+1).$$

Nun ist

$$a+b+c+\dots = m,$$

also

$$m \geqq (p+1) \geqq \frac{x}{4}(m+2)$$

$$x < 4 \quad \text{(W. z. b.)}$$

5) Ist $M_1 = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i \underline{m-i}$,

$$M_2 = \Sigma \underline{a}.\underline{b}.\underline{c},$$

ausgedehnt über alle a, b, $c \leqq p$, so dass $a+b+c = m$, mithin

$$M_2 = k_a \underline{b}.\underline{c}.\underline{d}$$

für alle a, b, c, $d \leqq p$, so dass $a+b+c+d = m$, so folgt aus 3) und 4): dass man $\underline{m}$ die Form geben kann

$$\underline{m} = M_1 + M_2.$$

§ 27.

I. Wir kehren zur Gleichung § 25. III. (2) zurück und können zunächst sagen:

Der Coefficient der $m$ten Potenz von g bildet eine Form N der $(m-1)$ten Ordnung:

(1) $$C_{m,r} = (\ )_{m-1},$$

so dass

(2) $$\varDelta_r = (\ )_0 g + (\ )_1 g_2 + (\ )_2 g^3 + \dots (\ )_{p-1} g^p.$$

Beweis: Wir machen den Schluss von n auf $n+1$.

Sei (2) richtig für ein bestimmtes r, so ist nach § 25 III. (1) und (2)

$$\varDelta_{r+1} = g + z\{C_{1,r} g + C_{2,r} g^2 + \dots\} + k_1\{\quad\}^2 + k_2\{\quad\}^3 + \dots$$

von der Form

$$\varDelta_{r+1} = k_0((\ )_0 g + (\ )_1 g_2 + \dots) + k_1((\ )_0 g + (\ )_1 g^2 + \dots)^2$$
$$+ k_2((\ )_0 g + (\ )_1 g^2 + \dots)^3 + \dots$$

Das allgemeine Glied ist

$$M = k_{m-1} g^s \frac{m!}{a!\,b!\,c!\ldots}(\ )_0^a (\ )_1^b (\ )_2^c \ldots,$$

wo

$$s = a.1 + b.2 + c.3 + \ldots$$
$$m = a + b + c + \ldots$$

Nach § 26. 1), Folgesatz, lässt sich M auf die Form bringen

$$M = g^s (\ )_{m-1} . (\ )_b . (\ )_{c.2} . (\ )_{d.3} \ldots$$
$$= g^s (\ )_{m-1+b.1+c.2+\ldots} = g^s . (\ )_{s-1}$$

also u. s. w.

II. Ein Blick auf § 25. III. (5) lässt vermuten, dass

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_r = \underline{0} g + \underline{1} g^2 + \underline{2} g^3 + \ldots \underline{s} g^{s+1} \\ \qquad + \underline{s+1} g^{s+2} + \underline{s+2} g^{s+3} + \ldots, \\ \text{wo} \\ \qquad s = 2^{r-1} - 1. \end{cases}$$

Beweis: (Schluss von n auf $n+1$):

Sei (1) richtig für ein bestimmtes r. Wegen § 25. III. (1) kann Δ_{r+1} auf die Form gebracht werden

$$\Delta_{r+1} = k_0(\underline{0} g + \underline{1} g^2 + \underline{2} g^3 + \ldots) + k_1(\underline{0} g + \ldots)^2 + k_2(\underline{0} g + \ldots)^3 + \ldots$$

$+$ eine Reihe von Gliedern, welche die unvollkommenen Formen $\underline{s+1}$, $\underline{s+2}$ ... enthalten.

Es ist zu beweisen, dass der Factor der $(m+1)$ten Potenz von g

$$C_{m+1,\,r+1} = \underline{m}$$

für alle

$$m + 1 \leqq 2^r = 2(s+1).$$

derselbe ist, abgesehen von jener Reihe von Gliedern

$$M = \Sigma k_v \underline{0}^{\alpha_0} . \underline{1}^{\alpha_1} . \underline{2}^{\alpha_2} \ldots . \underline{s}^{\alpha_s},$$

die Summation ausgedehnt über alle

$$v = 0,\ 1,\ 2 \ldots n-1$$

und alle α_0, α_1, α_2 ... unter 0, 1, 2 ..., für welche

$$\alpha_0 . 1 + \alpha_1 . 2 + \alpha_2 . 3 + \ldots = m + 1,$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \qquad = v + 1.$$

Obige Bedingung $m+1 \leqq 2(s+1)$ ist erfüllt, wenn

$$p \leqq s.$$

Es kommt folglich in M vor

1) wenn $m = 2p+1$: jedes Glied von $k_1 \underline{p}^2$, somit k_1^{2p+}
wenn $m = 2p$ jedes Glied von $k_1 p - 1 . p$, somit k_1^{2p} } also k_1^m.

2) jedes Glied von

$$M_1 = \sum_{i=p+1}^{i=m} k_i \underline{0}^i . \underline{m-i}$$

3) desgl. von

$$M_2 = \Sigma k_a \underline{0}^{a-2} . \underline{b} . \underline{c} . \underline{d},$$

wo $a > 1$; $a, b, c, d \leqq p$; $a+b+c+d = m$.

(Wenn $m = 2p$, so kann $b = 0$, $c = p - a$, $d = p$ sein).

Aus 1), 2), 3) in Verbindung mit § 26. 5) resultirt

$$M = \underline{m},$$

also auch

$$C_{m+1,\, r+1} = \underline{m}.$$

Nun gilt der Satz (1) für $r = 3$, also auch für $r = 4$ u. s. w.

Die Feststellung des Baues von $C_{s+1,r}$, $C_{s+2,r}$ ... möchte auf grössere Schwierigkeiten stossen und nehmen wir hier davon Abstand.

§ 28.

I. Wenden wir uns der Bestimmung der Coefficienten $C_{1,r}$, $C_{2,r}$ ... selbst zu.

Aus § 25. III. (1) und (2) ergiebt sich identisch

$$(1) \quad C_{1,r}g + C_{2,r}g^2 + C_{3,r}g^3 + \dots = g + z(C_{1,r-1}g + C_{2,r-1}g^2 + \dots) \\ + k_1(C_{1,r-1}g + \dots)^2 + k_2(C_{1,r-1}g + \dots)^3 + \dots,$$

woraus durch Gleichsetzen der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von g auf beiden Seiten:

$$(2)\quad \begin{cases} C_{1,r} = zC_{1,r-1} + 1 \\ C_{2,r} = zC_{2,r-1} + k_1 C_{1,r-1}^2 \\ C_{3,r} = zC_{3,r-1} + k_1\, 2C_{1,r-1} C_{2,r-1} + k_2 C_{1,r-1}^3 \\ C_{4,r} = zC_{4,r-1} + k_1 (2C_{1,r-1} C_{3,r-1} + C_{2,r-1}^2) \\ \qquad\qquad + k_2\, 3C_{1,r-1} C_{2,r-1} + k_3 C_{1,r-1}^4 \\ \vdots \end{cases}$$

oder, wenn in Uebereinstimmung mit § 27. II. (1)

$$(3)\quad \begin{cases} C_{1,r} = Z_{1,r} \\ C_{2,r} = k_1 Z_{2,r} \\ C_{3,1} = k_2 Z'_{3,r} + k_1^2 Z''_{3,r} \\ \vdots \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(4)\quad \begin{cases} 1)\; Z_{1,r} = zZ_{1,r-1} + 1 \\ 2)\; Z_{2,r} = zZ_{2,r-1} + Z_{1,r-1}^2 \\ 3)\; Z'_{3,r} = zZ'_{3,r-1} + Z_{1,r-1}^3 \\ 4)\; Z''_{3,r} = zZ''_{3,r-1} + 2Z_{1,r-1} Z_{2,r-1} \\ \vdots \end{cases}$$

$$(5)\qquad \Delta_r = Z_{1,r} g + Z_{2,r} k_1 g^2 + (Z'_{3,r} k_2 + Z''_{3,r} k_{12}) g^3 + \ldots$$

II. Aus I. (4) 1) folgt durch wiederholte Anwendung:

$$Z_{1,r} = z(zZ_{1,r-2} + 1) + 1 = z^2 Z_{1,r-2} + z + 1 = \ldots = z^{r-1} + z^{r-2} + \ldots z + 1;$$

in geschlossener Form

$$(1)\qquad (z-1) Z_{1,r} = z^r - 1$$

Aus I. (4) 2):

$$\begin{aligned} Z_{2,r} &= z(zZ_{2,r-2} + Z_{1,r-2}^2) + Z_{1,r-1}^2 \\ &= z^2(zZ_{2,r-3} + Z_{1,r-3}) + zZ_{1,r-2}^2 + Z_{1,r-1}^2 \\ &\vdots \\ &= z^{r-2} Z_{2,2} + z^{r-3} Z_{1,2}^2 + z^{r-4} Z_{1,3}^2 + \ldots zZ_{1,r-2}^2 + Z_{1,r-1}^2. \end{aligned}$$

Die Coefficienten $Z_{1,2}$, $Z_{1,3}$ sind aus (1) bekannt, $Z_{2,2} = 1$, und es kommt:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Z_{2,r} &= z^{r-2}(z-1)^2 + z^{r-3}(z^2-1)^2 + z^{r-4}(z^3-1)^2 \\ &\qquad + \ldots z(z^{r-2}-1)^2 + (z^{r-1})^2 \\ &= z^r + z^{r-1} + \ldots + z^{2r-3} + z^{2r-2} \\ &\qquad - 2z^{r-1} - 2z^{r-1} - \ldots - 2z^{r-1} - 2z^{r-1} \\ &\qquad + z^{r-2} + z^{r-3} + \ldots + z + 1 \\ &= (z^r + 1)(z^{r-2} + z^{r-3} + \ldots z + 1) - 2(r-1) z^{r-1}; \end{aligned}$$

in geschlossener Form

$$(2)\quad \begin{cases} (z-1)^3 Z_{2,r} = (z^r+1)(z^{r-1}-1)-2(r-1)(z-1)z^{r-1} \\ \qquad = z^{2r}-1-(2r-1)(z-1)z^{r-1}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus I. (4) 3)

$$(z-1)^3 Z'_{3,r} = z^{r-2}(z-1)^3 + z^{r-3}(z^2-1)^3 + \ldots z(z^{r-2}-1)^3 + (z^{r-1}-1)^3$$
$$= z^{r+1}\frac{z^{2(r-1)}-1}{z^2-1} - 3z^r \cdot \frac{z^{r-1}-1}{z-1} + 3(r-1)z^{r-1} - \frac{z^{r-1}-1}{z-1}$$

$$(3)\quad (z-1)^4(z+1)Z'_{3,r} = z^{r+1}(z^{2(r-1)}-1)$$
$$-(z^{r-1}-1)(3z^r+1)(z+1)+3(r-1)z^{r-1}(z^2-1).$$

$$(3)^a\quad \tfrac{1}{2}(z-1)^5(z+1)Z''_{3,r} = z^{r-2}\big[z^{2r}-1+(z^2-1)((r^2-3r+1)z$$
$$-(r^2-2r+2))\big]-(z+1)(1+z^{2r-2}((2r-3)z-(2z-2))).$$

Die Coefficienten $C_{4,r}$, $C_{5,r}$ ... lassen sich mittelst des Polynomischen Satzes oder der bekannten Formeln für die Entwicklung von

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^m = A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

finden *).

§ 29.

Bedeutend einfacher gestaltet sich die Entwicklung von Δ_r nach Potenzen von g für

$$(1)\qquad z = 1+tf'(x) = 0$$

Schliesst das Intervall (cc') die Wurzel w ein, ändert in demselben $f'x$ und $f''x$ ihr Zeichen nicht und liegt x zwischen c und c' auf derjenigen Seite von w, wo fx und $f''x$ gleiche Zeichen haben, so ist die Annahme $z=0$ statthaft.

Setzen wir in § 28. I. (2) $z=0$, so kommt

---

*) Es ist

$$A_0 = a_0^m$$
$$a_0A_1 = ma_1A_0$$
$$2a_0A_2 = 2ma_2A_0+(m-1)a_1A_1$$
$$3a_0A_3 = 3ma_3A_0+(2m-1)a_2A_1+(m-2)a_1A_2$$
$$4a_0A_4 = 4ma_4A_0+(3m-1)a_3A_1+(2m-2)a_2A_2$$
$$+(m-3)a_1A_3$$
$$\vdots$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{ll}
C_{1,r} = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{für } r \overset{=}{>} 1 \\
C_{2,r} = k_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots & \;\;\text{"}\; r \overset{=}{>} 2 \\
C_{3,r} = k_2 + 2k_1^2 \;\ldots\ldots & \;\;\text{"}\; r \overset{=}{>} 3 \\
C_{4,r} = k_3 + 5k_2k_1 + 5k_1^3 \ldots & \;\;\text{"}\; r \overset{=}{>} 4 \\
\vdots &
\end{array}\right.
$$

Wir sehen hieraus: die Coefficienten $C_{1,r} C_{2,r} \ldots C_{4,r}$ sind von r unabhängig wenn $r \overset{=}{>} 4$, und wenn wir uns die Entwicklung von § 28. I. (2) fortgesetzt denken mit Hülfe von § 28. Anmerkung, so ergiebt sich

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
C_{1,r},\;\; C_{2,r} \ldots C_{m,r} \ldots C_{r,r} \\
\text{sind in dem Fall } z = 0 \text{ nur von } k_1,\, k_2 \ldots, \text{ nicht von } r \text{ abhängig.}
\end{array}\right.
$$

Mithin ist

$$
(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
C_{m,r} = C_{m,\infty}, \text{ sei } = C_m, \\
\text{wenn } m \underset{=}{<} r.
\end{array}\right.
$$

$$
(5)\quad \Delta_r = C_1 g + C_2 g^2 + \ldots C_{r-1} g^{r-1} + C_r g^r + C_{r+1,r} g^{r+1} + \ldots
$$

$$
\Delta_{r-1} = C_1 g + C_2 g^2 + \ldots C_{r-1} g^{r-1} + C_{r,\,r-1} g^r + \ldots
$$

Zwischen beiden Werten besteht die Relation

$$
g = \Delta_r - k_1 \Delta_{r-1}^2 - k_2 \Delta_{r-1}^3 - \ldots - k_{n-1} \Delta_{r-1}^n
$$

und es folgt hieraus:

$$
(6)\quad \left\{\begin{array}{l}
C_1,\, C_2,\, C_3 \ldots \text{ sind die Coefficienten der sogenannten umkehrten Reihe von} \\
\qquad g = \Delta - k_1 \Delta^2 - k_2 \Delta^3 - \ldots - k_{n-1} \Delta^n \\
\text{d. i.:} \\
\qquad \Delta = C_1 g + C_2 g^2 + \ldots
\end{array}\right.
$$

§ 30.

I. Betrachten wir die Summe der r ersten Glieder in § 29 (5)

$$
S_r = C_1 g + C_2 g^2 + \ldots C_r g^r
$$

etwas näher.

Die Coefficienten ergeben sich nach den bekannten Formeln für die Umkehrung der Reihen:

$$(1)\quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = k_2 \\ C_3 = 2k_1^2 + k_2 \\ C_4 = 5k_1^3 + 5k_1k_2 + k_3 \\ C_5 = 14k_1^4 + 21k_1^2k_2 + 6k_1k_3 + 3k_2^2 + k_4 \\ C_6 = 42k_1^5 + 84k_1^3k_2 + 28k_1^2k_3 + 28k_1k_2^2 + 7k_1k_4 + 7k_2k_3 + k_5 \\ C_7 = 132k_1^6 + 330k_1^4k_2 + 120k_1^3k_3 + 180k_1^2k_2^2 + 36k_1^2k_4 \\ \qquad + 72k_1k_2k_3 + 8k_1k_5 + 12k_2^3 + 8k_2k_4 + 4k_3^2 + k_6 \\ \vdots \end{cases}$$

II. Ein Bildungsgesetz für C_1, C_2 ... finden wir wie folgt.

Die erste Reihe in § 29. (6) ist identisch mit

$$0 = fx + \frac{f'x}{1}\Delta + \frac{f''x}{2!}\Delta^2 + \dots = f(x+\Delta),$$

also

$$x + \Delta = w.$$

Die umgekehrte Reihe für Δ ist

$$\Delta = F(-fx) = F(0) + \frac{F'(0)}{1}(-fx) + \frac{F''(0)}{2!}(-fx)^2 + \dots,$$

wo

$$F(0) = 0$$

$$F'(0) = \frac{d\Delta}{d(-fx)} = \frac{1}{f'x}, \quad \text{sei} = \varphi_1 x$$

$$F''(0) = \dots\dots = \frac{\varphi'_1 x}{f'x}, \quad \text{sei} = \varphi_2 x$$

$$F'''(0) = \dots\dots = \frac{\varphi'_2 x}{f'x}, \quad \text{sei} = \varphi_4 x$$

$$\vdots$$

$$(1) \dots\dots\dots\dots \frac{\varphi'_{r-1}}{f'x}, \quad \text{sei} = \varphi_r x.$$

$$(2)\quad S_r = -\frac{\varphi_1 x}{1} fx + \frac{\varphi_2 x}{2!}(fx)^2 - \frac{\varphi_3 x}{3!}(f(x))^3 + \dots (-1)^r \frac{\varphi_r x}{r!}(fx)^r$$

also unser

$$(3) \dots\dots\dots C_r = \frac{\varphi_r x}{r!}(f'x)^r.$$

Sei wie früher zur Abkürzung

$$(4)\quad \left\{ \text{ferner} \quad \begin{array}{l} t = -\frac{1}{f'x}, \quad tfx = g, \quad k_r = \frac{tfx^{r+1}}{(r+1)!} \\ \frac{dC_r}{dx} = C'_r, \quad \frac{dt}{dx} = t', \quad \frac{dk_r}{dx} = k'_r. \end{array} \right.$$

Die Gleichung (2) ist gleichbedeutend mit

$$rC_r t^{r-1} = \frac{d(C_{r-1}t^{r-1})}{dx} = C_{r-1}(r-1)t^{r-1}t' + C'_{r-1}t^{r-1},$$

oder, da

$$t' = 2k_1 t, \quad \text{mit}$$

$$(5)\qquad rC_r = 2(r-1)C_{r-1}k_1 + C'_{r-1}.$$

Ferner

$$k_r' = \frac{tfx^{r+2}}{(r+1)!} + \frac{t'}{t}\,\frac{tfx^{r+1}}{(r+1)!}$$

$$(6)\qquad k'_r = (r+2)k_{r+1} + 2k_1 k_r.$$

Mit Hülfe von (5) und (6) findet man successive

$$C_2 = k_1;\ 3C_3 = 4C_2k_1 + k'_1 = 4k_1^2 + \underbrace{(3k_2 + 2k_1^2)}_{=k'_1} = 6k_1^2 + 3k_2,$$

$$C_3 = 2k_1^2 + k_2;\ 4C_4 = 6(2k_1^2 + k_2)k_1 + 4k_1(3k_2 + 2k_1^2) + \underbrace{(4k_3 + 2k_1k_2)}_{=k'_2}$$

$$C_4 = 5k_1^3 + 5k_2k_1 + k_3 \quad \text{u. s. f.}$$

III. Unter der Voraussetzung, dass x der Wurzel w hinreichend nahe liegt, findet man auf bekannten Wege:

(1) Die Reihe S_r convergirt und hat zur Grenze $w-x$, mithin

$$w = x + \lim S_r$$

Je grösser r, desto näher kommt

$$x + S_r$$

der Wurzel w und zwar auf der pos. oder neg. Seite. Bleibt man beim ersten Gliede stehen, so hat man den Euler'schen Näherungswert

$$x + g = x - \frac{fx}{f'x}$$

wenn beim 2ten Gliede, so kommt

$$x+g+k_1g^2 = x-\frac{fx}{f'x}-\frac{f''x}{2!}\cdot\frac{(fx)^2}{(f'x)^3}$$

u. s. f. die bekannten Näherungswerte *).

Geometrisch gedeutet ist

$$x+S_r$$

die Abscisse des Durchschnitts der X Achse mit einer Curve, deren Gleichung von der Form ist

$$x=F(y)=\beta_0 y+\beta_1 y^2+\ldots\beta_r y^r$$

und welche mit der Curve

$$y=fx$$

eine Berührung der $r$ten Ordnung in dem jenem x entsprechenden Curvenpunkt hat. (Die Bedingung ist, dass für beide Curven

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\cdots\frac{d^ry}{dy^r}$$

übereinstimmen,

$$\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}$$

dagegen nicht.

B. Bestimmung von x in § 25. I. (1).

§ 31.

Sei w eine Wurzel in (cc'), $c<x_1<c'$, so ist nach § 25. und § 11.

(1) $$\left\{\begin{array}{l} x=x_1+tfx_1 \\ \text{ein zwischen } x_1 \text{ und } w \text{ liegender Wert, wenn} \\ t=-\frac{1}{F'c'}=-\frac{k}{r(c'-c+a)^{r-1}}, \end{array}\right.$$

wo

1) $a>0$

und bei Unterscheidung der Fälle

$$\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\left\{(x_1-w)fx_1 \gtrless 0\right.$$

oder einfacher, wenn w keine mehrfache Wurzel ist)

$$\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\left\{f(w+0)\gtrless 0\right.$$

---

*) Methode von Lagrange, Mem. der Berl. Akademie, 24. Bd.

2) $r = n$: ad a)

r = Exponent des 1sten negativen Gliedes von

$$f(x+c) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots c_n: \text{ ad b)}$$

3) $k = \overset{+}{k}_{n,1}$: ad a)

$k = \overset{-}{k}_{n,1}$: ad b) (beliebig < 0 wenn $c_0, c_1 \dots c_{n-1} > 0$), mit mit $\overset{\pm}{k}_{n,1}$ den absolut kleinsten unter den $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Werten von $k_n, k_{n-1} \dots k_e = \binom{r}{} \frac{a^{r-e}}{c_{n-e}} \dots k_1$ bezeichnet.

(2) Ist $x_1 < w$, $c' > x_1$ aber unbestimmt ob $c' \gtrless w$, so liegt derjenige der beiden Werte

$$x = x_1 + t f x_1 \quad \text{und} \quad c',$$

welcher sich näher an y_1 befindet, zwischen x_1 und w. Analoges gilt für jede obere Grenze x_1 von w.

§ 32.

Das x in § 31. (1) als Function von a.

Der Coefficient $k = \overset{\pm}{k}_{n,1}$ ist von der Form

$$k_e$$

also

$$x = x_1 - \frac{\binom{r}{e}}{r c_{n-e}} \cdot \frac{a^{r-e}}{(c' - c + a)^{r-1}} \cdot f x_1, \tag{1}$$

wo e im Allgemeinen jeder der Exponenten $n \dots 1$ sein kann.

Durchläuft a alle Werte von 0 bis $+\infty$, so ändert sich e in der in § 14. (T. LVIII. S. 130) festgestellten Weise.

Wie dort sei

$(a_s\, a'_s)$ dasjenige Intervall von a, welchem $e = r - s$ entspricht.

$\overset{v}{\underset{s}{a}}$ in diesem das vorteilhafteste a, d. h. für welches $x - x_1$ absolut am grössten.

$\overset{v}{\underset{s}{x}}$ das zugehörige x.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{v}{a}\\ \overset{v}{x}\end{array}\right\}$$ die überhaupt vorteilhaftesten Werte von a und x.

Es ist $\underset{s}{\overset{v}{a}}$ dasjenige a, für welches die Function

$$G(a) = \frac{a^{r-e}}{(d+a)^{r-1}},$$

wo

$$d = c' - c,$$

$$a_s < a < a'_s$$

den grössten Wert besitzt.

Die Differentiirung nach a ergiebt:

$$(d+a)^{2(r-1)} G'(a) = (d+a)^{r-1}(r-e)a^{r-e-1} - (d+a)^{r-2}(r-1)a^{r-e},$$
$$(d+a)^r G'(a) = a^{r-e-1}\left((r-e)d - (e-1)a\right),$$

somit

$$G'a \overset{=}{\underset{<}{>}} 0 \quad \text{wenn} \quad a \overset{=}{\underset{>}{<}} \frac{r-e}{e-1} d.$$

Hieraus lässt sich erkennen, welchen Verlauf $G(a)$ nimmt, wenn a von 0 bis $+\infty$ wächst.

(2)

Ist 1) $e = r$, so nimmt $G(a)$ beständig ab (von $\frac{1}{d^{r-1}}$ bis 0), daher

$$\overset{v}{a_0} = a_0$$

2) $e = 1$, so wächst $G(a)$ mit a (von 0 bis 1), folglich

$$\overset{v}{a}_{r-1} = a'_{r-1}$$

3) $1 < e < r$, so wächst $G(a)$ mit bis zu dem Werte, der

$$a = \underset{s}{\overset{m}{a}} = \frac{r-e}{e-1} d = \frac{s}{e-1} \cdot d \text{ entspricht}$$

$$\underset{s}{\overset{v}{a}} = \text{mittlerem der Werte } a_s,\ a'_s,\ \overset{m}{a_s}.$$

Das der Wurzel w am nächsten kommende $\overset{v}{x}$ berechnet sich wie folgt.

(3) Ermittle für jeden möglichen Exponenten e (die Bedeutung von e geht aus der von k_e, siehe oben, hervor) der $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Glieder unter $c_0\, c_1 \dots c_{n-1}$ je nachdem $(x_1 - w) f x_1 \lessgtr 0$, das $\overset{v}{\underset{s}{a}}$ nach (2), die entsprechenden x nach (1) und unter diesen das von x_1 am meisten abstehende.

Beispiel.

Die kleinste Wurzel w von

$$36x^4 - 13{,}2x^3 + 1{,}44x^2 + 4{,}312x - 0{,}3584 = 0 \text{ (3 Wechsel)}$$

zu berechnen.

Für $c = 0$, $x_1 = 0$ finden wir

$$\overset{v}{a} = \sqrt[3]{\frac{4{,}312}{\binom{4}{1}36}} = 0{,}3107.$$

Sei $a = 0{,}311$, so wird $k = k_4 = \frac{1}{36}$

$$x - x_1 = \frac{0{,}3584}{4.36.(0{,}311 + c')^3}$$

und unter Anwendung des Kriteriums (2) in § 31., indem wir $c' = 0{,}05$ wählen,

$$w > 0{,}05.$$

(Die weitere Annäherung geschieht am zweckmässigsten nach der Euler'schen Methode, was sich herausstellt, wenn man die Gleichung nach 0,1 transformirt und $f''(0{,}05)$ berechnet, $f''(0{,}05)$ ist $= 0$).

§ 33.

Seien die a_s der Grösse nach

$$\begin{matrix} & b_0(=0), & b_1, & b_2 \dots b_{m-1}, & b_m. & (<\infty) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \text{ferner} & e_0 & e_1 & e_{m-1} & e_m(=r) & \\ \text{und} & s_0 & s_1 & s_{m-1} & s_m(=0) & \end{matrix}$$

die den darüber stehenden Intervallen zugehörigen e und $s(= r - e)$.

Dadurch, dass man

$$c \quad \text{und} \quad c'$$

der Wurzel w sehr nahe rückt, lässt sich erreichen, dass

$$\text{für } e = e_{m-1} : \overset{m}{\underset{s}{a}} = \frac{r-e}{e-1}(c'-c) < b_{m-1}$$

$$\text{„ } e = e_{m-2} : \text{„} = \quad \text{„} \quad < b_{m-2}$$

$$\vdots$$

$$\text{„ } e = e_1 \quad : \text{„} = \quad \text{„} \quad < b_1,$$

mithin nach § 32. (3), wenn nur die Exponenten $e_1 \dots e_m$ ins Auge gefasst werden,

$$\overset{v}{a} = b_1$$

Unter obiger Voraussetzung, dass $w-c$ sehr klein, ist ferner

$$e_0 = 1$$

falls das Vorzeichen von $(x_1 - w) f x_1$ mit dem von $c_{n-1} = f'(c)$ übereinstimmt.

Nach § 32. (3) ist

$$\overset{v}{a}_{s_{,,}} = b_1.$$

Unter allen a zwischen 0 und $+\infty$ ist folglich

$$\overset{v}{a} = b_1.$$

(1) Der Formel § 32. (1) genügt, wenn das Vorzeichen von $x_1 - w =$ dem von $\frac{fx_1}{c_{n-1}}$:

$$x = x_1 - \frac{r a^{r-2} f x_1}{c_{n-1}(c'-c+a)^{r-1}},$$

wo $a = b_1 =$ kleinste der Wurzeln der Gleichungen $k_1 = k_m$, für m der Reihe nach die Exponenten derjenigen Glieder von $f(x+c) = 0$ gesetzt, die dasselbe Vorzeichen wie c_{n-1} haben,

$$b_1 = \sqrt[d-1]{\frac{\binom{r}{p}}{r} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-p}}}, \quad p = e_1.$$

Nach Obigen ist

(2)
$$\overset{v}{x} = x,$$
wenn $c'-c$ hinreichend klein.

§ 34.

In dem Ausdruck für x in § 33. (1) kommen vor:

$$x_1,\ c',\ c;\quad r,\ c_{n-1},\ e_1 = p,\ e_{n-p}$$

von denen die drei ersten von einander unabhängig sind, die übrigen nur von c abhängen.

Dadurch, dass wir bei constantem x_1 und c' das c dem w nahe bringen, können wir erreichen, dass bei weiterer Annäherung von c

r unverändert bleibt,

nicht aber im Allgemeinen e_1.

Nehmen wir vorläufig auch

$$e_1 = p = \text{const.}$$

an und untersuchen die Abhängigkeit des x von c bei gegebenem x_1 und c'.

Es ist

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & x - x_1 = -r f(x_1) . F(c), \\ \text{wo}\quad & F(c) = \frac{a^{r-1}}{f'(c).(c' - c + a)^{r-1}}, \\ & a = \sqrt[p-1]{\frac{\binom{r}{p} p!}{r} . \frac{f'(c)}{f^p(c)}}. \end{aligned} \right.$$

Die vorletzte dieser Gleichungen differentiirt, giebt wenn kurz F, F', f ... statt $F(c)$, $F'(c)$, $f(c)$ ... und $(\ )$ statt $(c' - c + a)$ gesetzt wird:

$$(\ )^{2r-2} f'^2 F' = (\ )^{r-1}(r-1)a^{r-2} f' \frac{da}{dc} - a^{r-1}\left((r-1)(\ )^{r-2} f' \left(\frac{da}{dc} - 1\right) + (\ )^{r-1} f''\right),$$

$$\frac{(\ )^r f'^2 F'}{a^{r-2}} = (\ )(r-1) f' \frac{da}{dc} - a(r-1) f' \left(\frac{da}{dc} - 1\right) - a(\ ) f''$$

$$(2)\quad „ \quad = (c' - c)\left((r-1) f' \frac{da}{dc} - a f''\right) + a\left((r-1) f' - a f''\right).$$

Um $\frac{da}{dc}$ zu bilden, differentiiren wir die sich aus (1) ergebende Formel

$$a^{p-1}f^p = R.f', \quad \text{wo} \quad R = \frac{\binom{r}{p}p!}{r};$$

$$a^{p-1}f^{p+1} + (p-1)a^{p-2}\frac{da}{dc}f^p = Rf'',$$

$$\frac{da}{dc} = \frac{Rf'' - a^{p-1}f^{p+1}}{(p-1)a^{p-2}f^p}$$

Der Factor von $(c'-c)$ in (2) ist ein Bruch, dessen Nenner $-(p-1)a^{p-2}f^p$ und dessen Zähler =

$$R(r-1)f''f' - a^{p-1}((r-1)f'f^{p+1} + (p-1)f''f^p)$$
$$= a^{p-1}((r-1)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1} - (p-1)f''f^p)$$
$$= a^{p-1}((r-p)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1})$$

Gleichung (2) geht über in

$$(2)^a \quad \begin{cases} \dfrac{(c'-c+a)^r}{a^{r-1}}f'^2F'(c) = (c'-c)G(c) + H(c), \\ \text{worin} \\ G(c) = \dfrac{(r-p)f''f^p - (r-1)f'f^{p+1}}{(p-1)f^p}, \\ H(c) = (r-1)f' - af''. \end{cases}$$

(3) Ist 1) $c'-c$ hinreichend klein und $H(c) \gtrless 0$, so ist das Vorzeichen

von $F'(c)$ = dem von $H(c)$

Ist 2) $H(c) = 0$, so ist jenes = dem von $G(c)$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $p \geqq 2$.

1. Fall: $p > 2$.

$$H(c) = ((r-1)\frac{f'}{f''} - a)f'' \gtrless 0.$$

Haben f'' und f' entgegengesetzte Zeichen, so ist $(r-1)\frac{f'}{f''} - a < 0$, haben sie gleiche, so $(r-1)\frac{f'}{f''} > 0$.

(Siehe die Bedeutung von p § 33 (1)).

also:	Vorzeichen von	$(r-1)\frac{f'}{f''} - a$	= dem von	$f''f'$
	„ „	$H(c)$	= „ „	f'
nach (3) 1)	„ „	$F'(c)$	= „ „	f'.

2. Fall: $p = 2$.

$$\text{Da } a = \frac{\binom{r}{2}2}{r}\frac{f'}{f''} = (r-1)\frac{f'}{f''} \text{ so ist } H(c) = 0,$$

so dass also (3) 2) gilt.

Aus Vorstehendem lässt sich schliessen:

(4) Ist $(c'-c)$ sehr klein und entweder $p > 2$ oder $p = 2$ und dabei $G(c).f'(c) > 0$, so wird der Absolutwert von $(x-x_1)$ in § 33 (1) grösser, wenn man c um eine unendlich kleine positive Grösse θ ändert.

(5) Folgesatz: Ist die Bedingung in (4) für alle c zwischen c und w erfüllt, so ist der Absolutwert von $(x-x_1)$ um so grösser, je näher c an w, bei constantem x_1 und c'.

Dies gilt auch wenn an der Stelle c das p nicht constant ist, sondern e_1 von p in q übergeht.

Denn unter der Voraussetzung in (4) ist, wenn das $F(c)$ in (1) mit $F_p(c)$ bezeichnet wird, absolut:

$$F_p(c+\theta) > F_p(c)$$
$$-rf(x_1)F_p(c+\theta) > -rf(x_1)F_p(c)$$
$$-rf(x_1)F_p(c+\theta) > -rf(x_1)F_p(c+\theta)$$

um so mehr $\qquad$ „ $\qquad > -rf(x_1)F_p(c)$ $\qquad$ (W. z. b.).

Im Allgemeinen lässt sich nicht sagen, dass $(x-x_1)$ absolut um so grösser sei, je näher c an w liegt, einem entfernteren c kann eine grössere Annäherung an die Wurzel entsprechen, auch wenn $c'-c$ sehr klein ist.

Wir haben uns bisher mit den Problemen der näherungsweisen Bestimmung und Trennung der reellen Wurzeln von einem beliebigen Werte aus beschäftigt.

Im nächsten Artikel wollen wir die analogen Probleme für die complexen Wurzeln in Untersuchung nehmen.

IX.

Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation $XYZ = T^3$.

Par

Paul Appell.

Les coordonnées d'un point de cette surface peuvent s'exprimer en fonction de deux paramètres u et v de la manière suivante:

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= Te^{\alpha u+\alpha^2 v} \\ Y &= Te^{\alpha^2 u+\alpha v} \\ Z &= Te^{u+v} \end{aligned}$$

α et α^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, c'est à dire vérifiant la relation

$$1+\alpha+\alpha^2 = 0$$

Les courbes représentées par les équations (1) quand on y suppose u ou v constant sont les lignes asymptotiques de la surface. Pour le demontrer nous allons faire voir que le plan osculateur à la ligne $v = v_1$ est tangent à la surface. Soit

$$(2) \qquad AX+BY+CZ+DT = 0$$

l'équation du plan osculateur à la ligne $v = v_1$ au point $u = u_1$; l'équation

$$Ae^{\alpha u+\alpha^2 v_1}+Be^{\alpha^2 u+\alpha v_1}+Ce^{u+v_1}+D = 0$$

devra admettre la racine triple $u = u_1$. Il faut donc que u_1 soit racine de cette équation et de ses deux premières dérivées; ce qui donne pour déterminer les coefficients A, B, C, D les relations

$$Ae^{\alpha u_1+\alpha^2 v_1} + Be^{\alpha^2 u_1+\alpha v_1} + Ce^{u_1+v_1} + D = 0$$
$$\alpha Ae^{\alpha u_1+\alpha^2 v_1} + \alpha^2 Be^{\alpha^2 u_1+\alpha v_1} + Ce^{u_1+v_1} = 0$$
$$\alpha^2 Ae^{\alpha u_1+\alpha^2 v_1} + \alpha Be^{\alpha^2 u_1+\alpha v_1} + Ce^{u_1+v_1} = 0$$

Ajoutons ces relations membre a membre; nous en déduisons

$$3Ce^{u_1+v_1} + D = 0$$

Multiplions la deuxième des relations par α, la troisième par α^2 et ajoutons les de nouveau; nous avons

$$3Be^{\alpha^2 u_1+\alpha v_1} + D = 0$$

Enfin multiplions la deuxième par α^2, la troisième par α et ajoutons, nous avons:

$$3Ae^{\alpha u_1+\alpha^2 v_1} + D = 0$$

L'équation (2) du plan osculateur est donc

(3) $$Xe^{-\alpha u_1-\alpha^2 v_1} + Ye^{-\alpha^2 u_1-\alpha v_1} + Ze^{-u_1-v_1} - 3T = 0$$

Or il est facile de voir que le plan est tangent à la surface. En effet l'equation du plan tangent à la surface au point

$$X_1 = T_1 e^{\alpha u_1+\alpha^2 v_1}$$
$$Y_1 = T_1 e^{\alpha^2 u_1+\alpha v_1}$$
$$Z_1 = T_1 e^{u_1+v_1}$$

est

$$XY_1Z_1 + YZ_1X_1 + ZX_1Y_1 - 3TT_1^2 = 0$$

ou

$$\frac{X}{X_1} + \frac{Y}{Y_1} + \frac{Z}{Z_1} - \frac{3T}{T_1} = 0$$

ou enfin

$$Xe^{-\alpha u_1-\alpha^2 v_1} + Ye^{-\alpha^2 u_1-\alpha v_1} + Ze^{-u_1-v_1} - 3T = 0$$

ce qui est justement l'équation (3).

La ligne $v = v_1$ est donc bien une ligne asymptotique de la surface. On verrait de même que la ligne $u = u_1$ est une ligne asymptotique de la surface.

Paris, le 21 Mars 1877.

X.

Zur Kinematik des Auges.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1. Allgemeine directe Stellungsänderung durch eine Rotation.

Bekanntlich lässt sich ein starres System durch Rotation um eine Axe aus jeder Anfangslage in eine beliebig gegebene Stellung bringen. Die Lösung wird gewöhnlich constructiv gegeben, doch eignet sich gerade für diese Aufgabe die analytische Behandlung besonders, damit der Einblick nicht durch die Vorstellung einer so grossen Mannichfaltigkeit, wie jene Bewegung sie darbietet, bedingt sei.

Da es sich nur um die Stellung handelt, so können wir einen Punkt des Systems als fest annehmen. Dieser sei Anfang der im Raume festen Coordinaten xyz und der am bewegten System festen $x_1y_1z_1$, welche durch die Relationen

$$\left.\begin{aligned} x &= ax_1 + a_1y_1 + a_2z_1 \\ y &= bx_1 + b_1y_1 + b_2z_1 \\ z &= cx_1 + c_1y_1 + c_2z_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

verbunden seien. Die Axensysteme der xyz und $x_1y_1z_1$ mögen jetzt die Anfangs- und Endstellung repräsentiren. Es seien also als constant gegeben die Richtungscosinus

der Axen der		x_1	y_1	z_1 gegen
die Axen der	x	a	a_1	a_2
	y	b	b_1	b_2
	z	c	c_1	c_2

Die Richtungscosinus der gesuchten Rotationsaxe seien A, B, C bezüglich auf die Axen der x, y, z.

Geht nun ein Punkt P durch Rotation um dieselbe in P_1 über, und sind x, y, z die Coordinaten von P, und x_1, y_1, z_1 die von P_1 in Bezug auf das Raumsystem, so wird derselbe Punkt P_1 bezüglich auf die Axen der x_1, y_1, z_1 durch die Coordinaten x, y, z, bezüglich auf die Axen der x, y, z durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bestimmt. Folglich ist gemäss den Relationen (1)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= ax + a_1 y + a_2 z \\ y_1 &= by + b_1 y + b_2 z \\ z_1 &= cx + c_1 y + c_2 z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nach diesen vorbereitenden Festsetzungen sind die Bedingungen der Rotation aufzustellen. Erstens müssen P und P_1 auf einer Ebene liegen, die normal zur Rotationsaxe ist. Diese schneide letztere in N im Abstand $= u$ vom Anfangspunkt. Ihre Gleichung, sofern beide Punkte sie befriedigen, lautet:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz &= u \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= u \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Zweitens muss $PN = P_1N$ sein. Bezeichnet r den Radiusvector, der vermöge der Gl. (2) für P und P_1 denselben Wert hat, so ist bedingungslos

$$PN^2 = P_1N^2 = r^2 - u^2$$

und wir brauchen nur zu notiren:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = r^2$$

Drittens muss der Winkel $PNP_1 = \mu$ für alle Punkte (xyz) denselben gegebenen Wert haben. Dies wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{(x - Au)(x_1 - Au)}{r^2 - u^2} + \frac{(y - Bu)(y_1 - Bu)}{r^2 - u^2} + \frac{(z - Cu)(z_1 - Cu)}{r^2 - u^2} = \cos\mu$$

oder, entwickelt mit Anwendung von (3):

$$\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 - u^2}{r^2 - u^2} = \cos\mu$$

woraus:

$$u^2(1 - \cos\mu) = xx_1 + yy_1 + zz_1 - (x^2 + y^2 + z^2)\cos\mu$$

das ist nach (2) und (3):

$$\begin{aligned}(Ax + By + Cz)^2(1 - \cos\mu) = {} & x(ax + a_1y + a_2z) + y(bx + b_1y + b_2z) \\ & + z(cx + c_1y + c_2z) - (x^2 + y^2 + z^2)\cos\mu\end{aligned}$$

Um nun aus vorstehenden Relationen die Werte von A, B, C zu finden, identificiren wir bloss die Coefficienten der letzten Gleichung. Dies giebt:

$$\left.\begin{aligned} A^2(1-\cos\mu) &= a-\cos\mu \\ B^2(1-\cos\mu) &= b_1-\cos\mu \\ C^2(1-\cos\mu) &= c_2-\cos\mu \\ 2BC(1-\cos\mu) &= b_2+c_1 \\ 2CA(1-\cos\mu) &= c+a_2 \\ 2AB(1-\cos\mu) &= a_1+b \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Durch Addition der 3 ersten Gleichungen erhält man:

$$\cos\mu = \frac{a+b_1+c_2-1}{2} \tag{5}$$

durch Division je zweier der 3 letzten:

$$A(b_2+c_1) = B(c+a_2) = C(a_1+b) = D \tag{6}$$

und zwar ist

$$D^2 = BC(c+a_2)(a_1+b) = \frac{(b_2+c_1)(c+a_2)(a_1+b)}{2(1-\cos\mu)}$$

oder nach (5)

$$D^2 = \frac{(b_2+c_1)(c+a_2)(a_1+b)}{3-a-b_1-c_2} \tag{7}$$

Hiermit sind die 3 ersten Gleichungen erfüllt; da aber

$$\begin{aligned} (c+a_2)(a_1+b) &= ca_1+ba_2+a_1a_2+bc \\ &= (b_2+c_1a)+(c_1+ab_2)-(b_1b_2+c_1c_2)-(b_1c_1+b_2c_2) \\ &= (b_2+c_1)(1+a-b_1-c_2) = 2(b_2+c_1)(a-\cos\mu) \\ &= 2A^2(1-\cos\mu)(b_2+c_1) \end{aligned}$$

und analog

$$(a_1+b)(b_2+c_1) = 2B^2(1-\cos\mu)(c+a_2)$$

ist, so folgt nach Multiplication die sechste und ebenso die übrigen. Daher giebt es stets eine und nur eine Rotationsaxe und einen Rotationswinkel μ bestimmt durch Gl. (6) (7) (5), welche das Axensystem aus einer in die andre gegebene Stellung überführen.

Will man umgekehrt aus gegebener Rotation um gegebene Axe die resultirende Stellung finden, so hat man unmittelbar:

$$a = A^2+(1-A^2)\cos\mu; \quad b_1 = B^2+(1-B^2)\cos\mu$$
$$c_2 = C^2+(1-C^2)\cos\mu$$

Von den übrigen Richtungscosinus sind zunächst die Summen dreier Pare bekannt. Die Differenzen derselben Pare werden durch die allgemeingültigen Relationen

$$(b_2-c_1)(a_1-b)=(c+a_2)(1+a+b_1+c_2)$$
$$(c-a_2)(a_1-b)=(b_2+c_1)(1+a+b_1+c_2)$$

auf eine, z. B. a_1-b, zurückgeführt, die dann allein irrational durch

$$(a_1-b)^2+(a+b_1)^2=(1+c_2)^2$$

bestimmt ist. Setzt man für a, b_1, c_2, b_2+c_1, $c+a_2$, a_1+b ihre Werte, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}b_2\\c_1\end{array}\right\}=BC(1-\cos\mu)\pm A\sin\mu\\[2ex]\left.\begin{array}{l}c\\a_2\end{array}\right\}=CA(1-\cos\mu)\pm B\sin\mu\\[2ex]\left.\begin{array}{l}a_1\\b\end{array}\right\}=AB(1-\cos\mu)\pm C\sin\mu\end{array}\right\}\qquad(8)$$

§. 2. Abhängigkeit der Augenstellung von der Sehrichtung.

Der Augapfel lässt sich als eine Kugel betrachten, die sich in ihrer Oberfläche verschiebt; ihr Mittelpunkt O ist daher ihr fester Punkt. Selbstverständlich wird die Augenhöhle immer als ruhend angenommen, und jede Bewegung des Auges bedeutet eine zu ihr relative. Alsdann sind überhaupt 3 unabhängige Bewegungen des Auges denkbar, von denen aber dasselbe nur 2 ausführen kann. Da nun die Sehrichtung nach 2 Dimensionen variabel ist, so ist durch sie immer die Augenstellung vollständig bestimmt; es handelt sich um den analytischen Ausdruck der Abhängigkeit.

Das Listing'sche Gesetz, welches die Bedingung enthält, setzt eine gewisse Normalstellung des Auges voraus, auf welche alle andern Stellungen Bezug haben. Das Gesetz besteht dann darin, dass die Sehlinie, d. i. der durch den Mittelpunkt der Linse gehende Radius, von der Normalstellung aus nach jeder andern Stellung hin längs einer Ebene, und diese in sich selbst gleitet, oder einfacher, dass der Augapfel von der Normalstellung aus nur um Axen normal zur Sehlinie rotiren kann.

In der Normalstellung mögen die am Auge festen Axen der x_1, y_1, z_1 mit den im Raume festen Axen der x, y, z zusammenfallen, und zwar sei die Sehlinie Axe der z_1. Wenn dann das Auge von der

Normalstellung aus rotirt, so ist $C=0$, daher nach (6) $D=0$, und demzufolge wieder nach (6)

$$b_2+c_1=0; \quad c+a_2=0 \tag{9}$$

ferner nach der dritten Gl. (4)

$$c_2=\cos\mu \tag{10}$$

mithin zufolge (5)

$$c_2=a+b_1-1 \tag{11}$$

Jetzt erhält man mit Anwendung von (9):

$$a=b_1c_2-c_1b_2=b_1c_2+b_2^2$$
$$b_1=c_2a-a_2c=c_2a+a_2^2$$

Zu beiden einzeln addirt (11) giebt:

$$1+c_2=(1+c_2)b_1+b_2^2=(1+c_2)a+a_2^2 \tag{12}$$

Endlich findet man mit Anwendung von (9), dann von (12):

$$-a_1a_2=a_1c=b_2+c_1a=b_2(1-a)=\frac{a_2^2b^2}{1+c_2}$$
$$-bb_2=bc_1=a_2+cb_1=a_2(1-b_1)=\frac{a_2b_2^2}{1+c_2}$$

Demnach entspricht der Sehrichtung $(a_2b_2c_2)$ die Augenstellung:

$$\left.\begin{aligned} a&=1-\frac{a_2^2}{1+c_2}; \quad b=-\frac{a_2b_2}{1+c_2}; \quad c=-a_2 \\ a_1&=-\frac{a_2b_2}{1+c_2}; \quad b_1=1-\frac{b_2^2}{1+c_2}; \quad c_1=-b_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Das so specialisirte Orthogonalcoefficientensystem hat folgende Eigenschaft, von der wir Anwendung zu machen haben. Bezeichnen L, M, N und L'', M'', N'' die Richtungscosinus einer beliebigen Geraden gegen die Axen der x, y, z und bzhw. der x_1, y_1, z_1, so ist nach (13)

$$\left.\begin{aligned} L''&=aL+bM+cN=L-a_2K \\ M''&=a_1L+b_1M+c_1N=M-b_2K \\ N''&=a_2L+b_2M+c_2N=-N+(1+c_2)K \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wo

$$K=\frac{a_2L+b_2M}{1+c_2}+N=-\frac{a_2L''+b_2M''}{1+c_2}+N'' \tag{15}$$

gesetzt ist. Die Grösse K möge der Modul der Geraden in Bezug auf die Sehrichtung heissen. Ist derselbe null, so hat man:

$$L''=L; \quad M''=M; \quad N''=-N \tag{16}$$

Dies findet statt bei allen Geraden, die in der Ebene

$$a_2x + b_2y + (1 + c_2)z = 0$$

liegen (oder ihr parallel sind).

§. 3. Verfolgung einer geraden Linie mit dem Auge.

Seien P und P' zwei äussere Punkte, bei deren Anblick das Auge die in (13) ausgedrückte und bzhw. die gleichbezeichnete, durch einen Strich unterschiedene Stellung haben. Unterscheidet man nun durch 2 Striche die Richtungscosinus der Augenaxen beim Anblick von P' gegen diejenigen, welche beim Anblick von P stattfinden, so ist

$$\begin{aligned}
a'' &= aa' + bb' + cc'; & a_1'' &= aa_1' + bb_1' + cc_1'; & a_2'' &= aa_2' + bb_2' + cc_2' \\
b'' &= a_1a' + b_1b' + c_1c'; & b_1'' &= a_1c_1' + b_1b_1' + c_1c_1'; & b_2'' &= a_1a_2' + b_1b_2' + c_1c_2' \\
c'' &= a_2a' + b_2b' + c_2c'; & c_1'' &= a_2a_1' + b_2b_1' + c_2c_1'; & c_2'' &= a_2a_2' + b_2b_2' + c_2c_2'
\end{aligned} \tag{17}$$

Führt man die, beiden Punkten entsprechenden Werte (13) ein und setzt zur Abkürzung

$$e = \frac{a_2a_2' + b_2b_2'}{(1 + c_2)(1 + c_2')} + 1 \tag{18}$$

so kommt:

$$\begin{aligned}
a'' &= 1 - \frac{a_2^2}{1 + c_2} - \frac{a_2'^2}{1 + c_2'} + ea_2a_2'; & a_1'' &= -\frac{a_2b_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'b_2'}{1 + c_2'} + ea_2b_2' \\
b'' &= -\frac{a_2b_2}{1 + c_2} - \frac{a_2'b_2'}{1 + c_2'} + eb_2a_2'; & b_1'' &= 1 - \frac{b_2^2}{1 + c_2} - \frac{b_2'^2}{1 + c_2'} + eb_2b_2' \\
c'' &= a_2 + a_2' - ea_2'(1 + c_2); & c_1'' &= b_2 + b_2' - eb_2'(1 + c_2)
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
a_2'' &= a_2 + a_2' - ea_2(1 + c_2') \\
b_2'' &= b_2 + b_2' - eb_2(1 + c_2') \\
c_2'' &= -1 - c_2 - c_2' + e(1 + c_2)(1 + c_2')
\end{aligned}$$

Verfolgt nun das Auge die Gerade PP', so gleitet die Sehlinie an der Ebene OPP', rotirt also um deren Normale. Rotirte dann der Augapfel selbst um diese Normale, bewegte er sich demnach ebenso wie er sich nach Listing'schen Gesetz von der Normalstellung aus bewegt, so würde er beim Anblick von P' in einer Stellung ankommen, welche durch 3 Striche unterschieden sei, und für welche gemäss den Gl. (13)

$$a''' = 1 - \frac{a_2''^2}{1 + c_2''}; \quad b''' = -\frac{a_2''b_2''}{1 + c_2''}; \quad c''' = -a_2''$$

wäre. Die gedachte Stellung differirt von der wirklichen um einen Winkel δ bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\delta = a''a''' + b''b''' + c''c'''$$
$$= a'' - c''a_2'' - a_2''\frac{a''a_2'' + b''b_2''}{1+c_2''}$$
$$= a'' - c''a_2'' + a_2''\frac{c''c_2''}{1+c_2''} = a'' - \frac{c''a_2''}{1+c_2''}$$
$$= \frac{a'' + c_2''a'' - c''a_2''}{1+c_2''} = \frac{a'' + b_1''}{1+c_2''} \quad (20)$$

welcher die dazu nötige Verdrehung des Auges um die Sehlinie misst. Führt man die obigen Werte ein, so kommt:

$$\cos\delta = \frac{e^2(1+c_2)(1+c_2')}{e(1+c_2)(1+c_2') - c_2 - c_2'} - 1 \quad (21)$$

Sei P_0 ein Punkt auf PP' und bezeichnen α, ϑ die Winkel POP', POP_0; dann sind die Richtungscosinus von OP_0

$$\left.\begin{array}{c} a_3 = \dfrac{a_2\sin(\alpha-\vartheta) + a_2'\sin\vartheta}{\sin\alpha}; \quad b_3 = \dfrac{b_2\sin(\alpha-\vartheta) + b_2'\sin\vartheta}{\sin\alpha} \\ c_3 = \dfrac{c_2\sin(\alpha-\vartheta) + c_2'\sin\vartheta}{\sin\alpha} \end{array}\right\} \quad (22)$$

Lässt man ϑ um $\partial\vartheta$ wachsen und entwickelt die veränderten Richtungscosinus bis auf 2. Ordnung, so gehen a_3, b_3, c_3 über in

$$a_3\left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + a_4\partial\vartheta, \quad b_3\left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + b_4\partial\vartheta, \quad c_3\left(1 - \frac{\partial\vartheta^2}{2}\right) + c_4\partial\vartheta \quad (23)$$

wo a_4, b_4, c_4 die Differentialquotienten von a_3, b_3, c_3 nach ϑ bezeichnen. Setzt man nun an die Stelle der Geraden PP' ein unendlich kleines Stück derselben von P_0 bis zum consecutiven Punkte, so erhält man nach Substitution der Grössen (22) und (23) für a_2, b_2, c_2 und a_2', b_2', c_2':

$$2(1-\cos\delta) = \frac{1 - c_3^2 - c_4^2}{(1+c_3)^2}\partial\vartheta^2 = \frac{(a_3b_4 - b_3a_4)^2}{(1+c_3)^2}\partial\vartheta^2$$

daher ist der unendlich kleine Verdrehungswinkel für das Linienelement

$$\delta = \pm\frac{a_3b_4 - b_3a_4}{1+c_3}\partial\vartheta \quad (24)$$

§. 4. Rotation, welche das Auge aus einer Stellung in die andre führt.

Bezeichnen A, B, C die Richtungscosinus der Axe, um welche das Auge rotiren müsste, um vom Anblick von P direct zum Anblick

von P' zu gelangen, in Bezug auf die Axen der x, y, z und A'', B'', C'' dieselben in Bezug auf die Augenaxen in ihrer Anfangsstellung, so kennt man zunächst die Werte der letztern aus (6), (7), nämlich

$$A'' = \frac{D''}{b_2''+c_1''}; \quad B'' = \frac{D''}{c''+a_2''}; \quad C'' = \frac{D''}{a_1''+b''}$$

$$D''^2 = \frac{(b_2''+c_1'')(c''+a_2'')(a_1''+b'')}{3-a''-b_1''+c_2''}$$

und zwar ist, wie sich aus (19) ergiebt,

$$b_2''+c_1'' = \left(\frac{a_2}{1+c_2} - \frac{a_2'}{1+c_2'}\right)(a_2b_2' - b_2a_2')$$

$$c''+a_2'' = -\left(\frac{b_2}{1+c_2} - \frac{b_2'}{1+c_2'}\right)(a_2b_2' - b_2a_2')$$

$$a_1''+b'' = -\left(\frac{a_2}{1+c_2} - \frac{a_2'}{1+c_2'}\right)\left(\frac{b_2}{1+c_2} - \frac{b_2'}{1+c_2'}\right)(1+c_2)(1+c_2')$$

$$3-a''-b_1''-c_2'' = 4-e^2(1+c_2)(1+c_2')$$

$$D'' = \frac{\left(\frac{a_2}{1+c_2} - \frac{a_2'}{1+c_2'}\right)\left(\frac{b_2}{1+c_2} - \frac{b_2'}{1+c_2'}\right)(a_2b_2' - b_2a_2')}{\sqrt{\frac{4}{(1+c_2)(1+c_2')} - e^2}}$$

daher

$$EA'' = \frac{b_2}{1+c_2} - \frac{b_2'}{1+c_2'}; \quad EB'' = \frac{a_2'}{1+c_2'} - \frac{a_2}{1+c_2}$$

$$EC'' = -\frac{a_2b_2' - b_2a_2'}{(1+c_2)(1+c_2')}; \quad E^2 = \frac{4}{(1+c_2)(1+c_2')} - e^2$$

Da, wie man hieraus sieht,

$$-\frac{a_2A''+b_2B''}{1+c_2} + C'' = 0$$

ist, so ergiebt sich der Satz:

Lässt man durch Rotation eine Augenstellung direct in eine beliebige andere übergehen, so ist der Modul der Rotationsaxe stets null.

Demnach ist gemäss (16)

$$\left.\begin{aligned} EA = \frac{b_2}{1+c_2} - \frac{b_2'}{1+c_2'}; \quad EB = \frac{a_2'}{1+c_2'} - \frac{a_2}{1+c_2} \\ EC = \frac{a_2b_2' - b_2a_2'}{(1+c_2)(1+c_2')} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Diese Rotation weicht offenbar von dem stetigen Verlaufe der Augenbewegung ab. Nimmt man aber statt der Geraden PP' das unendlich kleine Stück, wie es in §. 3. bestimmt ward, so erhält man die momentane Rotation. Die Richtungscosinus ihrer Axe seien A_0, B_0, C_0; nach der am Ende von §. 3. angegebenen Substitution findet man ohne Schwierigkeit:

$$E_0 A_0 = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ 1+c_3 & c_4 \end{vmatrix}; \quad E_0 B_0 = \begin{vmatrix} 1+c_3 & c_4 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}; \quad E_0 C_0 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$E_0^2 = 2(1+c_3) - c_4^2$$

und nach Einführung der Werte (22):

$$\left.\begin{aligned} E_0 A_0 \sin\alpha &= b_2 c_2' - c_2 b_2' + b_2 \cos(\alpha - \vartheta) - b_2' \cos\vartheta \\ E_0 B_0 \sin\alpha &= c_2 a_2' - a_2 c_2' - a_2 \cos(\alpha - \vartheta) + a_2' \cos\vartheta \\ E_0 C_0 \sin\alpha &= a_2 b_2' - b_2 a_2' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Sind

$$x = A_0 u, \quad y = B_0 u, \quad z = C_0 u$$

die Coordinaten eines Punkts auf der momentanen Rotationsaxe, so stellen die Gl. (27) die von letzterer erzeugte konische Fläche in Parametern u, ϑ dar. Nach Elimination von u wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{b_2\{c_2' + \cos(\alpha - \vartheta)\} - b_2'(c_2 + \cos\vartheta)}{a_2 b_2' - b_2 a_2'} \\ \frac{y}{z} &= \frac{a_2'(c_2 + \cos\vartheta) - a_2\{c_2' + \cos(\alpha - \vartheta)\}}{a_2 b_2' - b_2 a_2'} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

woraus:

$$\frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c_2 + \cos\vartheta = 0; \qquad \frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c_2' + \cos(\alpha - \vartheta) = 0$$

und nach Elimination von ϑ:

$$\left(\frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c_2\right)^2 + \left(\frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c_2'\right)^2 - 2\left(\frac{a_2 x + b_2 y}{z} + c\right)\left(\frac{a_2' x + b_2' y}{z} + c'\right)\cos\alpha$$
$$= \sin^2\alpha$$

oder, weil

$$a_2 a_2' + b_2 b_2' + c_2 c_2' = \cos\alpha$$

ist:

$$x^2 + y^2 = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_2' & x \\ b_2 & b_2' & y \\ c_2 & c_2' & z \end{vmatrix} \frac{1}{\sin\alpha} \right\}^2$$

oder, wenn a_0, b_0, c_0 die Richtungscosinus der Ebene OPP' bezeichnen:

$$x^2 + y^2 = (a_0 x + b_0 y + c_0 z)^2$$

Setzt man

$$c_0 = \cos 2\beta$$

und geht durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a_0(x_0\cos\beta + z_0\sin\beta) - b_0 y_0}{\sin 2\beta} \\ y &= \frac{b_0(x_0\cos\beta + z_0\sin\beta) + a_0 y_0}{\sin 2\beta} \\ z &= -x_0\sin\beta + z_0\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

zu einem neuen Coordinatensystem über, so lautet die Gleichung der konischen Fläche:

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{c_0} = z_0^2 \tag{30}$$

Der Ort der momentanen Rotationsaxe des Auges, welches eine gerade Linie verfolgt, ist also ein Kegel, dessen Schnitte normal zu einer Axe gleichseitige Hyperbeln sind.

§. 5. Specielle Augenbewegungen.

Die y Axe legen wir durch die Mittelpunkte beider Augen und nennen sie horizontal, die x Axe, welche durch die bereits bestimmte z Axe mitbestimmt ist, vertical.

Verfolgt das Auge eine Verticallinie, so beschreibt die Sehlinie eine Ebene, die durch die x Axe geht; der Richtungscosinus ihrer Normale gegen die x Axe ist also null, und man hat:

$$a_0 = \frac{1}{\sin\alpha}\begin{vmatrix} b_2 & b_2' \\ c_2 & c_2' \end{vmatrix} = 0$$

Der Anfang dieser Verticale sei in der yz Ebene, so dass auch $a_2 = 0$ wird. Dann kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 0; & b_2 &= \sin\gamma; & c_2 &= \cos\gamma \\ a_2' &= \sin\alpha; & b_2' &= \cos\alpha\sin\gamma; & c_2' &= \cos\alpha\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und erhält nach (17):

$$\begin{aligned} a'' &= \cos\alpha\frac{\cos\alpha + \cos\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & a_1'' &= -\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & a_2'' &= \sin\alpha \\ b'' &= \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & b_1'' &= \frac{\cos\alpha + \cos\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & b_2'' &= 0 \\ c'' &= -\sin\alpha\frac{\cos\alpha + \cos\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & c_1'' &= \frac{\sin^2\alpha\sin\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma}; & c_2'' &= \cos\alpha \end{aligned} \tag{32}$$

Da hier

$$a''' = \cos\alpha; \quad b''' = 0; \quad c''' = -\sin\alpha$$

ist, so ergiebt sich sogleich, dass

$$\cos\delta = b_1'' = \frac{\cos\alpha + \cos\gamma}{1 + \cos\alpha\cos\gamma} \tag{33}$$

Für ein unendlich kleines Stück der Verticale beginnend in

$$a_3 = \sin\vartheta; \quad b_3 = \sin\gamma\cos\vartheta; \quad c_3 = \cos\gamma\cos\vartheta$$

wird nach (24) der Verdrehungswinkel

$$\delta = -\frac{\sin\gamma\partial\vartheta}{1 + \cos\gamma\cos\vartheta} \tag{34}$$

Die Richtungscosinus der Rotationsaxe für directen Uebergang vom Anfang zum Ende werden nach (25)

$$\left.\begin{array}{c} A = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{m}, \quad B = \dfrac{\cot\frac{\gamma}{2}}{m}, \quad C = -\dfrac{1}{m} \\ m^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \cot^2\frac{\gamma}{2} \end{array}\right\} \tag{35}$$

die der momentanen Rotationsaxe nach (27)

$$\left.\begin{array}{c} A_0 = \dfrac{\sin\vartheta}{n}; \quad B_0 = \dfrac{\cos\vartheta + \cos\gamma}{n\sin\gamma}; \quad C_0 = -\dfrac{1}{n} \\ n^2 = 1 + \left(\dfrac{1 + \cos\gamma\cos\vartheta}{\sin\gamma}\right)^2 \end{array}\right\} \tag{36}$$

Letztere beschreibt, da hier

$$a_0 = 0; \quad b_0 = \cos\gamma; \quad c_0 = -\sin\gamma; \quad \beta = \frac{\gamma + R}{2}$$

ist, den Kegel

$$x_0^2 = \frac{y_0^2}{\sin\gamma} + z_0^2$$

dessen Axenstellungen durch die Relationen

$$x = -y_0; \quad y = x_0\cos\frac{\gamma+R}{2} + z_0\sin\frac{\gamma+R}{2}$$

$$z = -x_0\sin\frac{\gamma+R}{2} + z_0\cos\frac{\gamma+R}{2}$$

erkennbar sind. Er geht in den geraden Kegel

$$x^2+y^2=z^2$$

über, wenn $\gamma=\mathrm{R}$, d. i. wenn die gesehene Verticale durch die y Axe geht.

Die Gerade, welche das Auge verfolgt, sei jetzt horizontal und zwar der y Axe parallel (eine beliebige Horizontale würde optisch einer beliebigen Geraden gleichbedeutend sein, weil sich letztere immer vom Auge aus auf eine Horizontale projiciren lässt); ihr Anfang liege in der xz Ebene. Dann gelten die vorigen Resultate mit Vertauschung der x und y, sowie der a und b, des Index 1 und fehlenden Index; an die Stelle von α, γ, ϑ trete α', γ', ϑ'. Das Ende der Verticalen und Horizontalen sei ihr Durchschnittspunkt P'; um diesen sei in ihrer Ebene ein Kreis mit dem Radius ε beschrieben. Ist $OP'=u$, so sind die Coordinaten eines Punkts des Kreises

$$x=ua_2'+\varepsilon\cos\varphi;\quad y=ub_2'+\varepsilon\sin\varphi;\quad z=uc_2' \tag{37}$$

und sein Radiusvector

$$\varkappa=\sqrt{u^2+\varepsilon^2+2u\varepsilon(a_2'\cos\varphi+b_2'\sin\varphi)} \tag{38}$$

Die Identität von P' für beide Gerade ergiebt die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\cos\alpha'\sin\gamma'\\ \cos\alpha\sin\gamma&=\sin\alpha'\\ \cos\alpha\cos\gamma&=\cos\alpha'\cos\gamma'\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha=\frac{\cos\gamma'}{k};\quad \sin\alpha=\frac{\sin\gamma'\cos\gamma}{k}\\ &\cos\alpha'=\frac{\cos\gamma}{k};\quad \sin\alpha'=\frac{\sin\gamma\cos\gamma'}{k}\\ &k^2=1-\sin^2\gamma\sin^2\gamma'\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$a_2'=\frac{\cos\gamma\sin\gamma'}{k};\quad b_2'=\frac{\cos\gamma'\sin\gamma}{k};\quad c_2'=\frac{\cos\gamma\cos\gamma'}{k} \tag{41}$$

Verlegt man in (36) den variabeln Punkt P_0 nach P', so dass ϑ in α übergeht, so wird für die Verticale

$$A_0=\frac{\sin\gamma'\cos\gamma}{nk};\quad B_0=\frac{\cos\gamma'+k\cos\gamma}{nk\sin\gamma};\quad C_0=-\frac{1}{n} \tag{42}$$

für die Horizontale

$$B_0'=\frac{\sin\gamma\cos\gamma'}{n'k};\quad A_0'=\frac{\cos\gamma+k\cos\gamma'}{n'k\sin\gamma'};\quad C_0'=-\frac{1}{n'} \tag{43}$$

Diese 2 Rotationsaxen für momentane Vertical- und Horizontalbewegung des Sehobjects vergleichen wir mit derjenigen, welche einer Bewegung in beliebiger Richtung gemessen durch φ entspricht. Nehmen wir zum Ausgangspunkt geradliniger Bewegung bis P', also an der Stelle des Punkts P, den Punkt (37), so ist für a_2, b_2, c_2 zu substituiren

$$\frac{ua_2'+\varepsilon\cos\varphi}{\varkappa},\quad \frac{ub_2'+\varepsilon\sin\varphi}{\varkappa},\quad \frac{uc_2'}{\varkappa}$$

Für $\vartheta=\alpha$ gehen a_3, b_3, c_3 über in a_2', b_2', c_2', und a_4, b_4, c_4 in

$$\frac{a_2'\cos\alpha-a_2}{\sin\alpha},\quad \frac{b_2'\cos\alpha-b_2}{\sin\alpha},\quad \frac{c_2'\cos\alpha-c_2}{\sin\alpha}$$

wo

$$\cos\alpha = a_2a_2'+b_2b_2'+c_2c_2' = \frac{u+\varepsilon(a_2'\cos\varphi+b_2'\sin\varphi)}{\varkappa}$$

$$\sin\alpha = \frac{\varepsilon}{\varkappa}\sqrt{1-(a_2'\cos\varphi+b_2'\sin\varphi)^2}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\cos\psi = a_2'\cos\varphi+b_2'\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$\cos\alpha = \frac{u+\varepsilon\cos\psi}{\varkappa};\quad \sin\alpha = \frac{\varepsilon\sin\psi}{\varkappa}$$

und man erhält:

$$a_4 = \frac{a_2'\cos\psi-\cos\varphi}{\sin\psi};\quad b_4 = \frac{b_2'\cos\psi-\sin\varphi}{\sin\psi};\quad c_4 = c_2'\cot\psi$$

Bezeichnen $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $C(\varphi)$ die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe für Bewegung des Sehobjects in der Richtung φ, so findet man nach Einsetzung der vorstehenden Werte:

$$E_0\sin\psi.A(\varphi) = (1+c_2')\sin\varphi - b_2'\cos\psi = (1+c_2'-b_2'^2)\sin\varphi - a_2'b_2'\cos\varphi$$

$$E_0\sin\psi.B(\varphi) = a_2'\cos\psi-(1+c_2')\cos\varphi = a_2'b_2'\sin\varphi-(1+c_2'-a_2'^2)\cos\varphi$$

$$E_0\sin\psi.C(\varphi) = b_2'\cos\varphi - a_2'\sin\varphi$$

$$(E_0\sin\psi)^2 = 2(1+c_2')\sin^2\psi - c_2'^2\cos^2\psi$$

oder

$$A(\varphi) = \frac{\cos\gamma}{N}\{(\cos\gamma+k\cos\gamma')\sin\varphi - \sin\gamma\sin\gamma'\cos\gamma'\cos\varphi\}$$

$$B(\varphi) = \frac{\cos\gamma'}{N}\{\sin\gamma\sin\gamma'\cos\gamma\sin\varphi - (\cos\gamma'+k\cos\gamma)\cos\varphi\}$$

$$C(\varphi) = \frac{k}{N}(\sin\gamma\cos\gamma'\cos\varphi - \sin\gamma'\cos\gamma\sin\varphi)$$

$$N = k^2E_0\sin\psi$$

Grössen die übereinstimmend mit (42) und (43) für $\varphi = R$ und $\varphi = 0$ bzhw. in $A_0B_0C_0$ und $A_0'B_0'C_0'$ übergehen.

Bei variirendem φ bewegt sich die momentane Rotationsaxe längs der Ebene:

$$\begin{vmatrix} \sin\gamma'\cos\gamma & \dfrac{\cos\gamma + k\cos\gamma'}{\sin\gamma} & x \\ \dfrac{\cos\gamma' + k\cos\gamma}{\sin\gamma} & \sin\gamma\cos\gamma' & y \\ -k & -k & z \end{vmatrix} = 0$$

wie sich durch Elimination von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ergiebt.

Die hier behandelten Fragen schienen mir die nächstliegenden, auf deren resultirende Formeln eine weitere analytische Untersuchung sich stützen könnte.

XI.

Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.

---

1. **Définition de la moyenne harmonique par différence.** On sait qu'une quantité A est dite moyenne harmonique entre les deux quantités a et a', lorsqu'elle satisfait à la relation

$$\frac{1}{A} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right).$$

Nous dirons qu'une quantité B est la moyenne harmonique par différence entre b et b', lorsqu'elle vérifie l'égalité

$$\frac{1}{B} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)$$

Ces relations existent, pour les courbes du second degré, entre la tangente et les distances des deux foyers à la normale correspondante, et entre la normale et les distances des deux foyers à la tangente correspondante. Elles s'obtiennent par une construction géométrique fort simple et par un raisonnement très facile.

2. **Notations et Construction de la figure.** En un point $M(x, y)$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

menons la tangente MT et la normale MN (le lecteur est prié de

faire la figure), qui rencontrent le grand axe $2a$ de l'ellipse respectivement en T et N, et posons

$$(2) \qquad MT = T, \quad MN = N.$$

Ensuite des deux foyers F et F' abaissons sur la tangente les perpendiculaires FP et $F'P'$, puis sur la normale les perpendiculaires FQ et $F'Q'$. Si nous représentons ces lignes par p et p', q et q', nous aurons évidemment

$$(3) \qquad p = FP = MQ, \quad p' = F'P' = MQ';$$

$$(4) \qquad q = FQ = MP, \quad q' = F'Q' = MP'.$$

Joignons le point de contact M aux foyers F et F' et posons les rayons vecteurs

$$(5) \qquad FM = r, \quad F'M = r'.$$

3. **Rapport des distances des deux foyers à une tangente, et des mêmes foyers à la normale.** Les deux rayons vecteurs FM et $F'M$ étant également inclinés sur la tangente MT, les deux triangles rectangles MFP et $MF'P'$ sont semblables et donnent

$$\frac{FP}{F'P'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{MF}{MF'},$$

ou, en tenant compte des notations (3), (4) et (5),

$$(I) \qquad \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}.$$

Ainsi, Dans l'ellipse, les distances des deux foyers à une tangente sont entre elles comme les rayons vecteurs menés au point de contact; et les distances des deux foyers à une normale sont dans le même rapport.

4. **Propriété harmonique de la tangente.** Les deux triangles TPF et $TP'F'$, étant semblables, fournissent la proportion

$$\frac{TP}{TP'} = \frac{FP}{F'P'} = \frac{MP}{MP'},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{MT - MP}{MT + MP'} = \frac{MP}{MP'},$$

ou, en ayant égard aux notations (2) et (4),

$$\frac{T - q}{T + q'} = \frac{q}{q'}.$$

On en tire l'égalité

$$Tq' - qq' = Tq + qq',$$

qui revient à

$$T(q'-q) = 2qq'.$$

Divisant par $2qq'T$ et intervertissant les membres, ou obtient la relation

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{T} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'}\right).$$

Donc, dans l'ellipse, la tangente est la moyenne harmonique par différence entre les distances des deux foyers à la normale correspondante.

5. **Propriété harmonique de la normale.** Les deux triangles semblables MQF, $MQ'F'$ donnent

$$\frac{NQ}{NQ'} = \frac{FQ}{F'Q'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{FP}{F'P'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{MN - MQ}{MQ' - MN} = \frac{FP}{F'P'},$$

et, en vertu des notations (2) et (3),

$$\frac{N-p}{p'-N} = \frac{p}{p'};$$

on en tire l'égalité

$$Np' - pp' = pp' - Np,$$

qui revient à

$$N(p'+p) = 2pp'.$$

Divisant par $2pp'N$ et intervertissant les membres, on trouve la relation

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{N} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right).$$

Il s'ensuit que, Dans l'ellipse, la normale est la moyenne harmonique entre les distances des deux foyers à la tangente correspondante.

6. **Produit des distances des deux foyers à une tangente.** Si nous faisons tourner le trapèze $PP'F'F$ autour du côté rectangulaire PP', pour le rabattre en $PP'CD$, nous formons le trapèze isocèle $CDFF'$, dont les diagonales seront les droites

$$FMC = F'MD = r + r' = 2a.$$

Or on sait que, dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés latéraux, augmentée du double rectangle des bases. Nous avons donc la relation

$$2\overline{FC}^2 = 2\overline{FF'}^2 + 2FD.F'C,$$

ou

$$2(2a)^2 = 2(2c)^2 + 2.2p.2p';$$

divisant par 8 et intervertissant les membres, on obtient la relation

$$pp' = a^2 - c^2,$$

qui revient à

(IV) $$pp' = b^2.$$

On en conclut que, Dans l'ellipse, le produit des distances des deux foyers à une tangente est constante et égal au carré du demi petit axe.

7. **Produit des distances des deux foyers à une normale.** Dans le triangle MFF' prolongeons les perpendiculaires FQ, $F'Q'$, abaissées des foyers sur la normale MN, jusqu'à la rencontre en R et R' des côtés opposés MF' et MF. Nous formons le trapèze isocèle $FRF'R'$, dans lequel les deux bases sont

$$FR = 2q, \quad F'R' = 2q',$$

qui a FF' pour diagonale et $F'R = r' - r$ pour côté latéral. Nous avons donc la relation

$$2\overline{FF'}^2 = 2(r'-r)^2 + 2.2q.2q',$$

ou

$$4c^2 = (r'-r)^2 + 4qq'.$$

Mais les valeurs

(6) $$r' = a + \frac{cx}{a}, \quad r = a - \frac{cx}{a}$$

donnent

$$r' - r = \frac{2cx}{a}.$$

Il vient par suite, en substituant, en divisant par 4 et en intervertissant les membres,

$$qq' = c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2\frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

Or l'équation (1) de l'ellipse donne

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2};$$

on a, par conséquent,

(V) $$qq' = \frac{c^2y^2}{b^2}.$$

Tel est le produit des distances des deux foyers à une normale.

8. **Segments déterminés par la tangente sur l'axe focal.** La tangente MT est la bissectrice de l'angle au sommet M, extérieur au triangle MFF'; par suite elle divise la base FF' en parties proportionnelles aux côtés MF et MF' de l'angle. On a donc l'égalité

$$\frac{FT}{MF} = \frac{F'T}{MF'},$$

ou

$$\frac{FT}{r} = \frac{F'T}{r'} = \frac{F'T - FT}{r' - r} = \frac{2c}{2cx:a} = \frac{a}{x}.$$

On en tire les valeurs

(VI) $$FT = \frac{ar}{x}, \quad F'T = \frac{ar'}{x}.$$

9. **Longueur de la tangente.** Dans le triangle MFF', la droite MT étant la bissectrice de l'angle extérieur, on a

$$\overline{MT}^2 = FT.F'T - MF.MF',$$

ou

$$T^2 = \frac{a^2rr'}{x^2} - rr' = \frac{(a^2 - x^2)}{x^2}rr';$$

et, comme, en vertu de (1), on a

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2},$$

il vient

$$T^2 = \frac{a^2y^2rr'}{b^2x^2},$$

d'où

(VII) $$T = \frac{ay}{bx}\sqrt{rr'}.$$

10. **Inclinaison de la tangente sur les rayons vecteurs.** Appelons γ l'angle PMF, que fait la tangente avec l'un ou l'autre des rayons vecteurs. Le triangle MPF nous donne

$$PF = MF \sin MPF,$$

ou

$$p = r \sin\gamma.$$

On aurait de même

$$p' = r' \sin\gamma,$$

d'où on tire

$$\sin^2\gamma = \frac{pp'}{rr'},$$

qui, en égard à (IV), donne

(VIII) $$\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{rr'}}.$$

Par le même triangle rectangle MPF on a

$$MP = MF\cos\gamma,$$

ou

$$q = r\cos\gamma;$$

comme on a de même

$$q' = r'\cos\gamma,$$

il vient en multipliant

$$\cos^2\gamma = \frac{qq'}{rr'},$$

et en vertu de (V)

(IX) $$\cos\gamma = \frac{cy}{b\sqrt{rr'}}.$$

11. **Projections de la tangente sur les rayons vecteurs.** Cette projection étant $T\cos\gamma$, on obtient, en remplaçant T et $\cos\gamma$ par leurs valeurs (VII) et (IX),

$$T\cos\gamma = \frac{ay}{bx}\sqrt{rr'}\cdot\frac{cy}{b\sqrt{rr'}},$$

ou

(X) $$T\cos\gamma = \frac{acy^2}{b^2x}.$$

12. **Segments déterminés par la normale sur la distance focale.** Dans le triangle MFF' la normale MN est la bissectrice de l'angle au sommet M; par conséquent on a

$$\frac{FN}{MF} = \frac{F'N}{MF'},$$

ou

$$\frac{FN}{r} = \frac{F'N}{r'} = \frac{FN+F'N}{r+r'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

On en tire de suite

(XI) $$FN = \frac{cr}{a}, \quad F'N = \frac{cr'}{a}.$$

13. **Longueur de la normale.** Le triangle MFF' donne de suite

$$\overline{MN}^2 = MF.MF' - FN.F'N,$$

ou

$$N^2 = rr' - \frac{c^2rr'}{a^2} = \frac{(a^2-c^2)rr'}{a^2},$$

d'où

(XII) $$N = \frac{b}{a}\sqrt{rr'}.$$

14. **Projection de la normale sur les rayons vecteurs.** Cette projection est $N\sin\gamma$. Mettant à la place de N et $\sin\gamma$ leurs valeurs (VIII) et (XII), on trouve que

$$N\sin\gamma = \frac{b}{a}\sqrt{rr'}.\frac{b}{\sqrt{rr'}},$$

ou

(XIII) $$N\sin\gamma = \frac{b^2}{a}.$$

Donc la projection de la normale sur les rayons vecteurs est constante et égale à la troisième proportionnelle entre le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse.

15. **Distance du centre de l'ellipse à une tangente.** Cette distance, que nous représenterons par D, joint les milieux des côtés latéraux dans le trapèze $FPP'F'$; on a donc

$$OD = \tfrac{1}{2}(FP + F'P'),$$

ou

$$D = \tfrac{1}{2}(p + p').$$

Mais les relations (IV) et (I)

$$pp' = b^2, \quad \frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$$

donnent

$$p^2 = \frac{b^2 r}{r'} = \frac{b^2 r^2}{rr'}, \quad p'^2 = \frac{b^2 r'}{r} = \frac{b^2 r'^2}{rr'};$$

d'où

(7) $$p = \frac{br}{\sqrt{rr'}}, \quad p' = \frac{br'}{\sqrt{rr'}}.$$

Il vient par suite

$$D = \frac{b(r + r')}{2\sqrt{rr'}} = \frac{b.2a}{2\sqrt{rr'}},$$

ou

(XIV) $$D = \frac{ab}{\sqrt{rr'}}.$$

Si nous multiplions cette expression par la valeur (XII) de la normale, nous obtenons la relation remarquable

(XV) $$ND = b^2.$$

Ainsi, Dans l'ellipse, le produit de la normale par la distance du centre à la tangente correspondante est constante et égale au carré du demi petit axe de la courbe.

16. **Distance du centre de l'ellipse à une normale.** Nous désignerons cette distance IM par d. Puisque

$$IM = MP' - IP',$$

$$IM = IP - MP,$$

il vient, en observant que $IP' = IP$ et en ajoutant,

$$2IM = MP' - MP,$$

d'où on tire

$$d = \tfrac{1}{2}(q' - q).$$

Mais les relations (V) et (I)

$$qq' = \frac{c^2y^2}{b^2}, \quad \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

donnent

$$q^2 = \frac{c^2y^2r}{b^2r'} = \frac{c^2y^2r^2}{b^2rr'}, \quad q'^2 = \frac{c^2y^2r'}{b^2r} = \frac{c^2y^2r'^2}{b^2rr'},$$

d'où

(8) $$q = \frac{cyr}{b\sqrt{rr'}}, \quad q' = \frac{cyr'}{b\sqrt{rr'}}.$$

Il vient par suite

$$d = \frac{cy(r'-r)}{ab\sqrt{rr'}} = \frac{cy}{2b\sqrt{rr'}} \cdot \frac{2cx}{a},$$

ou

(XVI) $$d = \frac{c^2xy}{ab\sqrt{rr'}}.$$

Multiplions cette expression par la valeur (VII) de la tangente, nous obtenons le produit

$$Td = \frac{ay\sqrt{rr'}}{bx} \cdot \frac{c^2xy}{ab\sqrt{rr'}},$$

ou

(XVII) $$Td = \frac{c^2y^2}{b^2}.$$

17. La comparaison des égalités (IV) et (XV) fait voir d'abord que

(XVIII) $$ND = pp';$$

de même le rapprochement des valeurs (V) et (XVII) prouve que

(XIX) $$Td = qq'.$$

Donc on peut dire que:

Dans l'ellipse 1° la tangente est la quatrième proportionnelle entre les distances du centre et des deux foyers à la normale correspondante;

2° la normale est la quatrième proportionnelle entre les distances du centre et des deux foyers à la tangente correspondante.

Puisque

$$q' - q = 2d, \quad -qq' = -Td,$$

on voit que q' et $-q$ sont les racines de l'équation

$$z^2 - 2dz - Td = 0,$$

qui donne par suite

(XX) $$q' = d + \sqrt{d^2 + Td}, \quad q = -d + \sqrt{d^2 + Td}.$$

De même, comme

$$p + p' = 2D, \quad pp' = ND,$$

p et p' sont les racines de l'équation

$$u^2 - 2Du + ND = 0,$$

qui donne

(XXI) $$p = D - \sqrt{D^2 - ND}, \quad p' = D + \sqrt{D^2 - ND}.$$

18. **Segment de la tangente compris entre le point de contact et le petit axe de l'ellipse.** Soit T' le point où la tangente MT rencontre l'axe des y et posons $MT' = T'$. L'équation de la tangente au point $M(x, y)$ de l'ellipse étant

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

donne pour l'ordonnée à l'origine

$$OT' = Y = \frac{b^2}{y}.$$

Or par les triangles semblables on a

$$\frac{MT + MT'}{OT'} = \frac{MT}{y},$$

ou

$$\frac{T + T'}{b^2} = \frac{T}{y^2} = \frac{T'}{b^2 - y^2};$$

on en tire

$$\frac{T'}{T} = \frac{b^2 - y^2}{y^2} = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{a^2y^2} = \frac{b^2x^2}{a^2y^2};$$

d'où il vient

$$T' = \frac{b^2x^2}{a^2y^2} T.$$

Remplaçant T par sa valeur (VII), on obtient

$$T' = \frac{b^2x^2}{a^2y^2} \cdot \frac{ay}{bx} \sqrt{rr'},$$

ou

(XXII) $$T' = \frac{bx}{ay} \sqrt{rr'}.$$

Multipliant cette valeur par cette (VII) de T, on trouve que

$$\text{(XXIII)} \qquad TT' = rr'.$$

Ainsi le point de contact détermine sur la tangente comprise entre les axes deux segments dont le produit est égal au produit des rayons vecteurs menés au point de contact.

D'ailleurs la partie de la tangente, qui est comprise entre les axes, a pour valeur

$$T + T' = \left(\frac{ay}{bx} + \frac{bx}{ay}\right)\sqrt{rr'} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{abxy}\sqrt{rr'} = \frac{a^2b^2\sqrt{rr'}}{abxy},$$

ou

$$\text{(XXIV)} \qquad T + T' = \frac{ab}{xy}\sqrt{rr'}.$$

19. **Segment de la normale compris entre le point de contact et le petit axe de l'ellipse.** Soit N' le point où la normale MN rencontre l'axe des y et posons $MN' = N'$. L'équation de la normale au point $M(x, y)$ de l'ellipse étant

$$\frac{a^2}{x}X - \frac{b^2}{y}Y = c^2$$

donne pour $X = 0$

$$Y = -\frac{c^2y}{b^2}.$$

La valeur absolue de ON' est donc

$$ON' = \frac{c^2y}{b^2}.$$

Or les triangles semblables nous donnent

$$\frac{MN'}{y + \frac{c^2y}{b^2}} = \frac{MN}{y},$$

ou

$$\frac{N'}{b^2 + c^2} = \frac{N}{b^2};$$

on en tire, puisque $b^2 + c^2 = a^2$

$$\text{(9)} \qquad N' = \frac{a^2}{b^2}N.$$

Remplaçant N par sa valeur (XII), on trouve que

$$N' = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{rr'}$$

ou bien

(XXV) $$N' = \frac{a}{b}\sqrt{rr'}.$$

Multipliant cette valeur par celle (XII) de N, on obtient la relation

(XXVI) $$NN' = rr'.$$

Donc le point de contact détermine sur la normale comprise entre les deux axes deux segments dont le produit est égal au produit des rayons vecteurs menés au point de contact.

La partie de la normale qui est comprise entre les axes est

$$N' - N = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sqrt{rr'} = \frac{a^2 - b^2}{ab}\sqrt{rr'},$$

ou

(XXVII) $$N' - N = \frac{c^2}{ab}\sqrt{rr'}.$$

20. La comparaison des formules (XXIII) et (XXVI) fait voir que

(XXVIII) $$TT' = NN'.$$

Cette relation est générale; elle existe pour toute espèce de courbe, qui est rapportée à des axes rectangulaires; comme il est d'ailleurs facile de le démontrer directement.

21. Il serait aisé de trouver des propositions analogues pour l'hyperbole et la parabole et déterminer la nature des modifications que doivent leurs énoncés dans les deux cas.

Cependant nous tenons à démontrer pour l'hyperbole les propriétés harmoniques de la tangente et de la normale, propriétés que nous avons établies aux n°s 4 et 5 pour l'ellipse.

Soient F et F' les foyers d'une hyperbole et x, y les coordonnées d'un point M de la courbe. Appelons toujours T et N les longueurs de la tangente et de la normale menées au point M, et désignons encore par p et p' les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente; par q et q' celles menées sur la normale.

Concevons une ellipse homofocale à l'hyperbole et passant par le même point M. La tangente à l'hyperbole sera la normale à cette ellipse, et la normale de l'hyperbole deviendra la tangente à l'ellipse.

Il s'ensuit qu'il suffira de changer N en T, p et p' en q et q' dans la formule (III), pour trouver la relation

(XXIX) $$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'}\right),$$

qui convient à l'hyperbole.

Nous voyons ainsi que

Dans l'hyperbole, une tangente est la moyenne harmonique entre les distances des deux foyers à la normale correspondante.

Si dans la formule (II) nous remplaçons T par N, q et q' par p et p', nous aurons pour l'hyperbole la relation

(XXX) $$\frac{1}{N} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)$$

Donc, dans l'hyperbole, une normale est la moyenne harmonique par différence entre les distances des deux foyers à la tangente correspondante.

22. Si l'on veut étendre les mêmes formules à la parabole, il suffira d'y supposer le foyer F' transporté à l'infini. Dans ce cas p' et q' deviendront infinis, $\frac{1}{p'}$ et $\frac{1}{q'}$ s'annuleront et il en résultera

$$T = 2q, \quad N = 2p.$$

XII.

Propositions sur les coniques.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Théorème I.** Dans l'ellipse, le produit des tangentes des demi-angles, que font les rayons vecteurs d'un point quelconque de la courbe avec l'axe focal, est constant et égal au rapport des deux segments, dans lesquels chaque foyer divise le grand axe; et

Dans l'hyperbole, le quotient des tangentes des demi-angles, que font les rayons vecteurs d'un point quelconque de la courbe avec l'axe transverse, est con-

stant et égal au rapport des deux segments, dans lesquels chaque sommet divise la distance focale.

Soient F et F' les deux foyers d'une conique à centre et M un point quelconque de la courbe.

Posons les rayons vecteurs $MF = r$, $MF' = r'$, la distance focale $FF' = rc$ et les angles $MFO = \alpha$, $MF'O = \alpha'$, O étant le centre de la conique.

Si nous représentons par $2p$ le périmètre du triangle MFF', ce triangle nous donnera

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(2p-2r')(2p-4c)}{2p(2p-2r)}}, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{(2p-2r)(2p-4c)}{2p(2p-2r')}},$$

ou, en observant que $2p = r + r' + 2c$,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(r+r'+2c-2r')(r+r'+2c-4c)}{(r+r'+2c)(r+r'+2c-2r)}} = \sqrt{\frac{(2c+r-r')(r+r'-2c)}{(2c+r'-r)(r+r'+2c)}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{(r+r'+2c-2r)(r+r'+2c-4c)}{(r+r'+2c)(r+r'+2c-2r')}} = \sqrt{\frac{(2c+r'-r)(r+r'-2c)}{(2c+r-r')(r+r'+2c)}}.$$

Multipliant et divisant ces deux expressions entre elles, on obtient les relations

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha' = \frac{r+r'-2c}{r+r'+2c},$$

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha'} = \frac{2c+r-r'}{2c+r'-r}.$$

Si la conique est une ellipse, ayant $2a$ pour grand axe, on aura $r + r' = 2a$; dans ce cas la formule (1) devient

$$(\mathrm{I}) \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha' = \frac{a-c}{a+c} = \frac{AF}{A'F} = \frac{A'F'}{AF'},$$

où A et A' désignent les sommets de la courbe, qui sont voisins des foyers respectifs F et F'.

Si au contraire la conique est une hyperbole, dans la quelle $2a$ est l'axe transverse, on aura $r' - r = 2a$; dans ce cas la formule (2) devient

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha'} = \frac{c-a}{c+a} = \frac{AF}{AF'} = \frac{A'F'}{A'F},$$

où A et A' désignent encore les sommets de la courbe, qui sont voisins des foyers respectifs F et F'.

2. **Théorème II.** Dans toute parabole,

1° l'ordonnée y du point de concours de deux tangentes est la moyenne arithmétique entre les ordonnés y' et y'' des points de contact de ces deux tangentes;

2° l'abscisse x du point de concours de deux tangentes est la moyenne géométrique entre les abscisses x' et x'' des points de contact de ces deux tangentes.

Les tangentes, menées par les points (x', y') et (x'', y'') à la parabole $Y^2 = 2pX$, sont représentées par les équations

$$Yy' = p(X + x'),$$
$$Yy'' = p(X + x'').$$

Si ces deux tangentes se rencontrent au point (x, y), on devra avoir

$$yy' = p(x + x'), \tag{3}$$
$$yy'' = p(x + x''). \tag{4}$$

Ces deux dernières égalités peuvent s'écrire

$$2yy' = 2px + 2px' = 2px + y'^2, \tag{5}$$
$$2yy'' = 2px + 2px'' = 2px + y''^2, \tag{6}$$

attendu que, les deux points (x', y') et (x'', y'') étant situés sur la parabole, on a

$$2px' = y'^2 \quad \text{et} \quad 2px'' = y''^2.$$

Retranchant (6) de (5) on obtient la relation

$$2y(y' - y'') = y'^2 - y''^2 = (y' + y'')(y' - y'').$$

Divisant par $2(y' - y'')$, on tire de celle-ci la formule

$$y = \frac{y' + y''}{2}, \tag{III}$$

qui démontre la première partie de notre énoncé.

Les deux égalités (3) et (4), étant divisées membre à membre, nous donnent

$$\frac{y'}{y''} = \frac{x + x'}{x + x''},$$

ou, en observant que $y' = \sqrt{2px'}$ et $y'' = \sqrt{2px''}$,

$$\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} = \frac{x + x'}{x + x''}.$$

De cette relation on tire

$$x\sqrt{x'}+x''\sqrt{x'} = x\sqrt{x''}+x'\sqrt{x''},$$

et, par suite,

$$x(\sqrt{x'}-\sqrt{x''}) = x'\sqrt{x''}-x''\sqrt{x'} = \sqrt{x'x''}(\sqrt{x'}-\sqrt{x''}).$$

Divisant par $\sqrt{x'}-\sqrt{x''}$, on trouve que

$$x = \sqrt{x'x''}, \tag{IV}$$

ce qui démontre la seconde partie de notre proposition.

3. Les formules (III) et (IV) nous permettent de calculer rapidement les coordonnées des points où les deux tangentes issues d'un point extérieur (x, y) touchent la parabole.

En effet la première (III) peut s'écrire

$$y'+y'' = 2y, \tag{7}$$

et la seconde (IV) revient à

$$\sqrt{2px'.2px''} = 2px,$$

ou à

$$y'y'' = 2px. \tag{8}$$

Les ordonnées y' et y'' sont donc les racines de l'équation du second degré

$$Y^2-2yY+2px = 0,$$

qui donne

$$Y = y\pm\sqrt{y^2-2px}.$$

On a ainsi

$$y' = y+\sqrt{y^2-2px}, \quad y'' = y-\sqrt{y^2-2px}. \tag{V}$$

Si nous élevons ces deux valeurs au carré, nous obtiendrons

$$y'^2 = 2y^2-2px+2y\sqrt{y^2-2px},$$
$$y''^2 = 2y^2-2px-2y\sqrt{y^2-2px};$$

et, par suite, en observant que $y'^2 = 2px'$ et $y''^2 = 2px''$,

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{y^2-px}{p}+\dfrac{y}{p}\sqrt{y^2-2px}, \\[2ex] x'' = \dfrac{y^2-px}{p}-\dfrac{y}{p}\sqrt{y^2-2px}. \end{cases}$$

On a ainsi les abscisses des points de contact des deux tangentes issues du point (x, y).

4. Nouvelle démonstration des deux théorèmes d'Apollonius de Perga. Considérons l'ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{9}$$

rapportée à deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, comprenant entre eux un angle θ.

Coupons cette ellipse par un cercle concentrique

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=R^2. \tag{10}$$

Nous aurons l'équation aux cordes communes menées par le centre, en formant, avec ces deux équations, l'équation du second degré homogène en x et y

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=R^2\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}\right),$$

qui peut s'écrire

$$x^2\left(1-\frac{R^2}{a'^2}\right)+2xy\cos\theta+y^2\left(1-\frac{R^2}{b'^2}\right)=0. \tag{11}$$

Le cercle (10) passera par deux sommets opposés de l'ellipse (9), si les deux diamètres d'intersection (11) se confondent, c'est-à-dire si le premier membre de l'équation (11) est un carré.

Ainsi, si l'on a

$$\left(1-\frac{R^2}{a'^2}\right)\left(1-\frac{R^2}{b'^2}\right)-\cos^2\theta=0, \tag{12}$$

le cercle (10) sera bitangent à l'ellipse (9) et le diamètre de ce cercle sera un axe de la conique.

Les deux demi-axes a et b de l'ellipse (9) satisfont donc à la relation (12); en d'autres termes les carrés a^2 et b^2 des demi-axes de notre ellipse (9) sont les racines de l'équation (12).

Or celle-ci peut s'écrire

$$R^4-(a'^2+b'^2)R^2+a'^2b'^2\sin^2\theta=0.$$

Par conséquent, en vertu des relations qui existent entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré, on a de suite

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2, \tag{VII}$$

$$a^2b^2=a'^2b'^2\sin^2\theta, \tag{VIII}$$

ce qui démontre le théorème d'Apollonius pour l'ellipse.

On procéderait exactement de la même manière pour l'hyperbole.

Cette démonstration fort ingénieuse est donnée dans quelques Ecoles et Lycées de Paris; nous regrettons d'ignorer le nom de l'auteur. Elle mérite d'être signalée à l'attention des professeurs, autant pour sa grande simplicité, que pour son élégance et surtout pour son originalité.

Paris, 16 Juin 1877.

XIII.

Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen.

Von

Emil Hain.

I.

Durch einen Punkt P des Coordinatendreiecks ABC ziehen wir zu BC eine Parallele, welche AC in A_b trifft. P sei durch die Coordinaten p_a bestimmt. Der unendlich entfernte Punkt von BC ist: 0, c, $-b$. Sonach ist:

$$\begin{array}{rlll} A_bA_c \equiv & bp_b+cp_c & -bp_a & -cp_a \\ A_b \equiv & cp_a & 0 & bp_b+cp_c \\ A_c \equiv & bp_a & bp_b+cp_c & 0 \end{array}$$

Trifft PA die BC in P_a, teilt Π_a mit P_a die BC harmonisch und schneidet $A\Pi_a$ die A_bA_c in $\mathfrak{P}_a$; dann liegen die $\mathfrak{P}_a$ in einer Geraden. Es ist:

$$\begin{array}{rlll} P_a \equiv & 0 & p_b & p_c \\ \Pi_a \equiv & 0 & p_b & -p_c \\ \mathfrak{P}_a \equiv & p_a(bp_b-cp_c) & p_b(bp_b+cp_c) & -p_c(bp_b+cp_c) \end{array}$$

Die $\mathfrak{P}_a$ liegen in der Geraden $p_bp_c(bp_b+cp_c)$, welche der $\Pi_a\Pi_b\Pi_c$, der Harmonikalen von P, parallel ist.

Wir finden ferner:

$$A_bA_c : BC = \left(\frac{2F}{a} - \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}\right) : \frac{2F}{a}$$

$$A_bA_c = \frac{a(bp_b+cp_c)}{\Sigma ap_a}$$

Setzen wir $\Sigma A_b A_b = m$, so ist der Ort der Punkte, für welche die Summe der Paralleltransversalstrecken constant ist, die Gerade:

$$\Sigma a(m-b-c)x_a = 0$$

Für $m = a+b+c$ wird diese Gerade die Harmonikale des Punktes b^2c^2. Die Geraden $a(m-b-c)$ gehen durch den Schnittpunkt der beiden zu einander parallelen Geraden a, $a(b+c)$. Somit gilt der Satz:

Für die Punkte einer zur Geraden $a(b+c)$ parallelen Geraden ist die Summe der Paralleltransversalen constant.

Auch kann leicht bewiesen werden, dass die Punkte $A_b A_c$ auf einem Kegelschnitte liegen. Er hat die Form:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$
$$g_{aa} = a p_b p_c (b p_b + c p_c)$$
$$2 g_{bc} = -p_a[(a p_a + b p_b)(a p_a + c p_c) + bc p_b p_c]$$

II.

Setzen wir $A_b A_c = t$, so haben wir die Gleichungen:

$$atp_a + b(t-a)p_b + c(t-a)p_c = 0$$
$$a(t-b)p_a + btp_b + c(t-b)p_c = 0$$
$$a(t-c)p_a + b(t-c)p_b + ctp_c = 0$$

Es ist also:

$$\begin{vmatrix} t & t-a & t-a \\ t-b & t & t-b \\ t-c & t-c & t \end{vmatrix} = 0$$

$$t = \frac{2abc}{\Sigma bc}$$

Setzen wir $t\Sigma ap_a = w$, wo w symmetrisch in Bezug auf das Dreieck; so haben wir die Gleichungen:

$$abp_b + acp_c = w$$

woraus

$$p_a = w \begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 1 & 0 & bc \\ 1 & bc & 0 \end{vmatrix} \equiv bc(ab+ac-bc)$$

Es gibt also einen Punkt T, welcher der angenommenen Bedingung entspricht; er ist ein Punkt 4. Ordnung und heisst der Punkt der gleichen Paralleltransversalen.

III.

Werden über den Seiten des Dreiecks ABC Quadrate errichtet, so bilden die den BC parallelen Quadratseiten ein dem Urdreieck ähnliches Dreieck. Der Homologiepunkt beider ist der Grebe'sche Punkt $G \equiv a$. Trifft GA die BC in G_a, ist J das Inkreiscentrum des Urdreiecks; so haben wir:

$$
\begin{array}{rccc}
G_a \equiv & 0 & b & c \\
J \equiv & 1 & 1 & 1 \\
JG_a \equiv & b-c & c & -b \\
G_bG_c \equiv & -bc & +ca & +ab
\end{array}
$$

JG_a trifft G_bG_c in

$$2abc \qquad b(ca+cb-ab) \qquad c(bc+ba-ca)$$

Verbinden wir diesen Punkt mit A, so erhalten wir die Gerade:

$$0 \qquad c(bc+ba-ca) \qquad -b(ca+cb-ab)$$

Diese Geraden schneiden sich im Punkte:

$$Q \equiv a(bc+ba-ca)(ca+cb-ab)$$

Wenn wir auf der andern Seite von AJ den Winkel QAJ auftragen, so dass der neue Schenkel die BC in T_a trifft; dann treffen sich die AT_a im reciproken Punkte von Q, in $T \equiv bc(ab+ac-bc)$. Die Construction dieses Punktes ist also folgende:

Man construirt über den Seiten des Dreiecks ABC entweder nur nach Aussen oder nur nach Innen Quadrate. Die den BC parallelen Quadratseiten bilden ein Dreieck $A'B'C'$. Die AA' schneiden sich in G. J sei das Inkreiscentrum des Urdreiecks. AG trifft BC in G_a, JG_a die G_bG_c in A_1. Die AA_1 schneiden sich in Q. Man trägt den Winkel QAJ auf der andern Seite der AJ auf, so dass der neue Schenkel die BC in T_a trifft. Die AT_a begegnen sich in T.

IV.

A' sei die Mitte von BC, U der Punkt T für das Mittendreieck. Die Normale von U auf $B'C'$ treffe $B'C'$ in A'_u, BC in A_u. Dann gibt die Figur:

$$UA'_u = \frac{F}{a} \cdot \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc}$$

$$A'U + UA_u = \frac{F}{a}$$

$$UA_u = \frac{F}{a}\left(1 - \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc}\right) = \frac{F}{a} \cdot \frac{2bc}{\Sigma bc}$$

$$U \equiv b^2c^2$$

Der Punkt b^2c^2 wird erhalten, wenn man die Abschnitte, welche die Winkelhalbirenden auf den Seiten bilden, mit einander vertauscht und die neuen Teilpunkte mit den Gegenecken verbindet.

Trifft also AJ die BC in J_a und ist $BQ = CJ_a$, so schneiden sich die AQ_a in $Q \equiv b^2c^2 \equiv U$. Hierdurch ist also auch eine Construction des Punktes T gegeben. Sie ist folgende:

Man ziehe durch A die Parallele zu BC. Diese Parallelen bilden das Dreieck $\mathfrak{ABC}$. Man ziehe in diesem Dreieck die Winkelhalbirenden, dadurch wird $\mathfrak{BC}$ in $\mathfrak{J}_a$ geteilt. $\mathfrak{Q}_a$ sei ein solcher Punkt der $\mathfrak{BC}$, dass $\mathfrak{BQ}_a = \mathfrak{CJ}_a$. Die $A\mathfrak{Q}_a$ treffen sich im Punkte $\mathfrak{Q} \equiv T$.

Für $\mathfrak{ABC}$ als Fundamentaldreieck ist nämlich

$$\mathfrak{Q} \equiv (\mathfrak{AC})^2 . (\mathfrak{AB})^2$$

Die Seitennormale von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{BC}$ ist also:

$$(\mathfrak{AC})^2 . (\mathfrak{AB})^2 . \lambda$$

wo

$$\Sigma\lambda . (\mathfrak{BC})(\mathfrak{AC})^2 . (\mathfrak{AB})^2 = 2\varDelta\mathfrak{ABC}$$

das ist:

$$\Sigma\lambda . 2a . (2b)^2 . (2c)^2 = 8F$$

$$\lambda = \frac{F}{4abc} \cdot \frac{1}{\Sigma bc}$$

Die Seitennormale von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{BC}$ ist also:

$$\frac{4F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc}$$

Verlängert man diese Seitennormale über $\mathfrak{Q}$, bis sie die BC in T_a trifft; so ist:

$$\frac{4F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc} + \mathfrak{Q}T_a = \frac{2F}{a}$$

$$\mathfrak{Q}T_a \equiv \frac{2F}{a}\left(1 - \frac{2bc}{\Sigma bc}\right) \equiv TT_a$$

$$\mathfrak{Q} \equiv T$$

Die Gerade TU hat die Form:

$$\begin{vmatrix} c^2a^2 & ca(bc+ba-ca) \\ a^2b^2 & ab(ca+cb-ab) \end{vmatrix} \equiv a^2(b-c)$$

Nun ist $a^2(b-c)$ der Umkreispol der Geraden $b-c$, d. h.: Die Verbindungsgerade des Punktes der gleichen Paralleltransversalen und desselben Punktes des Mittendreiecks ist die Harmonikale des reciproken Umkreispoles der Verbindungsgeraden aller Symmetriepunkte erster Ordnung. Es ist ferner:

$$\begin{vmatrix} ca & ca(bc+ba-ca) \\ aa & ab(ca+cb-ab) \end{vmatrix} = a^2(b-b)$$

Sonach liegen der Schwerpunkt, der Punkt der gleichen Paralleltransversalen und derselbe Punkt für das Mittendreieck in einer Geraden. Die Seitennormalen von T, U sind:

$$\frac{2F}{a} \cdot \frac{ab+ac-bc}{ab+ac+bc}, \quad \frac{2F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma bc}$$

Die Mitte von TU ist der Punkt $b+c$, ein Punkt der Geraden $b-c$. Die Gerade aller Symmetriepunkte erster Ordnung halbirt den Abstand des Punktes der gleichen Paralleltransversalen von demselben des Mittendreiecks.

V.

Zur Einführung des Punktes T in die Elemente dürfte folgende Ableitung dienen:

$$A_bA_c = B_cB_a = C_aC_b = t$$
$$BB_a : BC = t : AC$$

$$BB_a = \frac{at}{b}, \quad CC_a = \frac{at}{c}, \quad BC_a = \frac{ac-at}{c}$$

$$B_aC_a = \frac{abt+act-abc}{bc}$$

$$TC_a : B_aC_a = AB : BC$$
$$TC_a + TC_b = t$$

Die Auflösung der letzten Gleichung gibt den Wert von t. Als Uebungsaufgaben seien folgende erwähnt:

Ist eine Dreieckseite die mittlere Proportionale der beiden andern und die Summe dieser beiden Seiten gleich der dreifachen Mittelseite, so ist die Paralleltransversale halb so lang als die Mittelseite.

In keinem Dreieck ist die Paralleltransversale das harmonische Mittel zweier Seiten.

Die Fläche eines Dreiecks, in welchem eine Seite die mittlere Proportionale der beiden andern ist, verhält sich zum Quadrat der Mittelseite wie der Inkreisradius zur Paralleltransversalen.

Ist in einem Dreieck eine Seite das harmonische Mittel der beiden andern, so ist die zweifache Mittelseite gleich der dreifachen Paralleltransversale und die Verbindungsgerade des Schwerpunktes mit dem Punkte der gleichen Paralleltransversalen läuft zur Mittelseite parallel.

XIV.

Isogonal entsprechende Gerade des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

Die Gleichung einer Geraden in trimetrischen Punktcoordinaten bezogen auf das Fundamentaldreieck ABC sei:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Sie treffe die BC in A_1, dann ist:

$$\begin{array}{llll} A_1 \equiv & 0 & c_1 & -b_1 \\ B_1 \equiv & -c_1 & 0 & a_1 \\ C_1 \equiv & b_1 & -a_1 & 0 \end{array}$$

Nehmen wir auf der BC einen solchen Punkt $\mathfrak{A}_1$ an, dass:

$$A_1 B = \mathfrak{A}_1 C, \quad A_1 C = \mathfrak{A}_1 B$$

so liegen die $\mathfrak{A}_1$ ebenfalls in einer Geraden. Ihre Gleichung wird auf folgende Weise gefunden:

Ziehen wir von A_1 die Normalen auf AC, AB und bezeichnen wir dieselben mit $A_1(b)$, $A_1(c)$,; so gibt die Figur:

$$A_1(b) = A_1C\sin\gamma = \frac{A_1C.2F}{ab}$$

$$A_1(c) = A_1B\sin\beta = \frac{A_1B.2F}{ac}$$

Nun ist aber auch wegen $A_1 \equiv 0 \quad c_1 \quad -b_1$:

$$A_1(b) = \frac{2Fc_1}{bc_1 - cb_1}, \quad A_1(c) = \frac{-2Fb_1}{bc_1 - cb_1}$$

Sonach ist:

$$\frac{A_1C}{ab} = \frac{c_1}{bc_1 - cb_1} = \frac{\mathfrak{A}_1B}{ab}$$

$$\frac{A_1B}{ac} = \frac{-b_1}{bc_1 - cb_1} = \frac{\mathfrak{A}_1B}{ac}$$

$$\mathfrak{A}_1B = \frac{abc_1}{bc_1 - cb_1}, \quad A_1C = \frac{-acb_1}{bc_1 - cb_1}$$

Bezeichnen wir die Normalen von $\mathfrak{A}_1$ auf AC, AB mit $\mathfrak{A}_1(b)$, $\mathfrak{A}_1(c)$; so erhalten wir:

$$\mathfrak{A}_1(b) = \mathfrak{A}_1C\sin\gamma = \frac{\mathfrak{A}_1C.2F}{ab}$$

$$A_1(c) = \mathfrak{A}_1B\sin\beta = \frac{\mathfrak{A}_1B.2F}{ac}$$

oder:

$$\mathfrak{A}_1(b) = -\frac{cb_1}{b}\cdot\frac{2F}{bc_1 - cb_1}, \quad \mathfrak{A}_1(c) = \frac{bc_1}{c}\cdot\frac{2F}{bc_1 - cb_1}$$

Wir bekommen also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &\equiv 0 \quad -\frac{cb_1}{b} \quad \frac{bc_1}{c} \\ &\equiv 0 \quad c^2b_1 \quad -b^2c_1 \\ &\equiv 0 \quad c^2a_1b_1 \quad -b^2c_1a_1 \end{aligned}$$

Die $\mathfrak{A}_1$ liegen somit in der Geraden $a^2b_1c_1$. Ist $a_1 = p_bp_c$, die Harmonikale des Punktes $P \equiv p_a$; so ist $a^2b_1c_1 \equiv a^2p_a$.

Projiciren wir die Figur $AA_1\mathfrak{A}_1$, so erhalten wir für den Schwerpunkt S des ursprünglichen Dreiecks ABC einen beliebigen Punkt $P \equiv p_a$. Dann trifft AP die BC in P_a, der Projection der Mitte von BC, dem Punkte S_a. Die Harmonikale von S, die Gerade:

$$a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c = 0$$

wird die Harmonikale von P. Diese trifft die BC in Π_a. Da S_a

in der ursprünglichen Figur die Mitte der Strecke $A_1\mathfrak{A}_1$ war, so sind jetzt die Punkte $A_1\mathfrak{A}_1$ bezüglich $P_a\Pi_a$ harmonisch conjugirt. Wird XY durch ZT harmonisch geteilt, so ist:

$$T \equiv \frac{z_a(x_a\eta + y_a\xi) - 2x_a y_a \zeta}{\zeta(x_a\eta + y_a\xi) - 2\xi\eta z_a}$$

wenn

$$X \equiv x_a, \quad Y \equiv y_a, \quad Z \equiv z_a$$

$$\xi = \Sigma a x_a, \quad \eta = \Sigma a y_a, \quad \zeta = \Sigma a z_a$$

Es ist dann:

$$\begin{array}{llll} X \equiv P_a \equiv 0 & p_b & p_c \\ Y \equiv \Pi_a \equiv 0 & p_b & -p_c \\ Z \equiv A_1 \equiv 0 & c_1 & -b_1 \end{array}$$

$$\xi = bp_b + cp_c, \quad \eta = bp_b - cp_c, \quad \zeta = bc_1 - cb_1$$

Man erhält:

$$\begin{array}{llll} T \equiv 0 & b_1 p_b^2 & -c_1 p_c^2 \equiv \mathfrak{A}_1 \\ \equiv 0 & a_1 b_1 p_a^2 p_b^2 & -a_1 c_1 p_a^2 p_c^2 \end{array}$$

Die $\mathfrak{A}_1$ liegen in der Geraden $b_1 c_1 p_b^2 p_c^2$. Diese wird also auf folgende Weise construirt:

Die Geraden a_1, AP treffen die BC in A_1, P_a. Π_a sei harmonisch zu P_a bezüglich BC. Ferner trenne $\mathfrak{A}_1$ die $P_a\Pi_a$ harmonisch von A_1. Die $\mathfrak{A}_1$ bilden die Gerade $b_1c_1p_b^2p_c^2$. — Für $p_a = 1$ wird $b_1c_1p_b^2p_c^2 = b_1c_1$. J_a, I_a seien die Punkte $P_a\Pi_a$ für den Fall $P \equiv J \equiv 1$. Dann halbirt AJ_a den Winkel A. Da AJ_a senkrecht zu AI_a ist und $A_1\mathfrak{A}_1$ die Strecke J_aI_a harmonisch teilt, so wird auch der Winkel $A_1A\mathfrak{A}_1$ durch AJ_a halbirt. Ist also die Gerade a_1 gegeben, so hat man folgende Construction der Geraden b_1c_1:

Die Halbirungslinie des Winkels A treffe die BC in J_a. Die Halbirungslinie des Aussenwinkels von A schneide die Gegenseite in I_a. Wenn nun die Gerade a_1 die BC in A_1 trifft, so trage man den Winkel A_1AJ_a auf der andern Seite von AJ_a auf, so dass der neue Schenkel die BC in $\mathfrak{A}_1$ schneidet. Die $\mathfrak{A}_1$ liegen dann in der Geraden b_1c_1.

Wien, Juni 1877.

XV.

Ueber Interpolation.

Von

Nell.

Die Lösung sehr vieler Probleme der Mathematik, Mechanik, Astronomie und Geodäsie lässt sich in hohem Grade durch Anwendung von Tafeln erleichtern, in welchen die Zahlenwerte gewisser Functionen für eine Anzahl numerischer Werte der Veränderlichen angegeben sind. Nun ist es nötig, aus den Zahlen der Tafel die Werte der Function auch für solche Werte der Variabelen oder des Arguments der Function abzuleiten, welche in der Tafel nicht enthalten sind. Die hierzu nötige Rechnung nennt man das Interpoliren. Die Formeln, welche man zu diesem Zwecke entwickelt hat, lassen das Gesuchte in aller nur wünschenswerten Schärfe finden.

In den Tafeln, in welchen die Functionswerte zusammengestellt werden, lässt man die Argumente stets nach gleich grossen Intervallen fortschreiten; zeigen dann auch die Functionen gleiche oder doch beinahe gleiche Differenzen, so gestalten sich die Interpolationsrechnungen am einfachsten, indem dann gewisse Aenderungen des Arguments proportionale Aenderungen der Function zur Folge haben. Bei den Tafeln der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, welche tagtäglich gebraucht werden, ist diese Anordnung, und zwar mit vollem Rechte, getroffen. Nun gibt es ausser den genannten, noch eine sehr grosse Anzahl anderer Functionen, von welchen Tafeln zu besitzen, für den Mathematiker von grossem Interesse wäre. Wollte man auch diese Tafeln so einrichten, dass bei den Interpolationsrechnungen nur die ersten Differenzen der Functionen in Betracht kämen, so müsste man denselben meist eine beträchtliche Ausdehnung geben. Die sehr grosse

Arbeit der Berechnung solch' ausgedehnter Tafeln, so wie die bedeutenden Druckkosten solcher voluminöser Werke würden dann aber in gar keinem Verhältnisse zu dem Zwecke stehen. Hier muss sich der Rechner schon gefallen lassen, aus den Tafeln von geringerem Umfang, die Functionswerte mit Berücksichtigung der höheren Differenzen zu entnehmen.

Bei der Anlage solcher Tafeln ist vor allem zu entscheiden, auf wie viele Decimalstellen die Functionswerte angegeben werden sollen. Denn dieselben sind (ganz vereinzelte Fälle ausgenommen) stets Irrationalzahlen, welche die betreffende Function um so genauer darstellen, auf eine je grössere Zahl von Stellen sie berechnet sind. Doch wird man hier nicht weitergehen, als der vorgeschriebene Grad von Genauigkeit unbedingt verlangt. Dann hat man noch festzusetzen, nach welchem Intervall man die Argumente will fortschreiten lassen. Je grösser man das Intervall nimmt, um so weniger umfangreich wird die Tafel, aber auch um so umständlicher werden beim Gebrauch derselben die Interpolationsrechnungen.

Durch diese Arbeit soll nun gezeigt werden, dass bei zweckmässig eingerichtetem Interpolationsapparat die Tafeln vieler Functionen nur eine geringe Ausdehnung erfordern und doch jeder Wert der Function sich ohne allzu weitläufige Rechnung daraus entnehmen lässt.

§ 2.

Wir wollen zunächst ein von der bisher üblichen Interpolationsmethode verschiedenes Verfahren entwickeln, bei welchem statt der Differenzen der Functionswerte gewisse andere Zahlen zur Anwendung kommen und wobei sich ausserdem die Logarithmentafel mit Vorteil gebrauchen lässt.

Sei $f(p)$ eine Function irgend einer Variabelen p und stelle y einen Zuwachs von p vor, so hat man nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(p+y) = f(p) + f'(p).y + \tfrac{1}{2}.f''(p)y^2 + \tfrac{1}{6}f'''(p).y^3$$

wenn

$$\frac{df}{dp} = f'(p), \quad \frac{d^2f}{dp^2} = f''(p),$$

u. s. f. gesetzt wird.

Geht man nicht über die dritte Potenz von y hinaus, indem man voraussetzt, dass die Reihe so convergent sei, dass die vierten und höheren Potenzen keinen merklichen Einfluss mehr ausüben, so kann man den obigen Ausdruck auch in folgender Form anschreiben:

$$f(p+y) = f(p) + \left[1+(1+\frac{f'''(p)}{3f''(p)}\cdot y)\frac{f''(p)}{2f'(p)}\cdot y\right]f'(p)\cdot y$$

Setzt man darin

$$\frac{f'''(p)}{3f''(p)} = a, \frac{f''(p)}{2f'(p)} = b \quad \text{und} \quad f'(p) = c,$$

so wird

$$f(p+y) = f(p) + [1+(1+ay)by]cy$$

Durch die Benutzung der gewöhnlichen Logarithmentafel unter Hinzuziehung der Tafel*) der Logarithmen für Summe und Differenz lässt sich das zweite Glied zur Rechten ziemlich leicht berechnen.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens soll nun in mehreren Fällen erläutert werden.

§ 3.

In einer Abhandlung über die **Wurfbewegung im widerstehenden Mittel** in diesem Archiv, Theil XLVI, Nr. XX. kommt ein Ausdruck vor, welcher dort die Lambdafunction genannt wird, nämlich:

$$\varLambda(p) = p\sqrt{1+p^2} + \log\text{nat}(p+\sqrt{1+p^2})$$

Hier ist

$$\frac{d\varLambda(p)}{dp} = \varLambda'(p) = 2\sqrt{1+p^2}, \quad \varLambda''(p) = \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \varLambda'''(p) = \frac{2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach § 2. findet sich

$$a = \frac{1}{3p(1+p^2)}, \quad b = \frac{p}{2(1+p^2)}, \quad c = 2\sqrt{1+p^2}$$

$$\varLambda(p+y) = \varLambda(p) + [1+(1+ay)by]cy$$

Für den besonderen Fall $p = 0$ wird

$$a = \infty, \quad b = 0, \; c = 2;$$

dafür ist aber auch

$$\varLambda(p) = 0, \quad \varLambda'(p) = 2, \quad \varLambda''(p) = 0, \; \varLambda'''(p) = 2,$$

daher

$$\varLambda(y) = 2y + \tfrac{1}{3}y^3 = (1+\tfrac{1}{6}y^2)2y$$

Die folgende Tafel enthält die Werte der Lamdafunction auf 5 Decimalstellen. Zugleich sind überall die zugehörigen Werte von $\log a$, $\log b$ und $\log c$ angegeben.

---

*) Die vom Verfasser bearbeitete Tafel der fünfstelligen Logarithmen, dritte Auflage, Darmstadt, Verlag von J. P. Diehl 1870 enthält unter andern eine Tafel der Logarithmen für Summe und Differenz, in welcher man zu irgend einem $\log x$ den zugehörigen $\log(1+x)$ angegeben findet, welche daher für die obige Rechnung sehr bequem ist.

I. Tafel der Lamda-Function.

$\Lambda(p+y) = \Lambda(p) + [1 + (1 + ay)by]cy$									
0.0	0.00000	∞	$-\infty$	0.30103	1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697
0.1	0.20033	0.51856	8.69465	0.30319	1.6	4.26786	8.76731	9.35164	0.57675
0.2	0.40265	0.20482	8.98297	0.30955	1.7	4.65374	8.70248	9.33947	0.59600
0.3	0.60888	0.00833	9.13866	0.31974	1.8	5.05687	8.64024	9.32688	0.61471
0.4	0.82085	9.85636	9.23657	0.33321	1.9	5.47747	8.58042	9.31402	0.63288
0.5	1.04023	9.72700	9.30103	0.34949	2.0	5.91577	8.52288	9.30103	0.65051
0.6	1.26854	9.61119	9.34358	0.36780	2.1	6.37196	8.46746	9.28799	0.66763
0.7	1.50713	9.50459	9.37088	0.38762	2.2	6.84620	8.41404	9.27498	0.68424
0.8	1.75717	9.40494	9.38722	0.40845	2.3	7.33865	8.36250	9.26205	0.70036
0.9	2.01969	9.31096	9.39553	0.44716	2.4	7.84944	8.31272	9.24923	0.71600
1.0	2.29559	9.22185	9.39794	0.45154	2.5	8.37869	8.26460	9.23657	0.73120
1.1	2.58561	9.13709	9.39597	0.47323	2.6	8.92651	8.21804	9.22408	0.47596
1.2	2.89043	9.05631	9.39076	0.49472	2.7	9.49299	8.17296	9.21178	0.76031
1.3	3.21061	8.97918	9.38316	0.51591	2.8	10.07823	8.12927	9.19968	0.77426
1.4	3.54663	8.90546	9.37381	0.53668	2.9	10.68230	8.08689	9.18778	0.78782
1.5	3.89893	8.83490	9.36318	0.55697	3.0	11.30528	8.04576	9.17609	0.80103

Für $p = 0$ benutzt man die folgende Formel:

$$\log \Lambda(y) = \log(1 + \tfrac{1}{6}y^2) + 0{,}30103 + \log y$$
$$\log \tfrac{1}{6} = 9.22185 - 10$$

Die Tafel enthält die Werte von $\Lambda(p)$ nur bis zum Argument $p = 3$. Grössere Werte kommen in der Anwendung selten vor. Sollte dies dennoch der Fall sein, so findet man im § 10. Methoden angegeben, wodurch diese und die umgekehrte Aufgabe auf verhältnissmässig leichte Weise gelöst werden können.

Die Lamdafunction für negative Argumente findet sich ebenfalls negativ, d. h. es ist allgemein:

$$\Lambda(-p) = -\Lambda(p).$$

§ 4.

Den Gebrauch der in dem vorigen Paragraphen gegebenen Tafel wollen wir an einigen Beispielen zeigen.

1. $\Lambda(0{,}729548)$ soll berechnet werden.

Hier setzt man $p = 0.7$ und $y = 0.029548$

$$\begin{aligned}
\log a &= 9.50459\\
+\log y &= 8.47053\\
\log ay &= 7.97512\\
\log(1+ay) &= 0.00408\\
+\log b &= 9.37088\\
+\log y &= 8.47053\\
&\ 7.84549\\
\log(1+(1+ay)by &= 0.00304\\
+\log c &= 0.38762\\
+\log y &= 8.47053\\
\log 0.072642 &= 8.86119
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(0.7) &= 1.50713\\
+ &\ 0.07264\\
\Delta(0.729548) &= 1.57977
\end{aligned}$$

2. $\Delta(2{,}76348)$ soll bestimmt werden.

$p = 2.7,\ y = 0{,}06348$

$$\begin{aligned}
\log a &= 8.17296\\
\log y &= 8.80264\\
\log ay &= 6.97560\\
\log(1+ay) &= 0.00041\\
\log b &= 9.21178\\
\log y &= 8.80264\\
&\ 8.01483\\
\log(1+(1+ay)by) &= 0.00447\\
+\log c &= 0.76031\\
+\log y &= 8.80264\\
\log 0.36933 &= 9.56742
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(2.7) &= 9.49299\\
+ &\ 0.36933\\
\Delta(2.76348 &= 9.86232
\end{aligned}$$

3. Soll auch noch $\Delta(0.04352)$ gesucht werden, so ist $p = 0$, $y = 0.04352$

$$\begin{aligned}
\log y &= 8.63869\\
\log x^2 &= 7.27738\\
\log \tfrac{1}{6} &= 9.22185\\
&\ 6.49923\\
\log(1+\tfrac{1}{6}y^2) &= 0.00014\\
&\ 0.30103\\
+\log y &= 8.63869\\
\log \Delta(y) &= 8{,}93986
\end{aligned}$$

folglich $\Delta(0.04352) = 0{,}08707$

§ 5.

Auch die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einem gegebenen $\Lambda(x)$ das zugehörige x zu bestimmen, können wir jetzt leicht lösen. Wir erhalten aus unserer Gleichung

$$y = \frac{\Lambda(p+y) - \Lambda(p)}{c[1+(1+ay)by]}$$

Setzt man $\Lambda(p+y) = \Lambda(x)$ und versteht unter $\Lambda(p)$ den nächstkleineren in Tafel I. stehenden Wert der Lamdafunction, so ist, wenn man $y' = \frac{\Lambda(x) - \Lambda(p)}{c}$ nimmt, y' als ein erster Näherungswert für y zu betrachten, dies gibt uns

$$y = \frac{y'}{1+(1+ay)by}$$

Vernachlässigt man hier vorerst das Glied ay gegen 1 und setzt y' statt y, so erhält man einen genaueren Wert für y, den wir durch y'' bezeichnen, also $y'' = \frac{y'}{1+by'}$; mit diesem können wir jetzt den Wert von y genau erhalten. Wir haben daher zur Lösung dieser Aufgabe die folgenden Gleichungen:

$$y' = \frac{\Lambda(x) - \Lambda(p)}{c}$$

$$y'' = \frac{y'}{1+by'}$$

$$y = \frac{y'}{1+(1+ay'')by''}$$

$$x = p+y$$

Sei z. B. $\Lambda(x) = 6.25235$, so gibt die Tafel den nächst kleineren Wert

$$\begin{aligned} \Lambda(2.0) &= 5.91577 \\ \Lambda(x) - \Lambda(2.0) &= 0.33658 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 0.33658 &= 9.52709 \\
-\log c &= 0.65051 \\
\log y' &= 8.87658 \\
+\log b &= 9.30103 \\
\log by' &= 8.17761 \\
\log(1+by') &= 0.00649 \\
\log y'' &= 8.87009 \\
+\log a &= 8.52288 \\
\log ay'' &= 7.39297
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(1+ay'') &= 0.00107 \\
+\log b &= 9.30103 \\
+\log y'' &= 8.87009 \\
& \ 8.17219 \\
\log(1+(1+ay'')by'') &= 0.00641 \\
\log y' &= 8.87658 \\
\log y &= 8{,}87017 \\
y &= 0.07416 \\
x = p+y &= 2.07416
\end{aligned}$$

Anm. Fände sich in diesem Falle $\log y$ noch beträchtlich verschieden von $\log y''$, so würde man $\log y'''$ statt $\log y$ schreiben und die Rechnung nach der Formel $y = \frac{y'}{1+(1+ay''')by'''}$ widerholen.

Wenn das gegebene $\varDelta(x) < 0.20033$, so findet man

$$y' = \tfrac{1}{2}\varDelta(x)$$

$$y'' = \frac{y'}{1+\frac{1}{6}y'^2}$$

$$y = \frac{y'}{1+\frac{1}{6}y''^2} = x$$

Z. B. $\varDelta(x) = 0{,}08707$

$\log\varDelta(x) = 8.93987$	$\log y''^2 = 7.27740$
$+\log\frac{1}{2} = 9.69897$	$+\log\frac{1}{6} = 9.22185$
$\log y' = 8.63884$	6.49925
$\log y'^2 = 7.27768$	$\log(1+\frac{1}{6}y''^2) = 0.00014$
$\log\frac{1}{6} = 9.22185$	$\log y' = 8.63884$
6.49953	$\log y = 8.63870$
$\log(1+\frac{1}{6}y'^2) = 0.00014$	$x = y = 0.04352$
$\log y'' = 8.63870$	

Hier stimmen y'' und y vollständig überein, so dass die letzte Wiederholung der Rechnung ganz überflüssig war.

§ 6.

Um die Anwendbarkeit unserer Methode des Interpolirens in einem anderen Falle zu zeigen, stellen wir uns die Aufgabe, eine Tafel zu construiren, aus welcher man den natürlichen Logarithmen irgend einer Zahl auf 6 Decimalstellen genau entnehmen kann.

Der Taylor'sche Lehrsatz gibt die Beziehung:

$$^*\lg(p+y) = \lg p + \frac{1}{p}\cdot y - \frac{1}{2p^2}\cdot y^2 + \frac{1}{3p^3}\cdot y^3 - \frac{1}{4p^4}\cdot y^4 + \dots$$

oder, wenn man nicht über die dritte Dimension hinausgeht und

---

*) Die natürlichen Logarithmen sollen stets durch lg, die brigg'schen durch log bezeichnet werden.



$$a = \frac{2}{3p}, \quad b = \frac{1}{2p}, \quad c = \frac{1}{p}$$

setzt:

$$\lg(p+y) = \lg(p) + [1-(1-ay)by]cy$$

Wie aus dieser Formel zu ersehen, kommt hier wiederholt die Aufgabe vor, zu einem gegebenen $\log x$ (wo stets $x < 1$) den zugehörigen $\log(1-x)$ zu bestimmen. Vermittelst der Tafel für Logarithmen der Summe und Differenz lässt sich wohl diese Aufgabe lösen, denn es ist

$$\log(1-x) = \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) + \log x$$

Wegen des wiederholten Auftretens derselben würde jedoch die jedesmalige Umformung allzu umständlich sein; wir geben daher am Schlusse dieser Abhandlung eine Tafel, woraus man zu irgend einem gegebenen $\log x$ den zugehörigen $\log(1-x)$ ohne weiters entnehmen kann.

Diese Tafel (V) bedarf keiner besonderen Erklärung, da sie in ihrer Einrichtung mit der Mehrzahl der gebräuchlichen Logarithmentafeln übereinstimmt, und daher nach ihren Ueberschriften jedem Sachverständigen klar sein wird. Nur das hat man zu beachten, dass bei dem wachsenden Argument A die Functonen B abnehmen. Die Tafel ist als absolut vollständig zu betrachten; denn wenn $\log x > 9.69897 - 10$, so sucht man ihn unter B auf und erhält in dem zugehörigen A den $\log(1-x)$.

§ 7.

Wir lassen nun die Tafel der natürlichen Logarithmen folgen. Sie enthält die Logarithmen einer jeden zweistelligen Zahl auf 6 Decimalstellen. Die Tafel enthält ferner die brigg'schen Logarithmen der Grössen a, b und c, so dass jetzt die in § 6. entwickelte Formel unmittelbar angewandt werden kann.

II. Tafel der natürlichen Logarithmen.

$$\lg \mathrm{nat}(p+y) = \lg \mathrm{nat}\, p + [1-(1-ay)by]cy$$

p	lg p	log a	log b	log c
10	2.302585	8.82391	8.69897	9.00000
11	2.397895	8.78252	8.65758	5.95861
12	2.484907	8.74473	8.61979	8.92082
13	2.564949	8.70997	8.58503	8.88606
14	2.639057	8.67778	8.55284	8 85387
15	2.708050	8.64782	8.52288	8.82391
16	2.772589	8.61979	8.49485	8.79588
17	2.833213	8.59346	8.46852	8.76955
18	2.890372	8.56864	8,44370	8.74473
19	2.944439	8 54516	8.42022	8.72125
20	2.995732	8.52288	8.39794	8.69897
21	3.044522	8.50169	8.37675	8.67778
22	3.091042	8.48149	8.35655	8.65758
23	3.135494	8.46218	8.33724	8.63827
24	3.178054	8.44370	8.31876	8.61979
25	3.218876	8.42597	8.30103	8.60206
26	3.258097	8.40894	8.28400	8.58503
27	3.295837	8.39254	8.26761	8.56864
28	3.332205	8.37675	8.25181	8.55284
29	3.367296	8.36151	8.23657	8.53760
30	3.401197	8.34679	8.22185	8.52288
31	3.433987	8.31455	8.20761	8.50864
32	3.465736	8.31876	8.19382	8.49485
33	3.496508	8.30539	8.18046	8.48149
34	3.526361	8.29243	8.16749	8.26852

p	lg p	log a	log b	log c
60	4.094345	8 04576	7.92082	8.22185
61	4.110874	8.03858	7.91364	8.21467
62	4.127134	8.03152	7:90658	8.20761
63	4.143135	8.02457	7.89963	8.20066
64	4.158883	8.01773	7.89279	8.19382
65	4.174387	8.01100	7.88606	8.18709
66	4.189655	8.00436	7.87943	8.18046
67	4.204693	7.99783	7.87290	8.17393
68	4.219508	7.99140	7.86646	8.16749
69	4.234107	7.98506	7.86012	8.16115
70	4.248495	7.97881	7.85387	8.15490
71	4.262680	7.97265	7.84771	8.14874
72	4.276666	7.96658	7.84164	8.14267
73	4.290459	7.96059	7.83565	8.13668
74	4.304065	7.95468	7.82974	8.13077
75	4.317488	7.94885	7.82391	8.12494
76	4.330733	7.94310	7.81816	8.11919
77	4.343805	7.93742	7.81248	8.11351
78	4.356709	7.93181	7.80688	8.10791
79	4.369448	7.92628	7.80134	8.10237
80	4.382027	7.92082	7.79588	8.09691
81	4 394449	7.91542	7.79048	8.09151
82	4.406719	7.91009	7.78516	8.08619
83	4.418841	7.90483	7.77989	8.08092
84	4.430817	7.89963	7.77469	8.07572

p	lg p	log a	log b	log c
35	3.555348	8.28084	8.15490	8.45593
36	3.583519	8.26761	8.14267	8,44370
37	3.610918	8.25571	8.13077	8.43180
38	3.637586	8.24413	8.11919	8.42022
39	3.663562	8.23284	8.10791	8.40894
40	3.688879	8.22185	8.09691	8.39794
41	3.713572	8.21112	8.08619	8.38722
42	3.737670	8.20066	8.07572	8.37675
43	3.761200	8.19044	8.06550	8.36653
44	3.784190	8.18046	8.05552	8.35655
45	3.806662	8.17070	8.04576	8.34679
46	3.828641	8.16115	8.03621	8.33724
47	3.850148	8.15181	8.02687	8.32790
48	3.871201	8.14267	8.01773	8.31876
49	3.891820	8.13371	8.00877	8.30980
50	3.912023	8.12494	8.00000	8.30103
51	3.931826	8.11634	7.99140	8.29243
52	3.951244	8 10791	7.98297	8.28400
53	3.970292	8.09963	7.97469	8.27572
54	3.988984	8.09048	7.96658	8.26761
55	4.007333	8.08355	7.95861	8.25964
56	4.025352	8.07572	7.95078	8.25181
57	4.043051	8.06803	7.94310	8.24413
58	4.060443	8.06048	7.93554	8.23657
59	4.077537	8.05306	7·92812	8.23915
60	4.094345	8.04576	7.92082	8.22185

p	lg p	log a	log b	log c
85	4.442651	7.89449	7.76955	8.07058
86	4.454347	7.88941	7.76447	8.06550
87	4.465908	7.88439	7.75945	8.06048
88	4.477337	7.87943	7.75449	8.05552
89	4.488636	7.87452	7.74958	8.05061
90	4.499810	7.86967	7.74473	8.04576
91	4.510860	7.86487	7.73993	8.04096
92	4.521789	7.86012	7.73518	8.03621
93	4 532599	7.85543	7.73049	8.03152
94	4.543295	7.85078	7.72584	8.02687
95	4.553877	7.84619	7.72125	8.02228
96	4.564348	7.84164	7.71670	8.01773
97	4.574711	7.83714	7.71220	8.01323
98	4.584967	7.83268	7.70774	8.00877
99	4.595120	7.82827	7.70333	8.00436
100	4.605170	7.82391	7.69897	8.00000

lg nat	1000=6.907755
„	10000=9.210340
„	100000=11.512925
„	1000000=13.815511
„	10000000=16.118096
„	100000000=18.420681
„	1000000000=20.723266

$$\lg \mathrm{nat}(p-y) = \lg \mathrm{nat}\, p - [1+(1+ay)by]cy$$

Die Interpolation für solche zweistellige Zahlen, denen noch ein Decimalbruch angehängt ist, lässt sich jetzt leicht ausführen, wobei man zweckmässig nach folgendem Schema verfährt. Zur besseren Uebersicht ist dabei gesetzt worden:

$$ay = a', \quad (1-a')by = b', \quad (1-b')cy = c'$$

Schema.

$\log a =$	$\log(1-b) =$
$+\log y =$	$+\log c =$
$\log a' =$	$+\log y =$
$\log(1-a') =$	$\log c' =$
$+\log b =$	$\log p =$
$+\log y =$	$+c' =$
$\log b' =$	$\log(p+y) =$

Man geht mit $\log a'$ in die durch A bezeichnete Spalte unserer Tafel V. ein, entnimmt das zugehörige B, welches $= \log(1-a')$ ist. Ganz ebenso erhält man $\log(1-b')$.

Vertauscht man in der § 6. entwickelten Formel y mit $-y$, so geht sie über in:

$$\lg(p-y) = \lg p - [1+(1+ay)by]cy$$

Dieselbe findet sich auch im Fuss der Tafel II. angegeben und liefert dann eine grössere Genauigkeit als die erstere, wenn der der zweistelligen Zahl angehängte Bruch $> \frac{1}{2}$ ist. Die Rechnung wird ganz nach dem gleichen Schema ausgeführt, man schreibe nur $(1+a')$ statt $(1-a')$, ebenso $(1+b')$ statt $(1-b')$; auch hat man schliesslich c' von $\log p$ zu subtrahiren.

Ist die Zahl, zu welcher der lg nat gesucht werden soll, nicht zweistellig, so multiplicire oder dividire man dieselbe mit derjenigen Potenz von 10, so dass eine zweistellige Zahl entsteht, z. B.

$$\lg 0.069378 = \lg 69.378 - \lg 1000$$
$$\lg 578432 = \lg 57.8432 + \lg 10000$$

Die Logarithmen mehrerer aufeinander folgender Potenzen von 10 sind am Schlusse der Taf. II. angegeben.

§ 8.

Durch mehrere Beispiele wollen wir den Gebrauch der Tafel II. erläutern.

1. lg 36.29 soll gesucht werden.

Man setzt $p = 36$, $y = 0.29$

$\log a = 8.26761$	$\log(1-b') = 9.99824$
$+\log y = 9.46240$	$+\log c = 8.44370$
$\log a' = 7.73001$	$+\log y = 9.46240$
$\log(1-a') = 9.99766$	$\log c' = 7.90434$
$+\log b = 8.14267$	$\log p = 3.583519$
$+\log y = 9.46240$	$+c' = 0.008023$
$\log b' = 7.60273$	$\lg 36.29 = 3.591542$

Auf 8 Decimalstellen genau ist $\lg 36.29 = 3.5915\,4222$, daher obiges Resultat noch in der 6. Stelle richtig.

2. lg 15.89 soll gesucht werden.

Man setzt $p = 15$ und $y = 0.89$ und erhält $\log a' = 8.59721$, $\log b' = 8.45474$ und $\log c' = 8.76075$, $c' = 0{,}057644$, $\lg p = 2.708050$, folglich $\lg 15.89 = 2.765694$.

Auf 8 Decimalen ist $\lg 15.89 = 2.7656\,8998$, daher unser Resultat um 4 Einheiten der 6. Stelle zu gross. Da nun aber $15.89 = 16 - 0.11$, so setze $p = 16$, $y = 0.11$ und benutze die im Fuss von Tafel II. stehende Formel, so erhält man $\log a' = 7.66118$, $\log b' = 7.53823$, $\log c' = 7.83876$, $c' = 0{,}006899$, $\lg p = 2.772589$, daher $\lg 15.89 = 2.765690$, welches Resultat noch in der 6. Stelle richtig ist.

Die Ursache, warum das letzte Resultat genauer, ist leicht einzusehen. Denn die dieser Rechnung zu Grunde liegende Reihe (§ 6)

$$\lg(p+y) = \lg p + \frac{1}{p} y - \frac{1}{2p^2} y^2 + \frac{1}{3p^3} y^3 - \frac{1}{4p^4} y^4 + \ldots$$

convergirt, wenn y sich der Einheit nähert, nicht rasch genug, um das Glied mit y'' zu vernachlässigen, wie hier geschehen ist. Dagegen ist nach der zweiten Formel y um so kleiner zu nehmen, je weniger der der zweistelligen Zahl angehängte Decimalbruch von 1 verschieden ist.

3. lg 10.5 ist zu bestimmen.

Hier wäre es gleichgültig, ob man nach der ersten oder zweiten Formel rechnet, weil in beiden Fällen $y = 0.5$ zu setzen ist. Doch wird die zweite Formel etwas mehr Genauigkeit gewähren, weil für $p = 11$, die Werte von a, b und c etwas kleiner sind als für $p = 10$. Wir setzen daher

$$p = 11, \quad y = 0.5$$

$\log a = 8.78252$	$\log(1+b') = 0.01005$
$+\log y = 9.69897$	$+\log c = 8.95861$
$\log a' = 8.48149$	$+\log y = 9.69897$
$\log(1+a') = 0.01296$	$\log c' = 8.66763$
$+\log b = 8.65758$	$\lg p = 2.397895$
$+\log y = 9.69897$	$c' = 0.046519$
$\log b' = 8.36951$	$\lg 10.5 = 2.351376$

Auf 8 Stellen ist $\lg 10.5 = 2.3513\,7526$, also der Fehler gleich $\frac{3}{4}$ Einheiten der 6. Decimalstelle. Diess ist indes auch der ungünstigste Fall, der überhaupt eintreten kann, weil für solche Zahlen, wie 11.5 oder 12.5 u. s. f., wo $y = \frac{1}{2}$ zu nehmen ist, die Werte von a, b, c stets abnehmen, für andere Zahlen dagegen immer y kleiner als $\frac{1}{2}$ gesetzt werden kann.

Es lässt sich daher behaupten, dass durch die Tafel II., obwohl sie nur den Raum einer Seite in Anspruch nimmt, die Aufgabe gelöst ist, den natürlichen Logarithmen irgend einer Zahl durch eine leichte Rechnung auf 6 Decimalstellen zu bestimmen, wobei im ungünstigsten Falle die letzte Stelle höchstens um eine Einheit unsicher sein wird. Nach der gewöhnlichen Methode des Interpolirens hätte man, um ein gleiches Resultat zu erzielen, die 5 ersten Differenzen in Rechnung ziehen müssen, was jedenfalls viel umständlicher gewesen wäre.

§ 6.

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe: Zu einem gegeben $\lg x$ die zugehörige Zahl x zu bestimmen, bietet nun auch keine Schwierigkeit. Man addirt oder subtrahirt $\lg 10^n$, wo n so zu wählen ist, dass die solcher Weise entstehende Zahl zwischen den Grenzen 2.302585 und 4,605170 enthalten ist. Setzt man dann $\lg x \pm \lg 10^n = \lg(p+y)$ und versteht unter $\lg p$ den nächst kleineren Wert der Tafel, so erhält man jetzt (siehe § 5.) die successiven Näherungswerte von y wie folgt:

$$y' = \frac{\lg(p+y) - \lg p}{c}$$

$$y'' = \frac{y'}{1 - by'}$$

$$y = \frac{y'}{1-(1-ay'')by''}$$

Setzt man $\lg(p+y)-\lg p=\alpha$, $y'b=\beta$, $y''a=\gamma$ und $(1-\gamma)by''=\delta$, so wird

$$y'=\frac{\alpha}{c},\quad y''=\frac{y'}{1-\beta},\quad y=\frac{y'}{1-\delta}$$

Die Rechnung lässt sich zweckmässig nach folgendem Schema ausführen:

$\lg(p+y)=$	$\log y''=$
$-\lg p=$	$+\log a=$
$\alpha=$	$\log\gamma=$
$\log\alpha=$	$\log(1-\gamma)=$
$-\log c=$	$+\log b=$
$\log y'=$	$+\log y''=$
$+\log b=$	$\log\delta=$
$\log\beta=$	$\log y'=$
$\log(1-\beta)=$	$\log(1-\delta)=$
$\log y''=$	$\log y=$

$$x=(p+y)\,.\,10^{\mp n}$$

Man könnte auch $\lg x\pm\lg 10^n=\lg(p-y)$ setzen, und würde dann unter $\lg p$ den nächst grösseren Wert der Tafel verstehen, dann hätte man

$$y'=\frac{\lg p-\lg(p-y)}{c}$$

$$y''=\frac{y'}{1+by'}$$

$$y=\frac{y'}{1+(1+ay'')by''}$$

Hier setzt man $\alpha=\lg p-\lg(p-y)$ und schreibt $(1+\gamma)$ statt $(1-\gamma)$, ebenso $(1+\beta)$ und $(1+\delta)$ statt $(1-\beta)$, $(1-\delta)$; im übrigen ist die Rechnung ganz nach dem gleichen Schema auszuführen, und man hat schliesslich:

$$x=(p-y)\,.\,10^{\mp n}$$

Beispiel.

$\lg x = 7.370860$	$\log y'' = 9.94951$
$\lg 100 = 4.605170$	$+\log a = 8.64782$
$\lg(p+y) = 2.765690$	$\log y = 8.59733$
$\log 15 = 2.708050$	$\log(1-\gamma) = 9.98247$
$\alpha = 0.057640$	$+\log b = 8.52288$
$\log\alpha = 8.76072$	$+\log y'' = 9.94951$
$-\log c = 8.82391$	$\log\delta = 8.45486$
$\log y' = 9.93681$	$\log y' = 9.93681$
$+\log b = 8.52288$	$\log(1-\delta) = 9.98744$
$\log\beta = 8.45969$	$\log p = 9.94937$
$\log(1-\beta) = 9.98730$	$y = 0.88996$
$\log y'' = 9.94951$	$p+y = 15.88996$
	$x = 1588.996$

Rechnen wir dasselbe Beispiel auch nach der zweiten Methode:

$\log 16 = 2.772589$	$\log\gamma = 7.66124$
$-\log(p-y) = 2.765690$	$\log\delta = 7.52839$
$\alpha = 0.006899$	$\log y = 9.04145$
$\log y' = 9.04291$	$y = 0.110015$
$\log\beta = 7.52786$	$p-y = 15.889985$
$\log y'' = 9.04145$	$x = 1588.9985$

Dieses Resultat ist genauer als das erstere, weil hier y beträchtlich kleiner ausfiel als dort.

§ 10.

Die in § 3. mitgeteilte Tafel gibt die Werte der Lamdafunction nur bis zu dem Argumente $p = 3$. Für grössere Werte von p entwickelt man $\Lambda(p)$ am zweckmässigsten in eine nach fallenden Potenzen von p fortschreitende Reihe. Nach dem früheren ist:

$$d\Lambda(p) = 2\sqrt{1+p^2}\,dp = 2p\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\,dp$$

$$d\Lambda(p) = 2p\,dp\left\{1+\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{2.4p^4}+\frac{1.3}{2.4.6p^6}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8p^8}+\ldots\right\}$$

Wird integrirt und die Constante durch C bezeichnet, so ist

$$\varDelta(p) = C + p^2 + \lg p + \frac{1}{8p^2} - \frac{1}{32p^4} + \frac{5}{384p^6} - \ldots$$

Um den Wert von C zu bestimmen, haben wir auch

$$\varDelta(p) = p\sqrt{1+p^2} + \lg(p+\sqrt{1+p^2}) = p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \lg p + \lg\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right]$$

$$\varDelta(p) = p^2\left(1+\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2.4p^4} + \ldots\right) + \lg p + \lg\left(2+\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2.4p^4} + \ldots\right)$$
$$= p^2 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{8p^2} + \ldots + \lg p + \lg 2 + \left(\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p^4}\ldots\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4p^2} - \ldots\right)^2 + \ldots$$

$$\varDelta(p) = \tfrac{1}{2} + \lg 2 + p^2 + \lg p + \frac{1}{8p^2}\ldots$$

Die Vergleichung mit der obigen Reihe gibt

$$C = \tfrac{1}{2} + \lg 2 = 0.5 + 0.6931\,4718 = 1.1931\,4718$$

Die obige Reihe schreiben wir jetzt in folgender Form an:

$$\varDelta(p) = 1.193147 + p^2 + \lg p + \left[1 - \left(1 - \frac{5}{12p^2}\right)\frac{1}{4p^2}\right]\frac{1}{8p^2}$$

Setzt man darin $\alpha = \frac{5}{12}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{8}$, so wird

$$\varDelta(p) = 1.193147 + p^2 + \lg p + \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{p^2}\right)\frac{\beta}{p^2}\right]\frac{\gamma}{p^2};$$

hier ist

$$\log\alpha = 9.61979, \quad \log\beta = 9.39794, \quad \log\gamma = 9.09691$$

Um die Anwendung dieser Formel zu erläutern, nehmen wir $p = 7$. Die Tafel II. gibt $\lg 7 = \lg 70 - \lg 10 = 1.945910$

$$\log\alpha = 9.61979$$
$$+\log\frac{1}{p^2} = 8.30980$$
$$\overline{7.92959}$$

$$\log\left(1-\frac{\alpha}{p^2}\right) = 9.99629$$
$$+\log\beta = 9.39794$$
$$+\log\frac{1}{p^2} = 8.30980$$
$$\overline{7.70403}$$

$$\log\left[1-\left(1-\frac{\alpha}{p^2}\right)\frac{\beta}{p^2}\right] = 9.99780$$
$$+\log\gamma = 9.09691$$
$$+\log\frac{1}{p^2} = 8.30980$$
$$\log 0.0025381 = 7.40451$$

$$\begin{aligned} & 1.193147 \\ +p^2 &= 49.0 \\ +\lg p &= \quad 1.945910 \\ + & \quad 0.002538 \\ \hline \Delta(7) &= 52.141595 \end{aligned}$$

Ist bei der umgekehrten Aufgabe das gegebene $\Delta(x) > 12$, so kommt es zunächst darauf an, einen Näherungswert für x zu bestimmen.

In der Reihe $\Delta(x) = x^2 + 1.193 \ldots + \lg x + \frac{1}{8x^2} - \ldots$ übersteigt das Glied x^2 die Summe der folgenden Glieder beträchtlich, so dass $\sqrt{\Delta(x)}$ schon als ein Näherungswert von x betrachtet werden könnte; doch erhalten wir sogleich einen etwas genaueren Wert, wenn wir schreiben $x = \sqrt{\Delta(x) - 1.193 \ldots - \lg x}$ und dabei $\lg 3$ für $\lg x$ setzen, da dies der kleinste hier vorkommende Wert von x ist. Bezeichnet man die successiven Näherungswerte von x durch x', x'', x''', so findet sich hiernach:

$$x' = \sqrt{\Delta(x) - 2.305}$$

$$x'' = \sqrt{\Delta(x) - 1.193147 - \lg x'}$$

$$x''' = \sqrt{\Delta(x) - 1.193147 - \lg x'' - \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{x''^2}\right)\frac{\beta}{x''^2}\right]\frac{\gamma}{x''^2}}$$

x''' wird hier meistens nur wenig von x'' verschieden sein, und ist dann als der richtige Wert von x zu betrachten. Im anderen Falle würde man in der letzten Formel x''' an die Stelle von x'' setzen und die Rechnung wiederholen.

Sei z. B. $\Delta(x) = 73.173644$

$$x' = \sqrt{70.869} = 8.4; \quad \lg 8.4 = 2.128232$$

$$x'' = \sqrt{69.852265} = 8.3578$$

$\lg x''$ kann man mittelst Tafel II. bestimmen, oder man multiplicirt x'' mit 2.3025851.

$$\begin{aligned} \log\alpha &= 9.61979 \\ +\log\frac{1}{x''^2} &= 8.15582 \\ \hline & \quad 7.77561 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\left(1 - \frac{\alpha}{x''^2}\right) &= 9.99734 \\ +\log\beta &= 9.39794 \\ +\log\frac{1}{x''^2} &= 8.15582 \\ \hline & \quad 7.55110 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{x''^2}\right)\frac{\beta}{x''^2}\right] &= 9.99846 \\ +\log\gamma &= 9.09691 \\ +\log\frac{1}{x''^2} &= 8.15582 \\ \hline \log 0.0017832 &= 7.25119 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r}
1.193147 \\
+\lg x'' = 2.123196 \\
+\quad 0.001783 \\
\hline
3.318126 \\
73.173644 \\
\hline
x''' = 69.855518
\end{array}
$$

$$x''' = 8.35796$$

Dieser Wert von x''' ist so wenig von x'' verschieden, dass wir hier $x = x'''$ nehmen können.

§ 11.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie mittelst einer Tafel von sehr geringem Umfang, das als Gammafunction bezeichnete Euler-sche Integral für jede Zahl leicht berechnet werden kann. Dasselbe ist definirt durch:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left[\log \frac{1}{x}\right]^{n-1} dx$$

In seinen Exercices de calcul integral entwickelt Legendre folgende Reihe zur Berechnung dieser Function:

$$\log \Gamma(1+n) = -\log(1+n) + B_1 n + B_2 n^2 - B_3 n^3 + B_4 n^4 - B_5 n^5 + B_6 n^6 - \dots$$

Die Bedeutung der Coefficienten B geht aus den folgenden Gleichungen hervor:

$$B_1 = M(1-K), \quad B_2 = \tfrac{1}{2}M(S_2 - 1), \quad B_3 = \tfrac{1}{3}M(S_3 - 1), \quad B_4 = \tfrac{1}{4}M(S_4 - 1) \dots$$

Dabei ist:

$M = 0.43429\,44819$

$K = 0.57721\,56649$ (Constante des Integrallogarithmus)

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$S_3 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

$$S_4 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Die Zahlenwerte der B sind nach Legendre:

$B_1 = 0.18361\ 29037\ 6840$ $\qquad B_6 = 0.00125\ 53326\ 86$
$B_2 = 0.14004\ 56532\ 118$ $\qquad B_7 = 0.00051\ 80064\ 42$
$B_3 = 0.02925\ 07326\ 917$ $\qquad B_8 = 0.00022\ 13466\ 62$
$B_4 = 0.00893\ 81315\ 34$ $\qquad B_9 = 0.00009\ 69148\ 80$
$B_5 = 0.00320\ 75040\ 58$ $\qquad B_{10} = 0.00004\ 31938\ 49$
$B_{11} = 0.00001\ 95112\ 17$
$B_{12} = 0.00000\ 89061\ 69$
$B_{13} = 0.00000\ 40995\ 17$
$B_{14} = 0.00000\ 18999\ 80$
$B_{15} = 0.00000\ 08856\ 20$

Setzt man in obiger Reihe $1+n=p$, so geht sie, wenn man noch Kürze halber $\log\Gamma(p)$ durch $f(p)$ bezeichnet, über in:

$$f(p) = -\log p + B_1(p-1) + B_2(p-1)^2 - B_3(p-1)^3 + B_4(p-1)^4 - B_5(p-1)^5 + \dots$$

Durch wiederholte Differentiation findet sich:

$$f'(p) = -\frac{M}{p} + B_1 + 2B_2(p-1) - 3B_3(p-1)^2 + 4B_4(p-1)^3 - 5B_5(p-1)^4 + \dots$$

$$f''(p) = \frac{M}{p^2} + 2B_2 - 6B_3(p-1) + 12B_4(p-1)^2 - 20B_5(p-1)^3 + 30B_6(p-1)^4 - \dots$$

$$f'''(p) = -\frac{2M}{p^3} - 6B_3 + 24B_4(p-1) - 60B_5(p-1)^2 + 120B_6(p-1)^3 - 210B_7(p-1)^4 + \dots$$

Vermittelst dieser Reihen erhält man die folgende

Tafel der Differentialquotienten der Gammafunction.

p	$f'(p)$	$f''(p)$	$f'''(p)$
1.0	—0.2506 8158	+0.714 3858	—1.044 093
1.1	—0.1840 3443	+0.622 4739	—0.808 421
1.2	—0.1255 2843	+0.550 4149	—0.641 903
1.3	—0.0734 7867	+0.492 6000	—0.520 486
1.4	—0.0266 5897	+0.445 3067	—0.429 573
1.5	+0.0158 4739	+0.405 9794	—0.359 942
1.6	+0.0547 4171	+0.372 8122	—0.305 558
1.7	+0.0905 7119	+0.344 4966	—0.262 353
1.8	+0.1237 7020	+0.320 0638	—0.227 512
1.9	+0.1546 8882	+0.298 7825	—0.199 042
2.0	+0.1836 1290	+0.280 0913	—0.175 504

Die Berechnung dieser Zahlenwerte würde übrigens, wenn p sich der Zahl 2 nähert, sehr beschwerlich sein, weil in diesem Falle die obigen Reihen langsam convergiren. Es genügt indessen, diese Werte von $p = 1.0$ bis $p = 1.5$ zu kennen, weil die folgenden sich daraus ableiten lassen. Denn nach der Theorie der Gammafunction bestehen folgende Gleichungen:

$$\Gamma(1+x).\Gamma(1-x) = \frac{x\pi}{\sin x\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(2+x) = (1+x)\Gamma(1+x)$$

Vertauscht man in der letzteren Formel $-x$ mit x und multiplicirt sie mit der ersten, so wird

$$\Gamma(1+x).\Gamma(2-x) = \frac{(1-x)x\pi}{\sin x\pi}$$

In diese $1+x = p$ gesetzt, so geht sie über in:

$$\Gamma(3-p).\Gamma(p) = \frac{(p-1)(2-p)\pi}{\sin(p-1)\pi}$$

Wird diese Gleichung logarithmirt und dann wiederholt differentiirt, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$f'(3-p) = -\frac{M}{p-1} + \frac{M}{2-p} + \pi M \cot(p-1)\pi + f'(p)$$

$$f''(3-p) = -\frac{M}{(p-1)^2} - \frac{M}{(2-p)^2} + \frac{\pi^2 M}{\sin^2(p-1)\pi} - f''(p)$$

$$f'''(3-p) = -\frac{2M}{(p-1)^3} + \frac{2M}{(2-p)^3} + 2\pi^3 M \frac{\cos(p-1)\pi}{\sin^3(p-1)\pi} + f'''(p)$$

Setzt man z. B. $p = 1.1$, so wird $3-p = 1.9$ und $(p-1)\pi = \text{arc}\,18^0$. Dafür finden sich folgende Werte:

$$f'(1.9) = 0.3387\ 23247 + f''(1.1)$$
$$f''(1.9) = 0.9212\ 5640 - f''(1.1)$$
$$f'''(1.9) = 0.609\ 3785 + f'''(1.1)$$

Für $p = 1.5$ wird auch $3-p = 1.5$; $(p-1)\pi = \text{arc}\,90^0$. Dadurch werden in der ersten und dritten Gleichung die Werte zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens identisch gleich. Die zweite Gleichung gibt dagegen:

$$f''(1.5) = -8M + \pi^2 M - f''(1.5)$$

daher

$$f''(1.5) = \tfrac{1}{2}M(\pi^2 - 8) = 6B_2 - M \quad \text{(siehe unten).}$$

Setzt man in den 3 Gleichungen $p = 1$, so erhält man:

$$f'(2) = M + f'(1) + \infty - \infty$$
$$f''(2) = -M - f''(1) + \infty - \infty$$
$$f'''(2) = 2M + f'''(1) + \infty - \infty$$

Das Aufsuchen der wahren Werte dieser unbestimmten Ausdrücke nach den bekannten Regeln führt zu folgenden Resultaten:

$$f'(2) = M + f'(1)$$
$$f''(2) = -M - f''(1) + \tfrac{1}{3}M\pi^2$$
$$f'''(2) = 2M + f'''(1)$$

Diese Werte lassen sich noch vereinfachen, denn die in diesem Paragraph angeführten Reihen für $f'(p)$, $f''(p)$, $f'''(p)$ gehen, wenn man darin $p = 1$ setzt, in die folgenden einfachen Ausdrücke über:

$$f'(1) = -M + B_1$$
$$f''(1) = M + 2B_2$$
$$f'''(1) = -2M - 6B_3$$

Werden dieselben oben eingesetzt, so erhält man

$$f'(2) = B_1, \quad f''(2) = \tfrac{1}{3}M\pi^2 - 2(M + B_2), \quad f'''(2) = -6B_3$$

Nun ist bekanntlich

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = S_2 \quad \text{und} \quad MS_2 = M + 2B_2$$

daher

$$\tfrac{1}{3}M\pi^2 = 2MS_2 = 2M + 4B_2$$

wodurch endlich

$$f''(2) = 2B_2$$

§ 12.

Ein Blick auf die Tafel der numerischen Werte der Differentialquotienten der Gammafunction (§ 11) zeigt, dass der erste derselben anfänglich negativ ist, zwischen $p = 1.4$ und 1.5 durch Null geht, und dann positiv wird. Daher erreicht die Function, weil der zweite Differentialquotient zugleich positiv ist, innerhalb der angeführten Grenzen ein Minimum. Legendre findet, dass dieses statthabe bei dem Werte

$$p = 1.4613\,21451$$

und das Minimum selbst

$$\Gamma(p) = 0.88560\,31944$$

Wir lassen jetzt die Tafel zur Berechnung der Gammafunction folgen. In derselben sind die Werte dieser Function nur von $p = 1$ bis $p = 2$ enthalten, was vollständig genügt um $\Gamma(p)$ für jedes andere p leicht abzuleiten.

Die Grössen a, b, c sind mittelst der in § 11. mitgeteilten Tabelle für $f'(p)$, $f''(p)$, $f'''(p)$ berechnet worden (siehe § 2.).

Der Umstand, dass der erste Differentialquotient innerhalb der Grenzen der Tafel sein Zeichen ändert, hat auch eine entsprechende Modification des Interpolationsverfahrens zur Folge, wie dies bei beiden Teilen der Tafel im Kopf und Fuss derselben angegeben ist.

III. Tafel der logarithmischen Werte der Gammafunction.

$$\log\Gamma(p+y) = \log\Gamma(p) - [1-(1-ay)by]cy$$

p	$\log\Gamma(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
1.0	0.000 0000	9.68769	0.15378	9.39912
1.1	9.978 3407	9.63640	0.22819	9.26490
1.2	9.962 9225	9.58966	0.34092	9.09874
1.3	9.953 0203	9.54679	0.52530	8.86616
1.4	9.948 0528	9.50726	0.92179	8.42584
1.461631	9.947 2392	(Minimalwert)		

$$\log\Gamma(p-y) = \log\Gamma(p) + [1+(1+ay)by]cy$$

$$\log\Gamma(p+y) = \log\Gamma(p) + [1+(1-ay)by]cy$$

p	$\log\Gamma(p)$	$\log a$	$\log b$	$\log c$
1.5	9.947 5449	9.47061	1.10752	8.19996
1.6	9.951 1020	9.43648	0.53214	8.73832
1.7	9.958 3912	9.40458	0.27916	8.95699
1.8	9.969 1287	9.37465	0.11159	9.09262
1.9	9.983 0693	9.34647	9.98487	9.18946
2.0	0.000 0000	9.31987	9.88237	9.26390

$$\log\Gamma(p-y) = \log\Gamma(p) - [1-(1+ay)by]cy$$

Um die Gammafunction für ausserhalb der Tafel liegende Argumente zu berechnen, kann man folgende Formeln benutzen:

Gammafunction für positive Zahlen

μ bedeutet einen echten Bruch

m irgend eine ganze positive Zahl

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(2+\mu) = (1+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(3+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

$$\Gamma(4+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\ldots(m-1+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

Für $\mu = 0$ folgt daraus

$$\Gamma(m) = 1.2.3\ldots(m-1)$$

Gammafunction für negative Zahlen

$$\Gamma(-\mu) = -\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu}$$

$$\Gamma(-1-\mu) = +\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)}$$

$$\Gamma(-2-\mu) = -\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)(2+\mu)}$$

$$\Gamma(-3-\mu) = +\frac{\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(-m-\mu) = \frac{(-1)^{m+1}\Gamma(2-\mu)}{(1-\mu)\mu(1+\mu)\dots(m+\mu)}$$

Die Werte von $\log\Gamma(1+\mu)$ und von $\log\Gamma(2-\mu)$ werden aus Tafel III. entnommen.

§ 13.

Die Vorschriften des vorigen Paragraphs sollen wieder durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Gesucht wird $\log\Gamma(1.068)$. Hier setzt man $p=1$, $y=0.068$

$$\begin{aligned}
\log a &= 9.68769 \\
+\log y &= 8.83251 \\
&\overline{8.52020} \\
\log(1-ay) &= 9.98537 \\
+\log b &= 0.15378 \\
+\log y &= 8.83251 \\
&\overline{8.97166} \\
\log(1-(1-ay)by) &= 9.95728 \\
+\log c &= 9.39912 \\
+\log y &= 8.83251 \\
\log 0.0154494 &= 8.18891
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\Gamma(1) &= 0.000\,0000 \\
&-0.015\,4494 \\
\log\Gamma(1.068) &= 9.984\,5506
\end{aligned}$$

Auf 9 Decimalen genau ist $\log\Gamma(1.068) = 9.984\,552\,985$, daher das obige Resultat um 24 Einheiten der 7ten Decimale fehlerhaft.

Setzt man nun aber $p=1.1$, $y=0.032$, und rechnet nach der im Fuss des ersten Teils der Tafel III. angegebenen Formel, so wird

$$\begin{aligned}
\log a &= 9.63640 \\
+\log y &= 8.50515 \\
\hline
\log ay &= 8.14155 \\
\log(1+ay) &= 0.00598 \\
+\log b &= 0.22819 \\
+\log y &= 8.50515 \\
\hline
&\ 8.73932 \\
\log(1+(1+ay)by) &= 0.02320 \\
+\log c &= 9.26490 \\
+\log y &= 8.50515 \\
\hline
\log 0.0062123 &= 7.79325
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\Gamma(1.1) &= 9.978\ 3407 \\
&+0.006\ 2123 \\
\hline
\log\Gamma(1.068) &= 9.984\ 5530
\end{aligned}$$

Da dieses Resultat noch in der siebenten Stelle richtig ist, so wird man stets diejenige der beiden Formeln anwenden, für welche das y am kleinsten wird.

2. Es soll $\log\Gamma(1.489)$ bestimmt werden.

Nach der Formel im Kopf vom ersten Teil der Tafel III. ist

$$p = 1.4, \quad y = 0.089$$

" " " " Fuss vom zweiten Teil der Tafel III. ist

$$p = 1.5, \quad y = 0.011$$

Legt man die letzteren Werte zu Grunde, so findet sich $\log\Gamma(1.489) = 9.947\ 3952$, was bis auf 1 Einheit der siebenten Stelle richtig ist.

3. $\log\Gamma(7.31374)$ soll berechnet werden.

Nach den Formeln des § 11. ist zu setzen $m = 7$, $\mu = 0.31374$,

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)(4+\mu)(5+\mu)(6+\mu).\Gamma(1+\mu)$$

$1+\mu = 1.31374 = p+y$, daher $p = 1.3$ und $y = 0.01374$

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(1+\mu) &= 9.952\ 0570 \\
\log(1+\mu) &= 0.118\ 5094 \\
\log(2+\mu) &= 0.364\ 3145 \\
\log(3+\mu) &= 0.520\ 3184 \\
\log(4+\mu) &= 0.634\ 8539 \\
\log(5+\mu) &= 0.725\ 4003 \\
\log(6+\mu) &= 0.800\ 2867 \\
\hline
\log\Gamma(7.31374) &= 3.115\ 7402
\end{aligned}$$

§ 14.

Was nun die umgekehrte Aufgabe betrifft, zu einem gegebenen $\Gamma(x)$ das zugehörige x zu bestimmen, so hat man zunächst zu untersuchen, ob es hier nur eine oder mehrere Lösungen gibt. Liegt $\Gamma(x)$ zwischen den Grenzen 0.8856 und 1.0 oder $\log\Gamma(x)$ zwischen 9.947...—10 und 0.0, so zeigt ein Blick auf Tafel III., dass es 2 Werte von x gibt, welche sich auch (siehe § 5.) leicht bestimmen lassen.

Um auch in anderen Fällen darüber in's Klare zu kommen, stellen wir uns die Aufgabe, die Curve zu construiren, deren Gleichung ist: $y = \Gamma(x)$.

Nach den Formeln des § 11. findet man leicht folgende Werte:

x	y	x	y	x	y
0.0	∞	2	1.0	6	120
0.5	1.7724	3	2.0	7	720
1.0	1.0	4	6.0	8	5040
1.4616	0.8856	5	24.0	9	40320

Die Curve (s. Fig.) erstreckt sich auf der positiven Seite der Ordinatenaxe mit 2 Aesten NCB, NDF in's Unendliche; für den ersten derselben ist diese Axe eine Asymptote. Der Abscisse $AM = 1.46...$ entspricht die Ordinate $MN = 0.88...$, welche den kürzesten Abstand der Curve von der Abscissenaxe angibt. Für negative Werte von x sind die y teils negativ und teils positiv und zwar von 0 bis —1 stets negativ; von —1 bis —2 immer positiv u. s. f. Für jede ganzzahlige negative Abscisse ist $y = \infty$ d. h. die Curve besteht auf der negativen Seite der Ordinatenaxe aus einer unbegrenzten Zahl von Zweigen, welche durch Asymptoten getrennt sind, die in den Abständen —1, —2, —3, ... der Y-Axe parallel laufen. Die Scheitel N', N'', N''', ... dieser aufeinanderfolgenden Zweige nähern sich fortwährend der Abscissenaxe, denn es ist

$$M'N' = -3.54..., \quad M''N'' = 2.31..., \quad M'''N''' = -0.89...,$$
$$M^{IV}N^{IV} = 0.24..., \quad M^{V}N^{V} = -0.05.$$

Hieraus ersieht man, dass jedem positiven y, welches > 0.8856 zwei positive Werte des x entsprechen, wovon der kleinere zwischen 0 und 1.46..., der andere zwischen 1.46... und ∞ liegt. Ausserdem gibt es dafür noch eine unbegrenzte Zahl negativer Werte. Negativen Werten des y entsprechen dagegen nur negative Abscissen, ebenfalls in unbegrenzter Zahl.

Wir beschränken uns hier darauf, zu einem gegebenen $\Gamma(x)$ die beiden positiven x zu bestimmen. Hier sind vor allem genäherte Werte zu suchen und dieselben dann noch zu verbessern. Da indes die Ermittelung derselben sehr zeitraubende Versuchsrechnungen erfordern würde, so teilen wir hier eine abgekürzte Tafel mit, die sehr rasch zum Ziele führt.

IV. Tafel zum Aufsuchen der Näherungswerte des x, wenn $\log\Gamma(x)$ gegeben ist.

x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ
0.0000	∞					1.0	0.000	22	3.5	0.522	48	6.0	2.079	75	8.5	4.147	91
0.0001	4.00	30	0.01	2.00	31	1.1	9.978	15	3.6	0.570	50	6.1	2.154	75	8.6	4.238	91
0.0002	3.70	18	0.02	1.69	17	1.2	9.963	10	3.7	0.620	52	6.2	2.229	76	8.7	4.329	92
0.0003	3.52	12	0.03	1.52	13	1.3	9.953	5	3.8	0.672	52	6.3	2.305	77	8.8	4.420	92
0.0004	3.40	10	0.04	1.39	10	1.4	9.948	0	3.9	0.724	54	6.4	2.382	77	8.9	4.513	93
0.0005	3.30	8	0.05	1.29	8	1.5	9.948	3	4.0	0.778	55	6.5	2.459	78	9.0	4.606	93
0.0006	3.22	6	0.06	1.21	7	1.6	9.951	7	4.1	0.833	57	6.6	2.537	79	9.1	4.699	93
0.0007	3.16	6	0.07	1.14	6	1.7	9.958	11	4.2	0.890	57	6.7	2.616	80	9.2	4.792	95
0.0008	3.10	5	0.08	1.08	5	1.8	9.969	14	4.3	0.947	59	6.8	2.696	80	9.3	4.887	94
0.0009	3.05	5	0.09	1.03	5	1.9	9.983	17	4.4	1.006	60	6.9	2.776	81	9.4	4.981	96
0.0010	3.00		0.10	0.98		2.0	0.000	20	4.5	1.066	60	7.0	2.857	82	9.5	5.077	95
						2.1	0.020	22	4.6	1.126	62	7.1	2.939	82	9.6	5.172	96
						2.2	0.042	25	4.7	1.188	63	7.2	3.021	83	9.7	5.268	97
						2.3	0.067	27	4.8	1.251	64	7.3	3.104	84	9.8	5.365	97
						2.4	0.094	30	4.9	1.315	65	7.4	3.188	84	9.9	5.462	98
						2.5	0.124	31	5.0	1.380	66	7.5	3.272	85	10	5.560	—
0.001	3.00	30	0.1	0.98	32	2.6	0.155	34	5.1	1.446	67	7.6	3.357	85			
0.002	2.70	18	0.2	0.66	18	2.7	0.189	35	5.2	1.513	68	7.7	3.442	87	20	17.085	
0.003	2.52	12	0.3	0.48	13	2.8	0.224	38	5.3	1.581	68	7.8	3.529	86	30	30.947	
0.004	2.40	10	0.4	0.35	10	2.9	0.262	39	5.4	1.649	70	7.9	3.615	87	40	46.310	
0.005	2.30	8	0.5	0.25	8	3.0	0.301	41	5.5	1.719	70	8.0	3.702	88	50	62.784	
0.006	2.22	7	0.6	0.17	6	3.1	0.342	43	5.6	1.789	72	8.1	3.790	89	60	80.142	
0.007	2.15	6	0.7	0.11	4	3.2	0.385	44	5.7	1.861	72	8.2	3.879	89	70	98.233	
0.008	2.09	5	0.8	0.07	4	3.3	0.429	45	5.8	1.933	72	8.3	3.968	89	80	116.952	
0.009	2.04	4	0.9	0.03	3	3.4	0.474	48	5.9	2.005	74	8.4	4.057	90	90	136.218	
0.010	2.00		1.0	0.00		3.5	0.522		6.0	2.079		8.5	4.147		100	155.970	
x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	Δ	x	$\log\Gamma(x)$	

Sei z. B. $\log\Gamma(x) = 3.115\,9572$, so liefert uns diese Tafel, indem man auf die gewöhnliche Weise interpolirt, für x die beiden Näherungswerte: 0.00077 und 7.314.

Den ersten können wir leicht genauer erhalten. Denn bezeichnet man die successiven Näherungswerte durch x', x'', x''', ..., so gibt uns die Gleichung $\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(1+\mu)$ den Wert $\mu = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\mu)}$. Im Zähler setzen wir x' an die Stelle von μ, während der Nenner das gegebene

$\Gamma(x)$ ist, daher $x'' = \frac{\Gamma(1+x')}{\Gamma(x)}$, und ebenso $x''' = \frac{\Gamma(1+x'')}{\Gamma(x)}$; der letztere Wert wird meist schon genau sein, so dass wir ihn $= x$ setzen konnen.

Nehmen wir danach $x' = 0.00077$, so gibt Tafel III.

$$\log\Gamma(1.00077) = 9.9998072$$

daher $x'' = 0.000765715$. Die fernere Rechnung liefert $x = 0.000765717$, welcher Wert, wie man sieht, von x'' nicht wesentlich verschieden ist. Wie der andere Wert von x genauer gefunden werden kann, soll im folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§ 15.

Die Gleichung $\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\ldots(m-1+\mu)\Gamma(1+\mu) = \Gamma(x)$ gäbe, wenn der Wert von $x = 7.314$ genau wäre, $m = 7$ und $\mu = 0.314$. Die ganze Zahl m ist hier richtig bestimmt, das μ dagegen bedarf noch einer Correction, welche durch $\Delta\mu$ bezeichnet werden soll, so dass dann also $x = m + \mu + \Delta\mu$.

Nimmt man von obiger Gleichung die Logarithmen und beachtet, dass

$$\log\Gamma(1+\mu) = -\log(1+\mu) + B_1\mu + B_2\mu^2 - B_3\mu^3 + B_4\mu^4 - \ldots$$

so erhält man

$$\log\Gamma(m+\mu) = \log(2+\mu) + \log(3+\mu) + \ldots + \log(m-1+\mu) + B_1\mu + B_2\mu^2 - B_3\mu^3 + B_4\mu^4 - \ldots$$

$$\frac{d\log\Gamma(m+\mu)}{d\mu} = \frac{M}{2+\mu} + \frac{M}{3+\mu} + \ldots \frac{M}{m-1+\mu} + B_1 + 2B_2\mu - 3B_3\mu^2 + 4B_4\mu^3 - 5B_5\mu^4$$

Da in unserem Falle μ nur näherungsweise bekannt ist, so setzt man jetzt

$$d\log\Gamma(m+\mu) = \log\Gamma(x) - \log\Gamma(m+\mu)$$

und schreibt $\Delta\mu$ statt $d\mu$

$$\Delta\mu = \frac{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(m+\mu)}{\frac{M}{2+\mu} + \frac{M}{3+\mu} + \ldots \frac{M}{m-1+\mu} + B_1 + 2B_2\mu - 3B_3\mu^2 + 4B_4\mu^3 - 5B_5\mu^4 + \ldots}$$

Die Reihe im Nenner schreiben wir in folgender Weise

$$B_1 + 3B_3\mu\left(\frac{2B_2}{3B_3} - \mu\right) + 5B_5\mu^3\left(\frac{4B_4}{5B_5} - \mu\right) + 7B_7\mu^5\left(\frac{6B_6}{7B_7} - \mu\right) + \ldots$$

und setzen zur Abkürzung

$$\alpha_1 = 3B_3, \quad \alpha_3 = 5B_5, \quad \alpha_5 = 7B_7$$

$$\beta = B_1, \quad \beta_1 = \frac{2B_3}{3B_3}, \quad \beta_3 = \frac{4B_4}{5B_5}, \quad \beta_5 = \frac{6B_6}{7B_7}$$

Die Lösung der Aufgabe ist daher durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\Gamma(m+\mu) = (1+\mu)(2+\mu)\dots(m-1+\mu)\Gamma(1+\mu)$$

$$\Delta\mu = \frac{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(m+\mu)}{\frac{M}{2+\mu}+\frac{M}{3+\mu}+\dots\frac{M}{m-1+\mu}+\beta+\alpha_1\mu(\beta_1-\mu)+\alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu)+\alpha_5\mu^5(\beta_5-\mu)+\dots}$$

Dabei ist

$\log M = 9.637784$	$\beta = 0.183613$
$\log\alpha_1 = 8.94326$	$\beta_1 = 3.19184$
$\log\alpha_3 = 8.20514$	$\beta_3 = 2.22931$
$\log\alpha_5 = 7.55943$	$\beta_5 = 2.07719$
$\log\alpha_7 = 6.94063$	$\beta_7 = 2.03016$
$\log\alpha_9 = 6.33168$	$\beta_9 = 2.01254$
$\log\alpha_{11} = 5.72668$	$\beta_{11} = 2.00538$

$$x = m+\mu+\Delta\mu$$

In unserem Beispiel ist $m = 7$, $\mu = 0.314$, $\log\Gamma(m+\mu) = 3.1159572$, $\log\Gamma(x) - \log\Gamma(m+\mu) = -0.0002170$

$M:(2+\mu) = 0.187681$	$\beta = 0.183613$
$M:(3+\mu) = 0.131048$	$\alpha_1\mu(\beta_1-\mu) = 0.079298$
$M:(4+\mu) = 0.100671$	$\alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu) = 0.000951$
$M:(5+\mu) = 0.081726$	$\alpha_5\mu^5(\beta_5-\mu) = 0.000020$
$M:(6+\mu) = 0.068782$	$\alpha_7\mu^7(\beta_7-\mu) = 0.000000$
0.569908	0.263882

$$\Delta\mu = -\frac{0.000217}{0.833790} = -0.00026026$$

$$\mu+\Delta\mu = 0.31373974$$

$$x = 7.3137397$$

Hier hätte man $x = 7.3137400$ finden sollen (siehe Beispiel 3. § 12.). Der Fehler 0.0000003 ist so klein, dass er nicht in Betracht kommt. Wenn in einem solchen Falle der echte Bruch μ nur wenig kleiner ist, als 1, so convergirt die Reihe $\alpha_1\mu(\beta_1-\mu)+\alpha_3\mu^3(\beta_3-\mu)+\dots$ sehr langsam, und müssten deshalb viele Glieder derselben berechnet werden. Man kann sich diese Rechnung erleichtern, indem man für

m einen um 1 grösseren Wert nimmt und für μ seine Ergänzung zu 1 setzt; $m-\mu$ ist jetzt dieselbe Zahl, die vorher durch $m+\mu$ bezeichnet wurde, also ist in den vorigen Formeln μ mit $-\mu$ zu vertauschen. Die erste Gleichung wird daher

$$\Gamma(m-\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)\ldots(m-1-\mu)\Gamma(1-\mu)$$

$\Gamma(1-\mu)$ lässt sich nicht direct aus Tafel III. berechnen, daher setzen wir in der Formel

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(1+\mu) \quad \text{(siehe § 11.)}$$

$(1-\mu)$ an die Stelle von μ und erhalten

$$\Gamma(1-\mu) = \frac{1}{1-\mu}\Gamma(2-\mu)$$

dies oben eingesetzt gibt:

$$\Gamma(m-\mu) = (2-\mu)(3-\mu)\ldots(m-1-\mu)\Gamma(2-\mu)$$

Die anderen Formeln gehen über in:

$$\Delta\mu = \frac{\log\Gamma(m-\mu) - \log\Gamma(x)}{\frac{M}{2-\mu}+\frac{M}{3-\mu}+\ldots\frac{M}{m-1-\mu}+\beta-\alpha_1\mu(\beta_1+\mu)-\alpha_3\mu^3(\beta_3+\mu)-\alpha_5\mu^5(\beta_5+\mu)-\ldots}$$

$$x = m-(\mu+\Delta\mu)$$

Beispiel. $\log\Gamma(x) = 0.7069847$. Die Tafel IV. gibt uns den Näherungswert für x zu 3.867. Anstatt also jetzt $m = 3$ und $\mu = 0.867$ zu nehmen, machen wir $m = 4$ und $\mu = 0.133$, so dass also $m-\mu = 3.867$. Es findet sich danach $\Gamma(m-\mu) = 1.867 \,.\, 2.867\,\Gamma(1.867)$; $\log\Gamma(m-\mu) = 0.7067004$; $\log\Gamma(m-\mu) - \log\Gamma(x) = -0.0002843$

$$M:(2-\mu) = 0.23262 \qquad \alpha_1\mu(\beta_1+\mu) = 0.03880$$
$$M:(3-\mu) = 0.15148 \qquad \alpha_3\mu^3(\beta_3+\mu) = 0.00009$$
$$\beta = 0.18361 \qquad \alpha_5\mu^5(\beta_5+\mu) = 0.00000$$
$$0.03889$$

$$\Delta\mu = -\frac{0.0002843}{0.52882} = -0.0005376, \qquad x = 3.8675376.$$

Zur Erzielung gleicher Genauigkeit hätte man bei Anwendung der früheren Formeln mindestens die doppelte Anzahl der Glieder jener Reihe berechnen müssen.

V. Tafel

um den Logarithmen von $(1-x)$ zu finden, wenn der Logarithme von x gegeben ist,

als Anhang zu dem Aufsatze über Interpolation.

Anmerkung.

Den Zahlen A und B ist die negative Kennziffer —10 anzuhängen.

$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.	0.00	000	*999	*999	*999	*999	*999	*998	*998	*997	*997
6.0	9.99	996	996	995	995	995	995	995	995	995	995
1		995	994	994	994	994	994	994	994	993	993
2		993	993	993	993	992	992	992	992	992	992
3		991	991	991	990	990	998	990	990	990	989
4		989	989	989	988	988	988	987	987	987	987
6.5		986	986	986	985	985	985	984	984	983	983
6		983	982	982	981	981	981	980	980	979	979
7		978	978	977	977	976	976	975	974	974	973
8		973	972	971	971	970	969	969	968	967	966
9		965	965	964	963	962	961	960	959	959	958
7.0	9.99	957	956	954	953	952	951	950	949	948	947
1		945	944	943	941	940	939	937	936	934	933
2		931	930	928	926	924	923	921	919	917	915
3		913	911	909	907	905	903	900	898	896	893
4		891	888	886	883	880	877	875	872	869	866
7.5		862	859	856	853	849	846	842	838	835	831
6		827	823	819	814	810	806	801	796	792	787
7		782	777	771	766	761	755	749	744	738	731
8		725	719	712	705	698	691	684	677	669	662
9		654	646	637	629	620	611	602	593	583	574
8.0	9.99	564									
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$

	1	2	3	4	5
1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
2	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
3	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
4	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
5	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
6	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0
7	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5
8	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
9	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5

	6	7	8	9	10
1	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
3	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
4	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
6	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0
7	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0
8	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0
9	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0

$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.00	9.99	564	563	561	560	559	558	557	556	555	554
01		553	552	551	550	549	548	547	546	545	544
02		543	542	541	540	539	538	536	535	534	533
03		532	531	530	529	528	527	526	524	523	522
04		521	520	519	518	517	516	514	513	512	511
8.05		510	509	508	507	505	504	503	502	501	500
06		498	497	496	495	494	493	491	490	489	488
07		487	486	484	483	482	481	480	478	477	476
08		475	473	472	471	470	469	467	466	465	464
09		462	461	460	459	457	456	455	454	452	451
8.10	9.99	450	449	447	446	445	443	442	441	439	438
11		437	436	434	433	432	430	429	428	426	425
12		424	422	421	420	418	417	416	414	413	412
13		410	409	407	406	405	403	402	401	399	398
14		396	395	394	392	391	389	388	386	385	384
8.15		382	381	379	378	376	375	374	372	371	369
16		368	366	365	363	362	360	359	357	356	354
17		353	351	350	348	347	345	344	342	341	339
18		338	336	335	333	331	330	328	327	325	324
19		322	321	319	317	316	314	313	311	309	308
8.20	9.99	306	305	303	301	300	298	296	295	293	292
21		290	288	287	285	283	282	280	278	277	275
22		273	272	270	268	266	265	263	261	260	258
23		256	254	253	251	249	247	246	244	242	240
24		239	237	235	233	232	230	228	226	224	223
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.25	9.99	221	219	217	215	213	212	210	208	206	204
26		202	201	199	197	195	193	191	189	187	186
27		184	182	180	178	176	174	172	170	168	166
28		164	163	161	159	157	155	153	151	149	147
29		145	143	141	139	137	135	133	131	129	127
8.30	9.99	125	123	121	119	117	114	112	110	108	106
31		104	102	100	098	096	094	093	089	087	085
32		083	081	079	077	074	072	070	068	066	064
33		061	059	057	055	053	050	048	046	044	042
34		039	037	035	033	030	028	026	024	021	019
8.35		017	014	012	010	007	005	003	001	*998	*996
36	9.98	994	991	989	986	984	982	979	977	975	972
37		970	967	965	963	960	958	955	953	950	948
38		946	943	941	938	936	933	931	928	926	923
39		921	918	916	913	911	908	905	903	900	898
8.40	9.98	895	893	890	887	885	882	880	877	875	872
41		869	866	864	861	858	856	853	850	848	845
42		842	840	837	834	832	829	826	823	821	818
43		815	812	810	807	804	801	798	796	793	790
44		787	784	781	779	776	773	770	767	764	761
8.45		758	756	753	750	747	744	741	738	735	732
46		729	726	723	720	717	714	711	708	705	702
47		699	696	693	690	687	684	681	678	674	671
48		668	665	662	659	656	653	649	646	643	640
49		637	634	630	627	624	621	617	614	611	608
8.50	9.98	604									
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$

	1
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9

	2
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.8
5	1.0
6	1.2
7	1.4
8	1.6
9	1.8

	3
1	0.3
2	0.6
3	0.9
4	1.2
5	1.5
6	1.8
7	2.1
8	2.4
9	2.7

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$

A	*B*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.50	9.98	604	601	598	595	591	588	585	581	578	575
51		571	568	565	561	558	554	551	548	544	541
52		538	534	531	527	524	520	517	513	510	506
53		503	499	496	492	489	485	482	478	475	471
54		467	464	460	457	453	449	446	442	438	435
8.55		431	427	424	420	416	413	409	405	401	398
56		394	390	386	382	379	375	371	367	363	360
57		356	352	348	344	340	336	332	328	325	321
58		317	313	309	305	301	297	293	289	285	281
59		277	273	269	264	260	256	252	248	244	240
8.60	9.98	236	232	227	223	219	215	211	206	202	198
61		194	189	185	181	177	172	168	164	159	155
62		151	146	142	138	133	129	124	120	116	111
63		107	102	098	093	089	084	080	075	071	066
64		062	057	052	048	043	039	034	029	025	020
8.65		015	011	006	001	*997	*992	*987	*982	*978	*973
66	9.97	968	963	958	954	949	944	939	934	929	925
67		920	915	910	905	900	895	890	885	880	875
68		870	865	860	855	85[illegible]	845	840	834	829	824
69		819	814	809	804	798	793	788	783	777	772
8.70	9.97	767	762	756	751	746	740	735	730	724	719
71		714	708	703	697	692	686	681	675	670	664
72		659	653	648	642	637	631	625	620	614	608
73		603	597	591	586	580	574	568	563	557	551
74		545	539	534	528	522	516	510	504	498	592
A	*B*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8.75	9.97	486	480	474	468	462	456	450	444	438	432
76		426	420	414	408	402	395	389	383	377	371
77		364	358	352	345	339	333	326	320	314	307
78		301	295	288	282	275	269	262	256	249	243
79		236	229	223	216	210	203	196	190	183	176
8.80		170	163	159	149	142	136	129	122	115	108
81		101	094	088	081	074	067	060	053	046	039
82		031	024	017	010	003	*996	*989	*982	*974	*967
83	9.96	960	953	945	938	931	923	916	909	901	894
84		886	879	872	864	857	849	841	834	826	819
8.85		811	804	796	788	781	773	765	757	750	742
86		734	726	718	711	703	695	687	679	671	663
87		655	647	639	631	623	615	607	598	590	582
88		574	566	557	549	541	533	524	516	508	499
89		491	482	474	465	457	448	440	431	423	414
8.90	9.96	406	397	388	380	371	362	353	345	336	327
91		318	309	300	292	283	274	265	256	247	238
92		229	219	210	201	192	183	174	165	155	146
93		137	127	118	109	099	090	080	071	062	052
94		042	033	023	014	004	*994	*985	*975	*965	*956
8.95	9.95	946	936	926	916	907	897	887	877	867	857
96		847	837	827	817	806	796	786	776	766	755
97		745	735	725	714	704	693	683	672	662	651
98		641	630	620	609	598	588	577	566	556	545
99		534	523	512	501	490	479	468	457	446	435
9.00		424									
A	*B*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$

	3	4
1	0.3	0.4
2	0.6	0.8
3	0.9	1.2
4	1.2	1.6
5	1.5	2.0
6	1.8	2.4
7	2.1	2.8
8	2.4	3.2
9	2.7	3.6

	5	6
1	0.5	0.6
2	1.0	1.2
3	1.5	1.8
4	2.0	2.4
5	2.5	3.0
6	3.0	3.6
7	3.5	4.2
8	4.0	4.8
9	4.5	5.4

	6	7	8
1	0.6	0.7	0.8
2	1.2	1.4	1.6
3	1.8	2.1	2.4
4	2.4	2.8	3.2
5	3.0	3.5	4.0
6	3.6	4.2	4.8
7	4.2	4.9	5.6
8	4.8	5.6	6.4
9	5.4	6.3	7.2

	9	10	11
1	0.9	1.0	1.1
2	1.8	2.0	2.2
3	2.7	3.0	3.3
4	3.6	4.0	4.4
5	4.5	5.0	5.5
6	5.4	6.0	6.6
7	6.3	7.0	7.7
8	7.2	8.0	8.8
9	8.1	9.0	9.9

$\log x = A, \quad \log(1-x) = B$

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.00	9.95	424	413	402	391	380	368	357	346	334	323
01		312	300	289	277	266	254	243	231	220	208
02		196	185	173	161	149	137	126	114	102	090
03		078	066	054	042	030	017	005	*993	*981	*968
04	9.94	956	944	931	919	907	894	882	869	857	844
9.05		831	819	806	793	781	768	755	742	729	716
06		703	690	677	664	651	638	625	612	599	585
07		572	559	545	532	518	505	491	478	464	451
08		437	423	410	396	382	368	354	341	327	313
09		299	285	270	256	242	228	214	200	185	171
9.10		156	142	128	113	099	084	069	055	040	025
11		011	*996	*981	*966	*951	*936	*921	*906	*891	*876
12	9.93	861	845	830	815	800	784	769	753	738	722
13		707	691	676	660	644	628	613	597	581	565
14		549	583	517	501	484	468	452	436	419	403
9.15		386	370	353	337	320	304	287	270	253	237
16		220	203	186	169	152	135	118	100	083	066
17		049	031	014	*996	*979	*961	*944	*926	*908	*890
18	9.92	873	855	837	819	801	783	765	747	728	710
19		692	673	655	637	618	599	581	562	544	525
9.20		506	487	468	449	430	411	392	373	354	334
21		315	296	276	257	237	218	198	178	158	139
22		119	099	079	059	039	019	*998	*978	*958	*937
23	9.91	917	897	876	855	835	814	793	772	752	731
24		710	689	667	646	624	604	582	561	539	518
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.25	9.91	496	475	453	431	409	387	365	343	321	299
26		277	255	232	210	187	165	142	120	097	074
27		051	028	005	*982	*959	*936	*913	*890	*866	*843
28	9.90	819	796	772	748	725	701	677	653	629	605
29		580	556	532	507	483	458	434	409	384	360
9.30		335	310	285	260	234	209	184	158	133	107
31		082	056	030	005	*979	*953	*927	*900	*874	*848
32	9.89	822	795	769	742	715	688	662	635	608	581
33		554	526	499	472	444	417	389	361	663	306
34		278	250	221	193	165	136	108	079	051	022
9.35	9.88	993	964	935	906	877	848	819	789	760	730
36		701	671	641	611	581	551	521	490	460	429
37		399	368	337	307	276	245	214	182	151	120
38		088	056	025	*993	*961	*927	*897	*865	*832	*800
39	9.87	768	735	702	670	637	604	571	537	504	471
9.40		437	404	370	336	302	268	234	200	196	131
41		097	062	027	*992	*957	*922	*887	*852	*816	*781
42	9.86	745	709	674	638	602	565	529	493	456	419
43		383	346	309	272	234	197	160	122	084	046
44		088	*970	*932	*894	*855	*817	*778	*739	*700	*661
9.45	9.85	622	583	543	504	464	424	384	344	304	264
46		223	183	142	101	060	019	*978	*936	*895	*853
47	9.84	811	770	727	685	643	600	588	515	472	429
48		386	343	299	255	212	168	124	079	035	*991
49	9.83	946	901	856	811	766	720	675	629	588	537
9.50		491									
A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\log x = B, \quad \log(1-x) = A$

P. P.

	11	12	13	14	15	16
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
3	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2
8	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4

	17	18	19	20	21	22
1	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
3	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3	6.6
4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4	8.8
5	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6	13.2
7	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7	15.4
8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8	17.6
9	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9	19.8

	23	24	25	26	27	28
1	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
2	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6
3	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4
4	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2
5	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0
6	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8
7	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6
8	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4
9	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2

	29	30	31	32	33	34
1	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
2	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
3	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2
4	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6
5	14.5	15.0	15.5	16.0	16.6	17.0
6	17.4	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4
7	20.3	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8
8	23.2	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2
9	26.1	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6

	35	36	37	38	39	40
1	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
2	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
3	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0
4	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0
5	17.5	18.0	18,5	19.0	19.5	20.0
6	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0
7	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0
8	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0
9	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0

P. P.

$\log x = A,\quad \log(1-x) = B$											
A	*B*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.50	9.83	491	445	398	352	305	258	211	164	116	069
51		021	*973	*925	*877	*828	*780	*731	*682	*633	*584
52	9.82	534	485	435	385	335	284	234	183	133	082
53		030	*979	*928	*876	*824	*772	*720	*667	*615	*562
54	9.81	501	456	402	349	295	241	187	133	078	023
9.55	9.80	969	913	858	803	747	691	635	579	522	466
56		409	352	294	237	179	121	063	004	*946	*887
57	9.79	828	769	709	650	590	530	469	409	348	287
58		226	164	103	041	*979	*916	*854	*791	*728	*664
59	9.78	601	537	473	409	344	279	214	149	084	018
9.60	9.77	952	886	819	752	685	618	550	483	415	346
61		278	209	140	070	000	*931	*860	*790	*719	*648
62	9.76	577	505	433	361	288	216	143	069	*996	*922
63	9.75	847	773	698	623	547	472	396	319	242	165
64		088	011	*933	*854	*776	*697	*618	*538	*458	*378
9.65	9.74	297	216	135	054	*972	*889	*807	*724	*641	*557
66	9.73	473	389	304	219	133	047	*961	*875	*788	*700
67	9.72	613	425	436	347	258	169	079	*988	*897	*806
68	9.71	715	623	530	437	344	250	156	062	*967	*872
69	9.70	776	680	583	486	388	290	192	093	*994	*894
9.70	9.69	794	693	592	490	308	286	182	079		
A	*B*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log x = B,\quad \log(1-x) = A$											

P. P.

	46	47	48	49
1	4.6	4.7	4.8	4.9
2	9.2	9.4	9.6	9.8
3	13.8	14.1	14.4	14.7
4	18.4	18.8	19.2	19.6
5	23.0	23.5	24.0	24.5
6	27.6	28.2	28.8	29.4
7	32.2	32.9	33.6	34.3
8	36.8	37.6	38.4	39.2
9	41.4	42.3	43.2	44.1

	50	51	52	53
1	5.0	5.1	5.2	5.3
2	10.0	10.2	10.4	10.6
3	15.0	15.3	15.6	15.9
4	20.0	20.4	20.8	21.2
5	25.0	25.5	26.0	26.5
6	30.0	30.6	31.2	31.8
7	35.0	35.7	36.4	37.1
8	40.0	40.8	41.6	42.4
9	45.0	45.9	46.8	47.7

P. P.

Z. vor. Seite.

	41	42
1	4.1	4.2
2	8.2	8.4
3	12.3	12.6
4	16.4	16.8
5	20.5	21.0
6	24.6	25.2
7	28.7	29.4
8	32.8	33.6
9	36.9	37.8

	43	44
1	4.3	4.4
2	8.6	8.8
3	12.9	13.2
4	17.2	17.6
5	21.5	22.0
6	25.8	26.4
7	30.1	30.8
8	34.4	35.2
9	38.7	39.6

	45	46
1	4.5	4.6
2	9.0	9.2
3	13.5	13.8
4	18.0	18.4
5	22.5	23.0
6	27.0	27.6
7	31.5	32.2
8	36.0	36.8
9	40.5	41.4

Partes proportionales

54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	1
10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	2
16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.0	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	3
21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.0	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	4
27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.0	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	5
32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.0	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	6
37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.0	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	7
43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.0	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	8
48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.0	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	9

70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	
7.0	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	1
14.0	14.2	14.4	14.6	14.8	15.0	15.2	15.4	15.8	15.8	16.0	16.2	16.4	16.6	16.8	17.0	2
24.0	21.3	21.6	21.9	22.2	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.0	24.3	24.6	24.9	25.2	25.5	3
28.0	28.4	28.8	29.2	29.6	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.0	32.4	32.8	33.2	33.6	34.0	4
35.0	35.5	36.0	36.5	37.0	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.0	40.5	41.0	41.5	42.0	42.5	5
42.0	42.6	43.2	43.8	44.4	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.0	48.6	49.2	49.8	50.4	51.0	6
49.0	49.7	50.4	51.1	51.8	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.0	56.7	57.4	58.1	58.8	59.5	7
56.0	56.8	57.6	58.4	59.2	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.0	64.8	65.6	66.4	67.2	68.0	8
63.0	63.9	64.8	65.7	66.6	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.0	72.9	73.8	74.7	75.6	76.5	9

86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	
8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0	10.1	1
17.2	17.4	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	18.8	19.0	19.2	19.4	19.6	19.8	20.0	20.2	2
25.8	26.1	26.4	26.7	27.0	27.3	27.6	27.9	28.2	28.5	28.8	29.1	29.4	29.7	30.0	30.3	3
34.4	34.8	35.2	35.6	36.0	36.4	36.8	37.2	37.6	38.0	38.4	38.8	39.2	39.6	40.0	40.4	4
43.0	43.5	44.0	44.5	45.0	45.5	46.0	46.5	47.0	47.5	48.0	48.5	49.0	49.5	50.0	50.5	5
51.6	52.2	52.8	53.4	54.0	54.6	55.2	55.8	56.4	57.0	57.6	58.2	58.8	59.4	60.0	60.6	9
60.2	60.9	61.6	62.3	63.0	63.7	64.4	65.1	65.8	66.5	67.2	67.9	68.6	69.3	70.0	70.7	6
68.4	69.6	70.4	71.2	72.0	72.8	73.6	74.4	75.2	76.0	76.8	77.6	78.4	79.2	80.0	80.8	8
77.8	78.3	79.2	80.1	81.0	81.9	82.8	83.7	84.6	85.5	86.4	87.3	88.2	89.1	90.0	90.9	9

XVI.

Miscellen.

1.

Note über conjugirte Tangenten.

Der Zweck nachfolgender Note ist zu beweisen:

a) dass die Summe der Krümmungsradien zweier conjugirten Normalschnitte einer Fläche constant ist, und

b) dass je zwei conjugirte Tangenten einer Fläche die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser der betreffenden Punktlinie besitzen.

Mit Zugrundelegung jener Bezeichnungen, welche Hoppe in seinen „Principien der Flächentheorie" eingeführt hat, muss, wenn $k = \frac{\partial v}{\partial u}$ das Richtungsverhältniss und ϱ den Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes bedeuten, sein

$$\varrho = \frac{e + 2fk + gk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Beziehen sich k' und ϱ' in derselben Weise auf jenen Normalschnitt, dessen Tangente zur Tangente des früheren conjugirt ist, so findet bekanntlich die Gleichung statt

$$E + F(k + k') + Gkk' = 0.$$

Da nun

$$\varrho + \varrho' = \frac{e + 2fk + gk^2}{E + 2Fk + Gk^2} + \frac{e + 2fk' + gk'^2}{F + 2Fk' + Gk'^2}$$

und weil ferner, wie leicht zu erweisen,

$$E+2Fk+Gk^2 = (F+Gk)(k-k')$$

und

$$E+2Fk'+Gk'^2 = (F+Gk')(k'-k),$$

so muss sein

$$\varrho+\varrho' = \frac{1}{k-k'}\left(\frac{e+2fk+gk^2}{F+Gk} - \frac{e+2fk'+gk'^2}{F+Gk'}\right)$$

$$= \frac{2fF-eG+g[F(k+k')+Gkk']}{F^2+G[F(k+k')+Gkk']}.$$

Nach Substitution des Wertes

$$F(k+k')+Gkk' = -E$$

kommt

$$\varrho+\varrho' = \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}.$$

Bezeichnen ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien, so gelten bekanntlich die Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG-2fF+gE}{t^2}$$

und

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{EG-F^2}{t^2}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$\varrho+\varrho' = \varrho_1+\varrho_2,$$

d. h. die Summe der Krümmungsradien zweier conjugirten Normalschnitte ist gleich der Summe der entsprechenden Hauptkrümmungsradien, also für einen Punkt der Fläche constant. — Der unter b) angeführte Satz ist eine einfache Folge des eben bewiesenen Satzes. Unter Punktlinie verstehen wir nämlich die Dupin'sche „Indicatrice", deren Gleichung lautet:

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1}+\frac{\eta^2}{\varrho_2} = \delta,$$

wo

$$\delta = E\partial u^2+2F\partial u\partial v+G\partial v^2,$$

in welcher Form sie bloss eine andere Ausdrucksweise des Euler'schen Satzes bildet, wobei δ die doppelte constante Entfernung der Schnittebene von der Berührungsebene bedeutet *).

Die Quadrate ihrer Axen sind

$$a^2 = \delta\varrho_1, \quad b^2 = \delta\varrho_2.$$

---

*) Siehe meinen Aufsatz über Punktlinien in dieser Zeitschrift.

Nun ist bekannt, dass

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2,$$

folglich

$$\varrho = \frac{\partial s^2}{\delta}.$$

∂s ist ein beliebiger Halbmesser der Punktlinie. Wenn also

$$\varrho + \varrho' = \varrho_1 + \varrho_2,$$

so muss sein

$$\partial s^2 + \partial s'^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. die Summe der Quadrate jener Radien der Punktlinie, welche zweien conjugirten Normalschnitten entsprechen, ist gleich der Summe der Quadrate der Axen, also constant. Das ist aber die bekannte Eigenschaft zweier conjugirten Halbmesser einer Linie 2. Grades, folglich stimmen die Richtungen zweier conjugirten Tangenten mit denen zweier conjugirten Durchmesser der Punktlinie überein.

Königgräz, am 24. April 1877. F. Hoza.

3.

Ort der Punkte constanter Berührungssehnen in Bezug auf einen Kegelschnitt [1]).

Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich die Herren Grunert [2]) und Schlömilch [3]); die Enveloppe der Sehnen constanter Länge, die Polarreciproke erwähnten Ortes entwickelte und untersuchte Herr Dr. Ed. Weyr [4]) vermittelst der Liniencoordinaten. Die Auflösung, welche ich hier mitteile, ist ganz einfach. Mit Zuhilfenahme eines eindeutigen Parameters [5]) u, können wir die Gleichung des Kegelschnittes

$$K \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0 \tag{1}$$

---

1) Erschien in Studnička-s „Časopis mathematiky a fysiky". Prag, Bd. VI. pg. 139.

2) Grunert „Archiv für Math. und Phys." Bd. 47.

3) Schlömilch „Zeitschrift für Math. und Phys." Jahrg. XIV. pg. 158.

4) ibid. Jahrg. XVII. pg. 164.

5) Siehe Dr. Em. Weyr „kuželosečkách a jich kružích zakřivenosti" (Kegelschnitte und deren Krümmungskreise) in Studnička-s Časopis math. a fys. Bd. II. pg. 65., sowie desselben Abhandlung über Kegelschnitte, Sitzungsb. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 18/10 1872. Prag.

durch nachstehendes Gleichungspaar ersetzen

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}$$
$$y = \frac{2pu}{u^2 - q} \tag{2}$$

wo

$$y = ux;$$

somit ist auch die geometrische Deutung des Parameters ersichtlich. Aus einem Punkte A können wir zwei Tangenten ziehen. Die Parameter der Berührungspunkte u_1, u_2 erhalten wir aus der Gleichung der Tangente, welche wir zu diesem Behufe entwickeln wollen. Die Gleichung der Secante als Verbindungslinie $\overline{u_1 u_2}$ zweier Curvenpunkte ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2p}{u_1^2 - q} & \frac{2pu_1}{u_1^2 - q} & 1 \\ \frac{2p}{u_2^2 - q} & \frac{2pu_2}{u_2^2 - q} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 2p \\ 1 & u_1 & u_1^2 - q \\ 0 & 1 & u_1 + u_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Für $u_1 = u_2 = u$ geht die Gleichung der Secante in die der Tangente im Punkte u über, in

$$2uy - (u^2 + q)x - 2p = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung gibt uns eine Relation zwischen dem Parameter des Berührungspunktes und der Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangente an. Nehmen wir nun den Punkt $A(x, y)$ auf der Tangente als fest als gegeben an, so können wir aus der Gl. (4) die Parameter der Berührungspunkte finden als deren Wurzeln nach u.

Ordnen wir demnach die Gleichung (4) nach den Potenzen von u, so erhalten wir zwischen den Coordinaten des Punktes A und den Parametern der Berührungspunkte u_1, u_2 nachstehende Relationen:

$$u_1 + u_2 = \frac{2y}{x}$$
$$u_1 u_2 = \frac{qx + 2p}{x} \tag{5}$$

wo u_1, u_2 sich wie erwähnt als Wurzeln der Gleichung (4) nach u ergeben.

Mit Hilfe des Gleichungspaares (5) können wir nur unsere Aufgabe lösen. Es sei die gegebene Länge der Berührungssehne $\overline{u_1 u_2}$ gleich c, so ist

Es ist aber

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = c^2 \tag{6}$$

$$x_1-x_2 = 2p\left\{\frac{1}{u_1^2-q}-\frac{1}{u_2^2-q}\right\} = 2p.\frac{u_2^2-u_1^2}{(u_1u_2+q)^2-2q(u_1+u_2)}$$

oder wenn wir den Zähler in Factoren zerlegen und die Identität

$$(u_1-u_2)^2 \equiv (u_1+u_2)^2-4u_1u_2 \tag{7}$$

benutzen

$$x_1-x_2 = 2p\frac{-(u_1+u_2)\sqrt{(u_1+u_2)^2-4u_1u_2}}{(u_1u_2+q)^2-2q(u_1+u_2)}$$

Aehnlich erhalten wir

$$y_1-y_2 = 2p\left\{\frac{u_1}{u_1^2-q}-\frac{u_2}{u_2^2-q}\right\} = 2p.\frac{-(u_1-u_2)(u_1u_2+q)}{(u_1u_2+q)^2-2q(u_1+u_2)},$$

und mit Hilfe der Gl. (7)

$$y_1-y_2 = 2p\frac{-(u_1u_2+q)\sqrt{(u_1+u_2)^2-4u_1u_2}}{(u_1u_2+q)^2-2q(u_1+u_2)}.$$

Führen wir diese Werte für (x_1-x_2) und (y_1-y_2) in die Gl. (6) ein, so erhalten wir

$$\{(u_1+u_2)^2-4u_1u_2\}\{(u_1+u_2)^2+(u_1u_2+q)^2\} = \lambda^2\{(u_1u_2+q)^2-2q(u_1+u_2)\}^2, \tag{8}$$

wo wir der Kürze wegen setzen

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{4p^2}.$$

Führen wir nun aus den Gleichungen (5) die Werte für u_1u_2 und (u_1+u_2) in die Gleichung (8) ein, womit wir anzeigen, dass u_1 und u_2 die Berührungspunkte der vom Punkte A an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sind, und dass c nach Gl. (6) die gegebene constante Länge der Berührungssehne ist, so erhalten wir für den Ort die Gleichung

$$\{y^2-x(qx+2p)\}\{y^2+(qx+p)^2\} = \lambda^2\{(qx+p)^2-qxy\}^2-q \tag{9}$$

oder setzen wir kurz

$$K \equiv y^2-qx^2-2px$$
$$L \equiv y^2+(qx+p)^2$$
$$H \equiv (qx+p)^2-qxy,$$

so ist die Gleichung des Ortes

$$KL - \lambda^2 H^2 = 0 \tag{10}$$

Ist nun die Berührungssehne zwar constant aber unbestimmt, so erhalten wir eine ganze Schaar solcher Curven. welche zusammen ein Curvenbüschel vierter Ordnung bilden, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt auf der X Achse haben in der Entfernung

$$x = -\frac{p}{q} = -a$$

vom Anfangspunkte, wo a die halbe grosse Achse des gegebenen Kegelschnittes bedeutet.

Aus der Form der Gleichung des Ortes folgt, dass der verlangte Ort die Kegelschnitte

$$K = 0, \quad L = 0$$

in den Punkten berührt, in welcher dieselben den Kegelschnitt H schneiden, was wir auch analytisch nachweisen können. Es sei B z. B. einer der vier Schnittpunkte der Kegelschnitte

$$K = 0, \quad H = 0,$$

d. h. seine Coordinaten genügen ihren Gleichungen. Bezeichnen wir die Gleichung des Ortes (10) kurz

$$F = 0,$$

so ist die Richtungsconstante der Tangente eines beliebigen Punktes derselben gleich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{K_1 L + K L_1 - 2\lambda^2 H H_1}{K_2 L + K L_2 - 2\lambda^2 H H_2} \tag{11}$$

und an der Curve K ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_1}{K_2} \tag{12}$$

Der Punkt B liegt nun auch auf der Curve F, da seine Coordinaten den Gleichungen

$$K = 0, \quad H = 0$$

genügen, somit auch der Gleichung (10) nämlich

$$F = 0.$$

Führen wir die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung (11), so erhalten wir, nachdem wir früher mit L gekürzt haben

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K_1}{K_2},$$

d. h. die Curven K und F haben im Punkte B eine gemeinschaftliche Tangente. Aehnliches ergibt sich für die Durchschnittspunkte der Curven

$$L = 0, \quad H = 0$$

welche auch, wie schon erwähnt wurde, Punkte der Curve F, d. i. des gesuchten Ortes sind. K. Zahradnik.

3.

Summirung einer Reihe.

Beispielsweise sei von einer Methode der Summirung Gebrauch gemacht, die sich vielfach anwenden lässt. Die gegebene Reihe sei

$$\frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Nun ist

$$a^{-b} = \frac{1}{\Gamma b} \int_0^\infty e^{-au} u^{b-1} \partial u$$

daher, wenn man $a = b = k+1$ setzt,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} (k+1)^{-(k+1)} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_0^\infty e^{-(k+1)u} u^k \partial u$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \partial u \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(ue^{-u})^k}{k!} = \int_0^\infty e^{-u} \partial u \,.\, e^{-ue^{-u}}$$

oder, nach Substitution $e^{-u} = v$,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-k} = \int_0^1 v^{-v} \partial v$$

Aehnlich findet man:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} k^{-k} = \int_0^1 v^v \partial v$$

R. Hoppe.

Taf. III.

L_2

α_2

H_1

H

α_1

L

H_2

L_3

L_6

Q

P

L_7

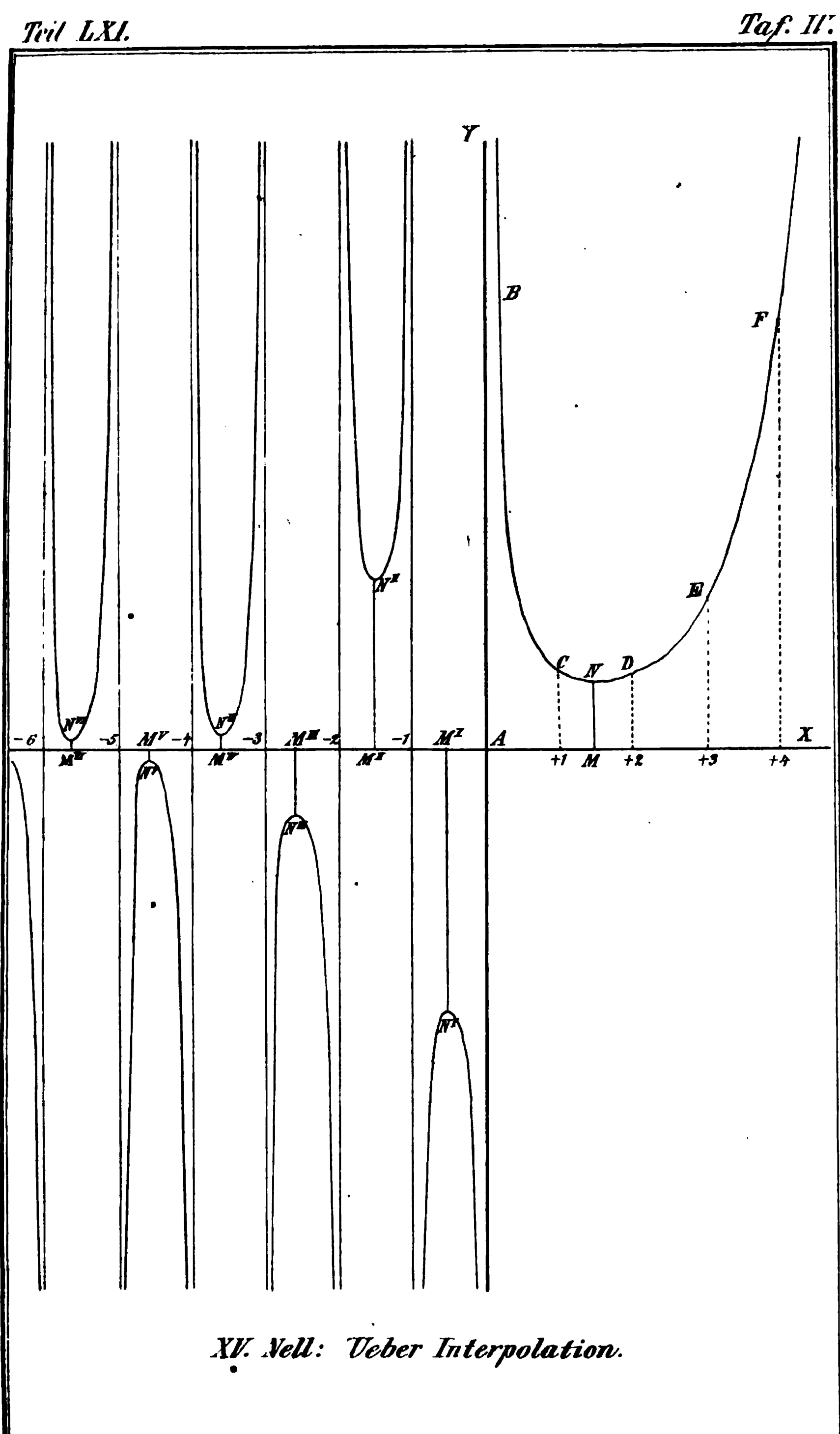
L_5

E_1

R

L_4

Steindruckerei von F. W Kunike, Greifswald.



XV. Nell: Ueber Interpolation.

Steindruckerei v. F.W. Kunike.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechszigster Teil. Drittes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1877.

XVII.

Ueber das Dreieck.

Von

Max Greiner.

In dieser Abhandlung sollen insbesonders die dem Dreiecke ein- und anbeschriebenen Kreise und die Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des Dreiecks einer näheren Untersuchung unterzogen werden, unter besonderer Bezugnahme auf die Sätze über Pol und Polare des Dreiecks.

Man betrachte nun, um den vorkommenden Gleichungen und Ausdrücken eine möglichst einfache Form zu geben, die Seiten des Dreiecks als Tangenten eines aus dem Coordinatenanfang beschriebenen Kreises; so werden, wenn:

$$x^2+y^2-r^2=0$$

die Gleichung dieses Kreises ist, und x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten der Berührungspunkte sind, die Gleichungen der Dreiecksseiten die folgenden:

$$A = xx_1+yy_1-r^2=0$$
$$B = xx_2+yy_2-r^2=0$$
$$C = xx_3+yy_3-r^2=0$$

wobei die Bedingungsgleichungen:

$$x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2 = x_3^2+y_3^2 = r^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

stattfinden.

Die Gleichungen der Seiten in der Normalform sind also:

$$\frac{A}{r} = 0, \quad \frac{B}{r} = 0, \quad \frac{C}{r} = 0$$

und die der Aussenwinkelhalbirenden sind:

$$\begin{aligned} A' &= B + C = 0 \\ B' &= A + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ C' &= A + B = 0 \end{aligned}$$

Diese Aussenwinkelhalbirenden bilden ein Dreieck, dessen Ecken a', b', c' die Mittelpunkte der dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise sind; deren Gleichungen erhalten werden, wenn man berücksichtigt, dass:

$$\lambda_1^2 A^2 + \lambda_2^2 B^2 + \lambda_3^2 C^2 - 2\lambda_1\lambda_2 AB - 2\lambda_1\lambda_3 AC - 2\lambda_2\lambda_3 BC = 0 = F(x, y)$$

überhaupt die Gleichung irgend eines Kegelschnitts ist, der die Seiten des Dreiecks (Fig. 1.) berührt (Pol und Polare des Dreiecks (16)), und nun die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 so bestimmt, dass dieser Kegelschnitt bezüglich die Mittelpunkte a', b', c' erhält.

Für den Mittelpunkt dieses Kegelschnitts hat man aber die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}F'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}F'(y) = 0$$

oder:

$$\lambda_1 x_1(\lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_2 x_2(-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_3 x_3(-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C) = 0$$

$$\lambda_1 y_1(\lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_2 y_2(-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \lambda_3 y_3(-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C) = 0$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A - \lambda_2 B - \lambda_3 C &= ku \\ -\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C &= kv \\ -\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C &= kw \end{aligned}$$

so folgen durch Addition je zweier dieser Gleichungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A &= k'(v + w) \\ \lambda_2 B &= k'(u + w) \\ \lambda_3 C &= k'(u + v) \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 u + \lambda_2 x_2 v + \lambda_3 x_3 w &= 0 \\ \lambda_1 y_1 u + \lambda_2 y_2 v + \lambda_3 y_3 w &= 0 \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus die Grössen $\lambda_1 u$, $\lambda_2 v$, $\lambda_3 w$ und setzt der Kürze halber:

$$x_2y_3 - x_3y_2 = \varrho_1$$
$$x_3y_1 - x_1y_3 = \varrho_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$x_1y_2 - x_2y_1 = \varrho_3$$

so hat man:

$$\lambda_1 u = k''\varrho_1, \quad \lambda_2 v = k''\varrho_2, \quad \lambda_3 w = k''\varrho_3$$

Die Werte für u, v, w, in die vorigen drei Gleichungen eingesetzt geben:

$$\lambda_1 0 + \lambda_2\varrho_3 + \lambda_3\varrho_2 = k'''A$$
$$\lambda_1\varrho_3 + \lambda_2 0 + \lambda_3\varrho_1 = k'''B$$
$$\lambda_1\varrho_2 + \lambda_2\varrho_1 + \lambda_3 0 = k'''C$$

woraus sich ergeben:

$$\lambda_1 = \mu \begin{vmatrix} A & \varrho_3 & \varrho_2 \\ B & 0 & \varrho_1 \\ C & \varrho_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \mu \begin{vmatrix} 0 & A & \varrho_2 \\ \varrho_3 & B & \varrho_1 \\ \varrho_2 & C & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \mu \begin{vmatrix} 0 & \varrho_3 & A \\ \varrho_3 & 0 & B \\ \varrho_2 & \varrho_1 & C \end{vmatrix}$$

oder:

$$\lambda_1 = \mu\varrho_1(-\varrho_1 A + \varrho_2 B + \varrho_3 C)$$
$$\lambda_2 = \mu\varrho_2(\varrho_1 A - \varrho_2 B + \varrho_3 C) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$\lambda_3 = \mu\varrho_3(\varrho_1 A + \varrho_2 B - \varrho_3 C)$$

Hierdurch sind die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 so bestimmt, dass A, B, C die Dreieckscoordinaten für den Mittelpunkt des Kegelschnittes $(F(x, y) = 0)$ sind.

Will man also die Gleichung desjenigen Kreises, der die Seite A des Dreiecks abc direct und die Seiten B und C in ihren Verlängerungen berührt, so hat man in die Gleichungen (4) statt der Grössen A, B, C die Dreieckscoordinaten des Punktes a' einzuführen. Nun ist aber:

$$B_{a'}' \equiv 0, \quad C_{a'}' \equiv 0$$

folglich:

$$A_{a'} + C_{a'} \equiv 0, \quad A_{a'} + B_{a'} \equiv 0$$

deshalb:

$$A_{a'} = A_{a'}, \quad B_{a'} = -A_{a'}, \quad C_{a'} = -A_{a'}$$

und somit:

$$\lambda_1 = -\mu'\varrho_1(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)$$
$$\lambda_2 = \mu'\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3) \quad \ldots\ldots\ldots (4a)$$
$$\lambda_3 = \mu'\varrho_3(\varrho_2 - \varrho_2 + \varrho_3)$$

Ebenso ergeben sich die Werte von λ_1, λ_2, λ_3 für die beiden andern dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise, und man erhält, indem man:

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \sigma_0$$
$$-\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \sigma_1$$
$$\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 = \sigma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 = \sigma_3$$

setzt, als Gleichungen jener drei Kreise die folgenden:

$$K_1 = \sigma_0^2\varrho_1^2A^2 + \sigma_3^2\varrho_2^2B^2 + \sigma_2^2\varrho_3^2C^2 + 2\sigma_0\sigma_3\varrho_1\varrho_2AB + 2\sigma_0\sigma_2\varrho_1\varrho_3AC - 2\sigma_2\sigma_3\varrho_2\varrho_3BC = 0 \quad (6)$$

$$K_2 = \sigma_3^2\varrho_1^2A^2 + \sigma_0^2\varrho_2^2B^2 + \sigma_1^2\varrho_3^2C^2 + 2\sigma_0\sigma_3\varrho_1\varrho_2AB - 2\sigma_1\sigma_3\varrho_1\varrho_3AC + 2\sigma_0\sigma_1\varrho_2\varrho_3BC = 0$$

$$K_3 = \sigma_2^2\varrho_1^2A^2 + \sigma_1^2\varrho_2^2B^2 + \sigma_0^2\varrho_3^2C^2 - 2\sigma_1\sigma_2\varrho_1\varrho_2AB + 2\sigma_0\sigma_2\varrho_1\varrho_3AC + 2\sigma_0\sigma_1\varrho_2\varrho_3BC = 0$$

Verbindet man nun diejenigen Punkte, in welchen jeder der drei Kreise a', b', c' die verlängerten Dreiecksseiten berührt, so entsteht ein Dreieck A'', B'', C'', dessen Eigenschaften nun näher zu untersuchen sind.

Die Seite A'' kann man sich auch als Polare der Ecke a bezüglich des Kreises a' aufgefasst denken und erhält somit deren Gleichung, wenn man sich aus der Gleichung:

$$F_a(x, y) = 0$$

jenes Kreises die Gleichung seiner Polaren bezüglich eines Punktes 0 ableitet:

$$x\tfrac{1}{2}F_a'(x_0) + y\tfrac{1}{2}F_a'(y_0) + zF_a'(z_0) = 0$$

und als Punkt 0 die Ecke a des Dreiecks ABC wählt, wofür:

$$B_0 \equiv 0 \quad \text{und} \quad C_0 \equiv 0$$

ist.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Gleichungen für B'' und C'', so dass man hat:

$$\begin{aligned} A'' &= \sigma_0\varrho_1A + \sigma_3\varrho_2B + \sigma_2\varrho_3C = 0 \\ B'' &= \sigma_3\varrho_1A + \sigma_0\varrho_2B + \sigma_1\varrho_3C = 0 \\ C'' &= \sigma_2\varrho_1A + \sigma_1\varrho_2B + \sigma_0\varrho_3C = 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots (7)$$

Zufolge (5) hat man auch:

$$A'' = \sigma_0\varrho_1A + (\sigma_0 - 2\varrho_3)\varrho_2B + (\sigma_0 - 2\varrho_2)\varrho_3C = 0$$

$$A'' = \sigma_0(\varrho_1A + \varrho_2B + \varrho_3C) - 2\varrho_2\varrho_3(B + C) = 0$$

$$A'' = \sigma_0(x(\varrho_1x_1 + \varrho_2x_2 + \varrho_3x_3) + y(\varrho_1y_1 + \varrho_2y_2 + \varrho_3y_3) - r^2\sigma_0) - 2\varrho_2\varrho_3(B + C) = 0$$

Da aber nach (3):

$$\begin{aligned} \varrho_1x_1 + \varrho_2x_2 + \varrho_3x_3 &\equiv 0 \\ \varrho_1y_1 + \varrho_2y_2 + \varrho_3y_3 &\equiv 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

so folgt:

$$A'' = -2\varrho_2\varrho_3(B + C) - r^2\sigma_0^2 = 0$$

ebenso:

$$\left.\begin{aligned} B'' &= -2\varrho_1\varrho_3(A + C) - r^2\sigma_0^2 = 0 \\ C'' &= -2\varrho_1\varrho_2(A + B) - r^2\sigma_0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

Zufolge der Gleichungen (2) ergibt sich nun, dass die Geraden A'', B'', C'' bezüglich parallel sind mit A', B', C', was auch unmittelbar hervorgeht, wenn man berücksichtigt, dass die Kreispolaren A'', B'', C'' der Ecken a, b, c des gegebenen Dreiecks senkrecht stehen auf den Geraden aa', bb', cc'.

Daher der Satz:

Das Dreieck $A''B''C''$ ist ähnlich und ähnlichliegend mit dem Dreiecke $A'B'C'$ der Aussenwinkelhalbirenden des gegebenen Dreiecks. . . . . (10)

Die Coordinaten der Eckpunkte a'', b'', c'' des Dreiecks $A''B''C''$ ergeben sich durch Auflösung je zweier der drei Gleichungen (7) nach A, B, C und sind bestimmt durch die Verhältnisse:

$$A_{a''}:B_{a''}:C_{a''} = -2\varrho_2\varrho_3(\varrho_2+\varrho_3):\varrho_3(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2):\varrho_2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2)$$
$$A_{b''}:B_{b''}:C_{b''} = \varrho_3(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2):-2\varrho_1\varrho_3(\varrho_1+\varrho_3):\varrho_1(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2)$$
$$A_{c''}:B_{c''}:C_{c''} = \varrho_2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2):\varrho_1(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2):-2\varrho_1\varrho_2(\varrho_1+\varrho_2)$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned} r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -\varrho_1^2(x_1^2+y_1^2)+\varrho_2^2(x_2^2+y_2^2)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= \varrho_2^2x_2^2-\varrho_1^2x_1^2+\varrho_2^2y_2^2-\varrho_1^2y_1^2+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= (\varrho_2x_2+\varrho_1x_1)(\varrho_2x_2-\varrho_1x_1)+(\varrho_2y_2+\varrho_1y_1)(\varrho_2y_2-\varrho_1y_1)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \end{aligned}$$

und zufolge der Gleichungen (8) hat man:

$$\begin{aligned} r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -\varrho_3x_3(\varrho_2x_2-\varrho_1x_1)-\varrho_3y_3(\varrho_2y_2-\varrho_1y_1)+\varrho_3^2(x_3^2+y_3^2) \\ &= -\varrho_3[-x_3(x_1\varrho_1-x_2\varrho_2+x_3\varrho_3)-y_3(y_1\varrho_1-y_2\varrho_2+y_3\varrho_3)] \\ &= -2\varrho_2\varrho_3(x_2x_3+y_2y_3) \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun $x_\lambda x_\mu+y_\lambda y_\mu$ mit $\Sigma_{\lambda\mu}$, so hat man:

und ebenso:

$$\begin{aligned} r^2(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -2\varrho_2\varrho_3\Sigma_{23} \\ r^2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2) &= -2\varrho_1\varrho_3\Sigma_{13} \quad \ldots\ldots (11) \\ r^2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2) &= -2\varrho_1\varrho_2\Sigma_{12} \end{aligned}$$

Mithin gehen obige Verhältnisse über in:

$$\begin{aligned} A_{a''}:B_{a''}:C_{a''} &= \frac{r^2(\varrho_2+\varrho_3)}{\varrho_1}:\Sigma_{12}:\Sigma_{13} \\ A_{b''}:B_{b''}:C_{b''} &= \Sigma_{12}:\frac{r^2(\varrho_1+\varrho_3)}{\varrho_2}:\Sigma_{23} \quad \ldots\ldots (12) \\ A_{c''}:B_{c''}:C_{c''} &= \Sigma_{13}:\Sigma_{23}:\frac{r^2(\varrho_1+\varrho_2)}{\varrho_3} \end{aligned}$$

Für die Verbindungslinien der Eckpunkte a, b, c des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten a'', b'', c'' des Dreiecks $A''B''C''$ hat man die Gleichungen:

$$BC_{a''} - CB_{a''} = 0$$
$$CA_{b''} - AC_{b''} = 0$$
$$AB_{c''} - BA_{c''} = 0$$

oder:

$$B\Sigma_{13} - C\Sigma_{12} = 0$$
$$C\Sigma_{12} - A\Sigma_{23} = 0$$
$$A\Sigma_{23} - B\Sigma_{13} = 0$$

Da aber diese Gleichungen die Höhen des Urdreiecks ABC darstellen, so folgt der Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke ABC und $A''B''C''$ treffen sich in einem und demselben Punkte und zwar in dem Höhenschnittpunkte des Urdreiecks ABC. . . . . (13)

Die ähnlichen und ähnlichliegenden Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ besitzen einen Aehnlichkeitspunkt Q, in welchem sich die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken schneiden.

Die Gleichungen dieser Verbindungslinien $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ sind nun:

$$B''C_{a'}'' - C''B_{a'}'' = 0$$
$$C''A_{b'}'' - A''C_{b'}'' = 0$$
$$A''B_{c'}'' - B''A_{c'}'' = 0$$

Zufolge (9) und (2) hat man aber:

$$A'' = -2\varrho_2\varrho_3 A' - r^2\sigma_0^2 = 0$$
$$B'' = -2\varrho_1\varrho_3 B' - r^2\sigma_0^2 = 0$$
$$C'' = -2\varrho_1\varrho_2 C' - r^2\sigma_0^2 = 0$$

Da nun

$$B_{a'}' \equiv 0 \quad \text{und} \quad C_{a'}' \equiv 0$$

so sind:

$$B_{a'}'' = -r^2\sigma_0^2 \quad \text{und} \quad C_{a'}'' = -r^2\sigma_0^2$$

ebenso sind:

$$A_{b'}'' = C_{b'}'' = -r^2\sigma_0^2$$
$$B_{c'}'' = C_{c'}'' = -r^2\sigma_0^2$$

so dass die Gleichungen von $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ übergehen in:

$$B'' - C'' = 0$$
$$C'' - A'' = 0$$
$$A'' - B'' = 0$$

woraus zugleich ersichtlich ist, dass die Geraden $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ sich in einem und demselben Punkte treffen.

Mit Hülfe der Gleichungen (9) nehmen aber obige Gleichungen die Formen an:

$$\frac{B'}{\varrho_2} - \frac{C'}{\varrho_3} = 0$$
$$\frac{C'}{\varrho_3} - \frac{A'}{\varrho_1} = 0$$
$$\frac{A'}{\varrho_1} - \frac{B'}{\varrho_2} = 0$$

und da diesen drei Gleichungen durch die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes Q genügt werden muss, so hat man:

$$A_q' = \varrho_1 \lambda, \quad B_q' = \varrho_2 \lambda, \quad C_q' = \varrho_3 \lambda$$

oder mit Rücksicht auf (2)

$$B_q + C_q = \lambda \varrho_1$$
$$A_q + C_q = \lambda \varrho_2$$
$$A_q + B_q = \lambda \varrho_3$$

woraus folgt:

$$A_q : B_q : C_q = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \quad \ldots \ldots \ldots (14)$$

Verbindet man den Schnittpunkt der Geraden $a'a''$ und der entsprechenden Dreiecksseite A mit der Gegenecke a des Dreiecks ABC, so ist die Gleichung dieser Verbindungslinie einerseits:

$$\mu B + \lambda C = 0$$

Die Gleichung von $a'a''$ ist nach Obigem:

$$B' \varrho_3 - C' \varrho_2 = 0$$

oder:

$$A(\varrho_2 - \varrho_3) + B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$

Die Gleichung der gesuchten Linie ist also anderseits:

$$A(\varrho_2 - \varrho_3) + B\varrho_2 - C\varrho_3 - kA = 0$$

und somit muss sein:

$$\mu B + \lambda C \equiv A(\varrho_2 - \varrho_3 - k) + B\varrho_2 - C\varrho_3$$

also:

$$\mu = \varrho_2, \quad \lambda = -\varrho_3$$

Es ist also die Gleichung der Verbindungslinie des Punktes a mit dem Schnittpunkte von $a'a''$ und A

$$B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$

d. h. die der Seitenhalbirungstransversale des Dreiecks ABC.



Daraus ergibt sich der Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gehen durch die Mitten des Urdreiecks und treffen sich in einem und demselben Punkte Q.

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks Quadrate und verlängert die den Dreiecksseiten parallelen Quadratseiten bis sie sich schneiden, so entsteht ein dem gegebenen Dreiecke ähnliches und mit ihm ähnlichliegendes Dreieck. Der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke heisst der Grebe'sche Punkt.

Da man aber von den Quadraten

entweder: alle drei nach Aussen;
oder: je zwei nach Aussen und das dritte nach Innen;
oder: je eines nach Aussen und die beiden andern nach Innen;
oder: alle drei nach Innen

errichten kann, so werden im Allgemeinen acht Grebe'sche Punkte entstehen können.

Sind s_1, s_2, s_3 die Längen der Dreiecksseiten, deren Gleichungen in der Normalform sind:

$$\frac{A}{r} = 0, \quad \frac{B}{r} = 0, \quad \frac{C}{r} = 0$$

so haben die zu den Dreieckseiten parallelen Quadratseiten die Gleichungen:

$$A''' = A \pm rs_1 = 0$$
$$B''' = B \pm rs_2 = 0$$
$$C''' = C \pm rs_3 = 0$$

Die Verbindungslinien der Ecken a, b, c und a''', b''', c''' der Dreiecke ABC und $A'''B'''C'''$ schneiden sich im Grebe'schen Punkte G.

Für die Gleichung der Verbindungslinie aa''' hat man nun einerseits:

$$B - \lambda C = 0$$

und anderseits:

$$\mu(B \pm rs_2) + \nu(C \pm rs_3) = 0$$

so dass:

$$B - \lambda C \equiv \mu(B \pm rs_2) + \nu(C \pm rs_3) = 0$$

folglich:

$$x_2 - \lambda x_3 = \mu x_2 + \nu x_3$$
$$y_2 - \lambda y_3 = \mu y_2 + \nu y_3$$

$$1-\lambda=\mu\left(1\mp\frac{s_2}{r}\right)+\nu\left(1\mp\frac{s_2}{r}\right)$$

$$\therefore\ \lambda=\begin{vmatrix} x_2, & x_2, & x_3 \\ y_2, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1\mp\frac{s_2}{r}, & 1\pm\frac{s_3}{r} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3, & x_2, & x_3 \\ y_3, & y_2, & y_3 \\ 1, & 1\mp\frac{s_2}{r}, & 1\mp\frac{s_3}{r} \end{vmatrix}=\frac{s_2}{s_3}$$

Somit ist die Gleichung von aa''':

$$\frac{B}{s_2}-\frac{C}{s_3}=0$$

ebenso von bb''':

$$\frac{C}{s_3}-\frac{A}{s_1}=0$$

und von cc''':

$$\frac{A}{s_1}-\frac{B}{s_2}=0$$

Für die Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Schnittpunktes G hat man demnach:

$$A_g:B_g:C_g=s_1:s_2:s_3$$

woraus hervorgeht, dass man denselben Grebe'schen Punkt erhält, ob man die drei Quadrate nach Aussen oder nach Innen errichtet.

Würde man dieselbe Rechnung für den Fall durchführen, dass:

$$A'''=A\mp rs_1=0$$
$$B'''=B\pm rs_2=0$$
$$C'''=C\pm rs_3=0$$

so erhielte man für die Coordinaten des Grebe'schen Punktes:

$$A_{g_1}:B_{g_1}:C_{g_1}=-s_1:s_2:s_3$$

Es fallen somit von den acht Grebe'schen Punkten je zwei in einen zusammen, so dass man blos einen inneren und drei äussere Grebesche Punkte erhält (Fig. 3.), deren Coordinatenverhältnisse die folgenden sind:

$$\begin{aligned} A_g:B_g:C_g&=s_1:s_2:s_3\\ A_{g_1}:B_{g_1}:C_{g_1}&=-s_1:s_2:s_3\\ A_{g_2}:B_{g_2}:C_{g_2}&=s_1:-s_2:s_3\\ A_{g_3}:B_{g_3}:C_{g_3}&=s_1:s_2:-s_3\end{aligned}\quad\ldots\ldots\ldots\ (15)$$

Nun hat man aber für die Länge s_1 der Dreiecksseite bc:

$$s_1^2=(x_b-x_c)^2+(y_b-y_c)^2$$

Die Coordinaten x_b und y_b, ferner x_c und y_c ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\begin{matrix} x_b x_1 + y_b y_1 = r^2 \\ x_b x_3 + y_b y_3 = r^2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x_c x_2 + y_c y_2 = r^2 \\ x_c x_1 + y_c y_1 = r^2 \end{matrix}$$

so dass:

$$x_b = \frac{r^2}{\varrho_2}(y_1 - y_3), \qquad x_c = \frac{r^2}{\varrho_3}(y_2 - y_1)$$

$$y_b = \frac{r^2}{\varrho_2}(x_3 - x_1), \qquad y_c = \frac{r^2}{\varrho_3}(x_1 - x_2)$$

$$\therefore s_1^2 = \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2}(y_1\varrho_3 - y_3\varrho_3 - y_2\varrho_2 + y_1\varrho_2)^2 + \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2}(x_3\varrho_3 - x_1\varrho_3 - x_1\varrho_2 + x_2\varrho_2)^2$$

Zufolge der Gleichungen (8) hat man:

$$s_1^2 = \frac{r^4}{\varrho_2^2 \varrho_3^2}(y_1^2 \sigma_0^2 + x_1^2 \sigma_0^2) = \frac{r^6 \sigma_0^2}{\varrho_2^2 \varrho_3^2}$$

somit ist:

$$s_1 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_2 \varrho_3}$$

und ebenso:

$$s_2 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_1 \varrho_3} \qquad \dots\dots\dots\dots (16)$$

$$s_3 = \frac{r^3 \sigma_0}{\varrho_1 \varrho_2}$$

folglich:

$$\begin{aligned} A_g : B_g : C_g &= \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 \\ A_{g_1} : B_{g_1} : C_{g_1} &= -\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 \\ A_{g_2} : B_{g_2} : C_{g_2} &= \varrho_1 : -\varrho_2 : \varrho_3 \\ A_{g_3} : B_{g_3} : C_{g_3} &= \varrho_1 : \varrho_2 : -\varrho_3 \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots (17)$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte G_1 und G_2 ist:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ -\varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \varrho_1, & -\varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\frac{A}{\varrho_1} + \frac{B}{\varrho_2} = 0$$

ebenso sind die Gleichungen von $G_1 G_3$ und $G_2 G_3$:

$$\frac{A}{\varrho_1} + \frac{C}{\varrho_3} = 0$$

$$\frac{B}{\varrho_2} + \frac{C}{\varrho_3} = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots (18)$$

d. h. Die äusseren Grebe'schen Punkte bilden ein Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Urdreiecks gehen . . . . (19)

Die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte G und G_1 ist:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ -\varrho_1 & \varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\frac{B}{\varrho_2} - \frac{C}{\varrho_3} = 0$$

Ebenso sind die Gleichungen GG_2 und GG_3:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{\varrho_3} - \frac{A}{\varrho_1} = 0 \\ \frac{A}{\varrho_1} - \frac{B}{\varrho_2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

d. h. Die Verbindungslinie des inneren Grebe'schen Punktes mit je einem äusseren geht durch die entsprechende Ecke des Urdreiecks . . . . (21)

Aus den Gleichungen (18) und (20) folgt der Satz:

Die in einer Ecke des Dreiecks zusammenstossenden Verbindungslinien der 4 Grebe'schen Punkte trennen die Dreiecksseiten harmonisch . . . . (22)

Demzufolge liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke ABC und $G_1G_2G_3$ auf einer Geraden, der Polaren des Punktes G.

Die Gleichung des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises ist:

$$AB\varrho_3 + AC\varrho_2 + BC\varrho_1 = 0$$

woraus folgt:

Der Polkegelschnitt des Grebe'schen Punktes ist der Umkreis des Dreiecks . . . . (23)

Die Gleichungen (18)' stellen aber die Tangenten des Umkreises in den Ecken des Dreiecks dar, wodurch sich folgende einfache Construction der Grebe'schen Punkte ergibt:

Zieht man in den Ecken des Dreiecks an den Umkreis die Tangenten, so schneiden sich dieselben in den drei äusseren Grebe'schen Punkten; ihre Verbindungslinien mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks liefern als Schnitt den inneren Grebe'schen Punkt.

Da die in den Ecken des Dreiecks an den Umkreis gezogenen Tangenten die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in drei Punkten einer Geraden $P(g)$ schneiden, welches die Dreieckspolare des Grebeschen Punktes ist, so steht die Verbindungslinie des Umkreiscentrums mit dem Grebe'schen Punkte senkrecht auf der Geraden $P(g)$.

Die Dreieckspolaren sämmtlicher Punkte des Umkreises gehen durch den Grebe'schen Punkt; und die Dreieckspolaren sämmtlicher Punkte der Geraden $P(g)$ umhüllen einen Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks in ihren Schnittpunkten mit GG_1, GG_2, GG_3 berührt.

Da der Mittelpunkt J des dem Dreiecke einbeschriebenen Kreises mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, so hat man für seine Coordinaten:

$$A_i : B_i : C_i = 1:1:1 \qquad (24)$$

Die Seiten A und A', B und B', C und C' der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ schneiden sich in drei Punkten einer Geraden, welche die Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise ist.

Ihre Gleichung ist einerseits:

$$A + \lambda(B + C) = 0$$

und andersseits:

$$B + \mu(A + C) = 0$$

folglich:

$$A + B + C = 0$$

Wäre Punkt 0 ihr Deieckspol, so müsste ihre Gleichung zusammenfallen mit der Gleichung:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0$$

was nur dann der Fall ist, wenn:

$$A_0 : B_0 : C_0 = 1:1:1$$

d. h. Der Pol der Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte für die drei dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise ist das Inkreiscentrum . . . . (25)

Der dem Inkreiscentrum entsprechende Polkegelschnitt hat die Gleichung:

$$AB + BC + CA = 0$$

Für dessen Mittelpunkt hat man die Gleichungen:



$$A(x_2+x_3)+B(x_1+x_3)+C(x_1+x_2)=0$$
$$A(y_2+y_3)+B(y_1+y_3)+C(y_1+y_2)=0$$

und somit für dessen Coordinaten:

$$A:B:C=\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$$

Mit Rücklicht auf Gleichung (14) folgt somit:

Der Polkegelschnitt des Inkreiscentrums geht durch die Ecken des Dreiecks ABC, berührt die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ der Aussenwinkelhalbirenden und hat den Aehnlichkeitspunkt Q der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ zum Mittelpunkte . . . . (26)

Der dem Inkreiscentrum entsprechende Umhüllungskegelschnitt hat die Gleichung:

$$A^2+B^2+C^2-2AB-2AC-2BC=0$$

Derselbe berührt die Seiten des Dreiecks ABC in den Schnittpunkten der Winkelhalbirenden.

Die Coordinaten seines Mittelpunktes E ergeben sich aus den Gleichungen:

$$A_e(-x_1+x_2+x_3)+B_e(x_1-x_2+x_3)+C_e(x_1+x_2-x_3)=0$$
$$A_e(-y_1+y_2+y_3)+B_e(y_1-y_2+y_3)+C_e(y_1+y_2-y_3)=0$$

so dass:

$$A_e:B_e:C_e=(\varrho_2+\varrho_3):(\varrho_1+\varrho_3):(\varrho_1+\varrho_2) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (27)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_i, & B_i, & C_i \\ A_g, & B_g, & C_g \\ A_e, & B_e, & C_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_2 \end{vmatrix}$$

so geht dieselbe durch Addition der Elemente der beiden letzten Horizontalreihen über in:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3 \end{vmatrix}$$

oder nach Unterdrückung des Factors $(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)$ in:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist aber identisch gleich Null, woraus hervorgeht, dass die Punkte J, G und E einer und derselben Geraden angehören.

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_q, & B_q, & C_q \\ A_e, & B_e, & C_e \\ A_g & B_g, & C_g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1-\varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_2-\varrho_3 \\ \varrho_2+\varrho_3 & \varrho_1+\varrho_3 & \varrho_1+\varrho_2 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix}$$

erhält durch Subtraction der Elemente der beiden ersten Horizontalreihen zwei gleiche Reihen und ist somit identisch Null, weshalb auch die Punkte Q, E und G einer Geraden angehören.

Sind nun A_0, B_0, C_0 und A_1, B_1, C_1, die Coordinaten zweier Punkte 0 und 1, so hat man für das hierzu harmonische Punktepaar 2, 3 die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nu A_2 &= A_0+\lambda A_1, & \mu A_3 &= A_0-\lambda A_1 \\ \nu B_2 &= B_0+\lambda B_1, & \mu B_3 &= B_0-\lambda B_1 \\ \nu C_2 &= C_0+\lambda C_1, & \mu C_3 &= C_0-\lambda C_1 \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_0+\lambda A_1}{B_0+\lambda B_1} \qquad \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_0-\lambda A_1}{B_0-\lambda B_1}$$

Durch Elimination der Grösse λ aus beiden letzten Gleichungen folgt die Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} A_0, & B_0 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_0, & B_0 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad . . (28)$$

dafür, dass die Punktepaare 0,1 und 2,3 harmonisch sind.

Wählt man nun als Punktepaar 0,1 die Punkte G und E, und als Punktepaar 2,3 die Punkte J und Q, so wird Gleichung (28):

$$\begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3 & \varrho_1+\varrho_3 \\ -\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1-\varrho_2+\varrho_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ -\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3, & \varrho-\varrho_2+\varrho_3 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \\ -\varrho_1, & -\varrho_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_2, & \varrho_1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

d. h. Die vier Punkte G, E, J und Q liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . (29)

Da der Punkt Q der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ ist und das Inkreiscentrum J zugleich der Höhenschnittspunkt im Dreiecke $A'B'C'$ ist; so muss der Höhenschnittspunkt H'' des Dreiecks $A''B''C''$ auf der Verbindungslinie JQ und somit also auf der Linie der vier Punkte G, E, J, Q liegen.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Inkreises und der Dreiecksseiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks haben die Gleichungen:

$$BC_1 - CB_1 = 0$$
$$AC_2 - CA_2 = 0$$
$$AB_3 - BA_3 = 0$$

Nun sind aber:

$$A_2 = B_1 = x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = T_{12}$$
$$A_3 = C_1 = x_1x_3 + y_1y_3 - r^2 = T_{13}$$
$$B_3 = C_2 = x_1x_3 + y_2y_3 - r^2 = T_{23}$$

somit werden die Gleichungen obiger Verbindungslinien:

$$BT_{13} - CT_{12} = 0$$
$$CT_{12} - AT_{23} = 0$$
$$AT_{23} - BT_{13} = 0$$

woraus ersichtlich ist, dass die genannten drei Geraden sich in einem und demselben Punkte treffen.

Dessen Coordinatenverhältniss wird nun:

$$A:B:C = \frac{1}{T_{23}} : \frac{1}{T_{13}} : \frac{1}{T_{12}}$$

Es ist aber zufolge der Gleichungen (11):

$$T_{23} = \Sigma_{23} - r^2 = -\frac{r^2(-\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2)}{2\varrho_2\varrho_3} - r^2 = -\frac{r^2\sigma_0\,\sigma_1}{2\varrho_2\varrho_3}$$

ebenso:

$$T_{13} = -\frac{r^2\sigma_0\,\sigma_2}{2\varrho_1\varrho_2}$$

$$T_{12} = -\frac{r^2\sigma_0\,\sigma_3}{2\varrho_1\varrho_2}$$

d. h. Die Verbindungslinien der Berührpunkte des Inkreises und der Dreiecksseiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks

schneiden sich in einem und demselben Punkte L, dessen Coordinatenverhältniss ist:

$$A_L : B_L : C_L = \frac{1}{\sigma_1 \varrho_1} : \frac{1}{\sigma_2 \varrho_2} : \frac{1}{\sigma_3 \varrho_3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Die Gleichungen seiner Dreieckspolare, seines entsprechenden Polkegelschnittes und Umhüllungskegelschnittes sind der Reihe nach:

$$P(L) = \sigma_1 \varrho_1 A + \sigma_1 \varrho_2 B + \sigma_3 \varrho_3 C = 0$$

$$\Pi(L) = AB\sigma_1\sigma_2\varrho_1\varrho_2 + AC\sigma_1\sigma_3\varrho_1\varrho_3 + BC\sigma_2\sigma_3\varrho_2\varrho_3 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

$$\Phi(L) = \sigma_1^2\varrho_1^2A^2 + \sigma_2^2\varrho_2^2B^2 + \sigma_3^2\varrho_3^2C^2 - 2\sigma_1\sigma_2\varrho_1\varrho_2AB - 2\sigma_1\sigma_3\varrho_1\varrho_3AC - 2\sigma_2\sigma_3\varrho_2\varrho_3BC = 0$$

Verbindet man die Schnittpunkte der Dreiecksseiten B, C'' und C, B''; ebenso A, C'' und C, A''; und A, B'' und B, A'' und bezeichnet diese Verbindungslinien bezüglich mit U, V, W (Fig. 1.), so hat man für U die identischen Gleichungen:

$$U = \varrho_1\sigma_2A + \varrho_2\sigma_1B + \varrho_3\sigma_0C + \lambda B \equiv \mu(\varrho_1\sigma_3A + \varrho_2\sigma_0B + \varrho_3\sigma_1C) + \nu C = 0$$

folglich:

$$\sigma_2 = \mu\sigma_3$$

$$\varrho_2\sigma_1 + \lambda = \mu\varrho_2\sigma_0$$

also:

$$\mu = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\varrho_2\sigma_0 - \varrho_2\sigma_1$$

Es wird also die Gleichung von U:

$$U = \varrho_1\sigma_2\sigma_3A + \varrho_2\sigma_0\sigma_2B + \varrho_3\sigma_0\sigma_3C = 0$$

ebenso:

$$V = \varrho_1\sigma_0\sigma_1A + \varrho_2\sigma_1\sigma_3B + \varrho_3\sigma_0\sigma_3C = 0$$

$$W = \varrho_1\sigma_0\sigma_1A + \varrho_2\sigma_0\sigma_2B + \varrho_3\sigma_1\sigma_2C = 0$$

Für die Verbindungslinie der Schnittpunte von U und A, und V und B hat man demnach die identischen Gleichungen:

$$\varrho_1\sigma_2\sigma_3A + \varrho_2\sigma_0\sigma_2B + \varrho_3\sigma_0\sigma_3C + \lambda A = \mu(\varrho_1\sigma_0\sigma_1A = \varrho_2\sigma_1\sigma_3B + \varrho_3\sigma_0\sigma_3C) + \nu B = 0$$

woraus folgt:

$$\varrho_1\sigma_2\sigma_3 + \lambda = \mu\varrho_1\sigma_0\sigma_1$$

$$\varrho_3\sigma_0\sigma_3 = \mu\varrho_3\sigma_0\sigma_3$$

also:

$$\mu = 1, \quad \lambda = \varrho_1\sigma_0\sigma_1 - \varrho_1\sigma_2\sigma_3$$

wodurch obige Gleichung übergeht in:

$$\varrho_1\sigma_1A + \varrho_2\sigma_2B + \varrho_3\sigma_3C = 0$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich aber auch für die Verbindungslinie der Schnittpunkte von U mit A und W mit C, so dass unter Berücksichtigung von (31) folgt:

Die Geraden U, V, W schneiden die Dreiecksseiten A, B, C in drei Punkten einer Geraden $P(L)$, welche die Dreieckspolare des Punktes L ist . . . . (32)

Setzt man in den Gleichungen (4) statt A, B, C die Coordinaten des Inkreiscentrums ein, wodurch:

$$\lambda_1 = \mu\varrho_1\sigma_1, \quad \lambda_2 = \mu\varrho_2\sigma_2, \quad \lambda_3 = \mu\varrho_3\sigma_3$$

werden; so folgt für die Gleichung des Inkreises:

$$\varrho_1^2\sigma_1^2A^2 + \varrho_2^2\sigma_2^2B^2 + \varrho_3^2\sigma_3^2C^2 - 2\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2AB - 2\varrho_1\varrho_3\sigma_1\sigma_3AC - 2\varrho_2\varrho_3\sigma_2\sigma_3BC = 0 \quad \ldots\ldots (33)$$

und mit Rücksicht auf (31):

Der dem Punkte L entsprechende Umhüllungskegelschnitt ist der dem Urdreiecke einbeschriebene Kreis . . . . (34)

Man verbinde nun den Berührungspunkt des Kreises K_1 (Fig. 2.) und die Seite A mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte a und stelle die Gleichung dieser Verbindungslinie fest.

Die Polaren der Ecken b und c des Urdreiecks bezüglich des Kreises K_1 gehen durch den Berührungspunkt des Kreises K_1 mit der Seite A. Ist nun:

$$\lambda_1^2A^2 + \lambda_2^2B^2 + \lambda_3^2C^2 - 2\lambda_1\lambda_2AB - 2\lambda_1\lambda_3AC - 2\lambda_2\lambda_3BC = 0$$

die Gleichung des Kreises K_1, wobei nach (4a)

$$\lambda_1 = -\mu\varrho_1\sigma_0; \quad \lambda_2 = \mu\varrho_2\sigma_3; \quad \lambda_3 = \mu\varrho_3\sigma_2$$

so hat man für die Kreispolare irgend eines Punktes o die Gleichung:

$$\lambda_1A(\lambda_1A_0 - \lambda_2B_0 - \lambda_3C_0) + \lambda_2B(-\lambda_1A_0 + \lambda_2B_0 - \lambda_3C_0) + \lambda_3C(-\lambda_1A_0 - \lambda_2B_0 + \lambda_3C_0) = 0$$

und somit sind die Gleichungen der Kreispolaren der Eckpunkte b und c; indem man hiefür beziehungsweise:

$$A_0 = 0, \quad C_0 = 0 \quad \text{und} \quad A_0 = 0 \quad B_0 = 0$$

zu setzen hat

$$-\lambda_1A + \lambda_2B - \lambda_3C = 0$$

und

$$-\lambda_1 A - \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

Jede durch den Berührungspunkt des Kreises K_1 mit der Seite A gehende Gerade hat also die Gleichung:

$$(-\lambda_1 A + \lambda_2 B - \lambda_3 C) + \nu(-\lambda_1 A - \lambda_2 C + \lambda_3 C) = 0$$

und wenn dieselbe ausserdem noch durch die Ecke a gehen soll, so muss

$$-\lambda_1 A_a - \nu\lambda_1 A_a = 0$$

$$\therefore\quad \nu = -1 \text{ sein.}$$

Es ist also die Gleichung der Verbindungslinie des Berührungspunktes von Kreis K_1 und Seite A mit Eckpunkt a

$$\frac{\varrho_2}{\sigma_2} B - \frac{\varrho_3}{\sigma_3} C = 0$$

Ebenso hat man für die Verbindungslinien der Ecken b und c des Dreiecks mit den auf ihren Gegenseiten liegenden Berührungspunkten der anbeschriebenen Kreise K_2 und K_3 die Gleichungen:

$$\frac{\varrho_3}{\sigma_3} C - \frac{\varrho_1}{\sigma_1} A = 0$$

$$\frac{\varrho_1}{\sigma_1} A - \frac{\varrho_2}{\sigma_2} B = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Die Verbindungslinien der Eckpunkte des Urdreiecks mit den auf ihren Gegenseiten liegenden Berührungspunkten der dem Dreiecke anbeschriebenen Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte F . . . . (35)

Zugleich hat man für dessen Coordinaten:

$$A_F : B_F : C_F = \frac{\sigma_1}{\varrho_1} : \frac{\sigma_2}{\varrho_2} : \frac{\sigma_3}{\varrho_3}$$

Die Gleichung seiner Dreieckspolaren ist:

$$A B_F . C_F + B A_F C_F + C A_F . B_F = 0$$

oder:

$$A \varrho_1 \sigma_2 \sigma_3 + B \varrho_2 \sigma_1 \sigma_3 + C \varrho_3 \varrho_1 \sigma_2 = 0$$

Die Gleichung jener Geraden, welche die Schnittpunkte der Dreiecksseiten A und A''; B und B'' verbindet, ist:

$$\varrho_1 \sigma_0 A + \varrho_2 \sigma_3 B + \varrho_3 \sigma_2 C + \lambda A \equiv \mu(\varrho_1 \sigma_3 A + \varrho_2 \sigma_0 B + \varrho_3 \sigma_1 C) + \nu B = 0$$

folglich:

$$\varrho_1\sigma_0 + \lambda = \mu\varrho_1\sigma_3$$
$$\varrho_2\sigma_3 = \mu\varrho_2\sigma_0 + \nu$$
$$\varrho_3\sigma_2 = \mu\varrho_3\sigma_1$$

woraus

$$\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sigma_3\varrho_1 - \varrho_1\sigma_0$$

wird, und somit obige Gleichung übergeht in:

$$A\varrho_1\sigma_2\sigma_3 + B\varrho_2\sigma_1\sigma_3 + C\varrho_3\sigma_1\sigma_2 = 0$$

Dieselbe Gleichung würde sich ergeben für die Linie, welche die Schnittpunkte der Dreiecksseiten A und A''; C und C'' verbindet, weshalb folgt:

Die entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und $A''B''C''$ schneiden sich in drei Punkten einer Geraden, nämlich der Polare des Punktes F . . . . (36)

Die Mitten a''', b''', c''' der Dreiecksseiten A, B, C bilden ein mit dem Urdreiecke ähnliches Dreieck, dessen Inkreiscentrum der Spieker-sche Punkt genannt wird.

Die zu den Seiten A und B gehörigen Seitenhalbirungstransversalen haben die Gleichungen:

$$B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$
$$C\varrho_3 - A\varrho_1 = 0$$

so dass die Gleichung der Seite C''' des Mittendreiecks $a'''b'''c'''$ wird:

$$C''' = C\varrho_3 - A\varrho_1 + kB \equiv \lambda(B\varrho_2 - C\varrho_3) + \nu A = 0$$

folglich:

$$\varrho_3 = -\lambda\varrho_3$$
$$-\varrho_1 = \nu$$
$$k = \lambda\varrho_2$$

woraus folgt:

$$k = -\varrho_2$$

somit:

$$C''' = A\varrho_1 + B\varrho_2 - C\varrho_4 = 0$$

ebenso:

$$B''' = A\varrho_1 - B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$
$$A''' = -A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

Bringt man diese Gleichungen mit Rücksicht auf (8) auf die Normalformen, so hat man:

$$C''' = \frac{A\varrho_1 + B\varrho_2 - C\varrho_3}{2\varrho_3 r} = 0$$

$$B''' = \frac{A\varrho_1 - B\varrho_2 + C\varrho_3}{2\varrho_2 r} = 0$$

$$A''' = \frac{-A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3}{2\varrho_1 r} = 0$$

Die Winkelhalbirenden des Dreiecks $a'''b'''c'''$ haben somit die Gleichungen:

$$\varrho_1 A(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_2 B(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_3 C(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$$
$$-\varrho_1 A(\varrho_3 + \varrho_1) + \varrho_2 B(\varrho_3 - \varrho_1) + \varrho_3 C(\varrho_3 + \varrho_1) = 0$$
$$\varrho_1 A(\varrho_2 - \varrho_3) + \varrho_2 B(\varrho_2 + \varrho_3) - \varrho_3 C(\varrho_2 + \varrho_3) = 0$$

Diese Winkelhalbirenden schneiden sich im Spieker'schen Punkte U, dessen Coordinatenverhältniss ist:

$$A_u : B_u : C_u = \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_1} : \frac{\varrho_3 + \varrho_1}{\varrho_2} : \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_3} \quad \ldots\ldots (37)$$

Denkt man sich auch noch die Aussenwinkelhalbirenden des Dreiecks $a'''b'''c'''$ gezogen, so entstehen noch drei äussere Spieker'sche Punkte, welche die Mittelpunkte der dem Dreiecke $a'''b'''c'''$ anbeschriebenen Kreise sind.

Die Innenwinkelhalbirenden des Dreiecks $a'''b'''c'''$ gehen durch die Mitten der Dreiecksseiten A, B, C und sind parallel mit denen des Urdreiecks; stehen also ebenfalls senkrecht auf den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$.

Jede Dreiecksseite ist aber gemeinschaftliche Tangente von je zwei auf derselben Seite dieser Dreiecksseite liegenden Aussenberührungskreisen, und die Mitte dieser Dreiecksseite des Urdreiecks ist bekanntlich von den Berührungspunkten jener Kreise gleich weit entfernt; woraus nun hervorgeht, dass die Innenwinkelhalbirenden des Dreiecks $a'''b'''c'''$ zugleich Potenzlinien von je zwei der Aussenberührungskreisen k_1, k_2, k_3 sind. Somit folgt der Satz:

Der Spieker'sche Punkt ist der Potenzpunkt der drei dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise . . . . (38)

Durch ähnliche Betrachtungen gelangt man auch zum Satze:

Jeder äussere Spieker'sche Punkt ist der Potenzpunkt für den Inkreis und für je zwei dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise . (39)

Die Gleichungen der Seitenhalbirungstransversalen des Urdreiecks, die sich bekanntlich im Schwerpunkte S desselben schneiden, sind:

$$A\varrho_1 - B\varrho_2 = 0$$
$$B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$
$$C\varrho_3 - A\varrho_1 = 0$$

woraus sich für S ergibt:

$$A_S : B_S : C_S = \frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} : \frac{1}{\varrho_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_U, & B_U, & C_U \\ A_J, & B_J, & C_J \\ A_S, & B_S, & C_S \end{vmatrix}$$

oder:

$$\Delta = \lambda . \begin{vmatrix} \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1}, & \frac{\varrho_3+\varrho_1}{\varrho_2}, & \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_3} \\ 1, & 1 & 1 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \end{vmatrix} = \varrho \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_3+\varrho_1, & \varrho_1+\varrho_2 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

so erhält man durch Addition der Elemente der beiden ersten Horizontalreihen zwei gleiche Reihen, weshalb:

$$\Delta \equiv 0 \quad \text{ist.}$$

Für die Determinante:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_J, & B_J, & C_J \\ A_S, & B_S, & C_S \\ A_F, & B_F, & C_F \end{vmatrix} = \lambda . \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ \frac{\sigma_1}{\varrho_1}, & \frac{\sigma_2}{\varrho_2}, & \frac{\sigma_3}{\varrho_3} \end{vmatrix} = \mu . \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

erhält man ebenfalls durch Addition der doppelten Elemente der ersten Horizontalreihe zu denen der letztern zwei gleiche Reihen, weshalb auch:

$$\Delta' = 0 \quad \text{ist.}$$

d. h. Die Punkte J, U, S, F liegen auf einer und derselben Geraden.

Betrachtet man nun die Punkte J und U als Punktepaar 0,1 und die Punkte S und F als Punktepaare 2,3, so hat man zufolge (28):

$$\begin{vmatrix} A_J, & B_J \\ A_S, & B_S \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_U, & B_U \\ A_F, & B_F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_S, & B_S \\ A_F, & B_F \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_U, & B_U \\ A_S, & B_S \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1}, & \frac{\varrho_1+\varrho_3}{\varrho_2} \\ \frac{\sigma_1}{\varrho_1}, & \frac{\sigma_2}{\varrho_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \frac{\sigma_1}{\varrho_1}, & \frac{\sigma_2}{\varrho_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1}, & \frac{\varrho_1+\varrho_3}{\varrho_2} \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2} \end{vmatrix} =$$

$$= k.\left(\begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \right) \equiv 0$$

Somit der Satz:

Das Inkreiscentrum, der Spieker'sche Punkt, der Schwerpunkt und der Punkt F des Urdreiecks liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . (41)

Da aber der Schwerpunkt des Urdreiecks zugleich der Aehnlichkeitspunkt für dieses und das Dreieck $A'''B'''\ C'''$ ist, ferner J und U homologe Punkte beider Dreiecke sind, deren Seiten im Verhältnisse 1:2 stehen, so muss auch der Schwerpunkt S die Strecke JU im Verhältnisse 1:2 teilen.

Weil aber:

$$(JUSF) = -1$$

$$\frac{JS}{US} : \frac{JF}{UF} = -1$$

so ist auch:

$$\frac{UF}{JF} = \frac{1}{2}$$

d. h. Der Spieker'sche Punkt liegt in der Mitte zwischen den Punkten J und F.

Aus obigen Gründen ist aber auch der Radius des Spieker'schen Kreises halb so gross wie der Inkreisradius, woraus folgt:

Die Punkte S und F sind die Aehnlichkeitspunkte des Inkreises und Spieker'schen Kreises . . . . (42)

Der dem Dreiecke $a'''b'''c'''$ umschriebene Kreis wird der Neunpunktkreis des Urdreiecks genannt, dessen Gleichung nun im Folgenden festzustellen ist.

Die Seiten des Dreiecks $a'''b'''c'''$ haben nach Früherem die Gleichungen:

$$C''' = A\varrho_1 + B\varrho_2 - C\varrho_3 = 0$$
$$B''' = A\varrho_1 - B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$
$$A''' = -A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

Für den Ausdruck $A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3$ hat man aber:

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = x(x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3) + y(y_1\varrho_1 + y_2\varrho_2 + y_3\varrho_3) - r^2(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) = -r^2\sigma_0$$

Zufolge der Gleichungen (8) lässt sich also dieser Ausdruck als eine von den variablen Grössen x und y unabhängige Grösse darstellen, die der Kürze halber mit $2w$ bezeichnet werde.

Die Gleichung:

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

stellt also, wie auch aus Satz (33) über Pol und Polare des Dreiecks hervorginge, die unendlich ferne Gerade der Ebene dar.

Jeder durch die Ecken des Dreiecks $a'''b'''c'''$ gehende Kegelschnitt hat aber die Gleichung:

$$\lambda_1 B'''C''' + \lambda_2 A'''C''' + \lambda_3 A'''B''' = 0$$

oder:

$$A^2\varrho_1^2(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + B^2\varrho_2^2(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + C^2\varrho_3^2(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) + 2BC\lambda_1\varrho_2\varrho_3 + 2AC\lambda_2\varrho_1\varrho_3 + 2AB\lambda_3\varrho_1\varrho_2 = 0$$

Da aber auch:

$$C''' = w - C\varrho_3 = 0$$
$$B''' = w - B\varrho_2 = 0$$
$$A''' = w - A\varrho_1 = 0$$

so hat man für die erstere Gleichung:

$$\lambda_1(B\varrho_2 - w)(C\varrho_3 - w) + \lambda_2(A\varrho_1 - w)(C\varrho_3 - w) + \lambda_3(A\varrho_1 - w)(B\varrho_2 - w) = 0$$

Damit der durch diese Gleichung dargestellte Kegelschnitt ein Kreis sei, müssen die Coefficienten der Grössen x^2 und y^2 einander gleich und der Coefficient von $x.y$ gleich Null sein, weshalb man die Gleichungen erhält:

$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3(x_2x_3 - y_2y_3) + \lambda_2\varrho_1\varrho_3(x_1x_3 - y_1y_3) + \lambda_3\varrho_1\varrho_2(x_1x_2 - y_1y_2) = 0$$
$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3(x_2y_3 + y_2x_3) + \lambda_2\varrho_1\varrho_3(x_1y_3 + x_3y_1) + \lambda_3\varrho_1\varrho_2(x_1y_2 + x_2y_1) = 0$$

woraus sich ergibt:

$$\lambda_1\varrho_2\varrho_3 = k.\begin{vmatrix} x_1x_3 - y_1y_3, & x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_3 + x_3y_1, & x_1y_2 + x_2y_1 \end{vmatrix}$$

Entwickelt und vereinfacht man diese Determinante und verfährt ebenso für die Grössen λ_2 und λ_3, so folgt:

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = \varrho_1^2:\varrho_2^2:\varrho_3^2$$

Somit hat man nach (11):

$$\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = \mu(\varrho_1^2-\varrho_2^2-\varrho_3^2) = \frac{2\mu\,\varrho_2\varrho_3\Sigma_{23}}{r^2}$$

$$-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = \mu(-\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2) = \frac{2\mu\,\varrho_1\varrho_3\Sigma_{13}}{r^2}$$

$$-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 = \mu(-\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2) = \frac{2\mu\,\varrho_1\varrho_2\Sigma_{12}}{r^2}$$

Es wird also die Gleichung des Neunpunktkreises:

$$A^2\varrho_1\Sigma_{23}+B^2\varrho_2\Sigma_{13}+C^2\varrho_3\Sigma_{12}+BC\varrho_1r^2+AC\varrho_2r^2+AB\varrho_3r^2=0 \quad . (43)$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell nach x und y, so erhält man die Gleichungen:

$$A(2x_1\varrho_1\Sigma_{23}+x_3\varrho_2r^2+x_2\varrho_3r^2)+B(2x_2\varrho_2\Sigma_{13}+x_3\varrho_1r^2+x_1\varrho_3r^2)$$
$$+C(2x_3\varrho_3\Sigma_{12}+x_1\varrho_2r^2+x_2\varrho_1r^2)=0$$

$$A(2y_1\varrho_1\Sigma_{23}+y_3\varrho_2r^2+y_2\varrho_3r^2)+B(2y_2\varrho_2\Sigma_{13}+y_3\varrho_1r^2+y_1\varrho_3r^2)$$
$$+C(2y_3\varrho_3\Sigma_{12}+y_1\varrho_2r^2+y_2\varrho_1r^2)=0$$

aus denen die Coordinaten des Neunpunktkreiscentrums N sich ergeben.

Schreibt man obige Gleichungen der Kürze halber:

$$A\alpha_0+B\beta_0+C\gamma_0=0$$
$$A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1=0$$

so hat man:

$$A_N:B_N:C_N = (\beta_0\gamma_1-\beta_1\gamma_0):(\gamma_0\alpha_1-\gamma_1\alpha_0):(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)$$

Nun ist aber:

$$\alpha_0 = 2x_1\varrho_1\Sigma_{23}+x_3\varrho_2(x_2^2+y_2^2)+x_2\varrho_3(x_3^2+y_3^2)$$
$$\alpha_0 = 2x_1\varrho_1\Sigma_{23}+x_2x_3(x_2\varrho_2+x_3\varrho_3)+x_3\varrho_2y_2^2+x_2\varrho_3y_3^2$$
$$\alpha_0 = 2x_1\varrho_1\Sigma_{23}-x_1x_2x_3\varrho_1+x_3y_2(-y_1\varrho_1-y_3\varrho_3)+x_2\varrho_3y_3^2$$
$$\alpha_0 = 2x_1\varrho_1\Sigma_{23}-x_1x_2x_3\varrho_1-x_3y_1y_2\varrho_1+y_3\varrho_3(x_2y_3-x_3y_2)$$
$$\alpha_0 = \varrho_1(2x_1\Sigma_{23}-x_1x_2x_3-x_3y_1y_2+x_1y_2y_3-x_2y_1y_3)$$
$$\alpha_0 = \varrho_1(x_1\Sigma_{23}-y_2\varrho_2+y_3\varrho_3)$$

ebenso:

$$\beta_0 = \varrho_2(x_2\Sigma_{13} - y_3\varrho_3 + y_1\varrho_1)$$
$$\gamma_0 = \varrho_3(x_3\Sigma_{12} - y_1\varrho_1 + y_2\varrho_2)$$

Die Grössen α_1, β_1, γ_1 erhält man aus den Grössen α_0, β_0, γ_0 mit Ausserachtlassung des Vorzeichens durch Vertauschung der Grössen x und y, da aber hiebei die Ausdrücke ϱ_1, ϱ_3, ϱ_3 ihr Vorzeichen ändern, so hat man:

$$\alpha_1 = \varrho_1(y_1\Sigma_{23} + x_2\varrho_2 - x_3\varrho_3)$$
$$\beta_1 = \varrho_2(y_2\Sigma_{13} + x_3\varrho_3 - x_1\varrho_1)$$
$$\gamma_1 = \varrho_3(y_3\Sigma_{12} + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2)$$

Durch zweckmässige Umformung erhält man nun:

$$A_N : B_N : C_N = (\varrho_3\varrho_2 + \Sigma_{12}\Sigma_{13}) : (\varrho_1\varrho_3 + \Sigma_{12}\Sigma_{23}) : (\varrho_1\varrho_2 + \Sigma_{13}\Sigma_{23}) \quad . \ (44)$$

Nun hat man nach Früheren (über Pol und Polare des Dreiecks) für den Höhenschnittpunkt H des Urdreiecks:

$$A_H : B_H : C_H = \frac{1}{\Sigma_{23}} : \frac{1}{\Sigma_{13}} : \frac{1}{\Sigma_{12}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (45)$$

und für den Umkreismittelpunkt M desselben Dreiecks

$$A_U : B_U : C_U = \Sigma_{23} : \Sigma_{13} : \Sigma_{12} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (46)$$

Bildet man nun die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_N, & B_N, & C_N \\ A_H, & B_H, & C_H \\ A_S, & B_S, & C_S \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} \varrho_2\varrho_3 + \Sigma_{12}\Sigma_{13}, & \varrho_1\varrho_3 + \Sigma_{12}\Sigma_{23}, & \varrho_1\varrho_2 + \Sigma_{13}\Sigma_{23} \\ \Sigma_{12}\Sigma_{13}, & \Sigma_{12}\Sigma_{23}, & \Sigma_{13}\Sigma_{23} \\ \varrho_2\varrho_3, & \varrho_1\varrho_3 & \varrho_1\varrho_2 \end{vmatrix}$$

so ist ersichtlich, dass $\varDelta \equiv 0$ ist, woraus hervorgeht, dass die Punkte N, H und S einer Geraden angehören.

Früher wurde bewiesen, dass auch die Punkte M, S und H auf einer und derselben Geraden liegen und:

$$\frac{MS}{SH} = \tfrac{1}{2}$$

Da aber das Neunpunktkreiscentrum und Umkreiscentrum homologe Punkte der ähnlichen Dreiecke ABC und $A'''B'''C'''$ sind, deren Aehnlichkeitspunkt S ist, so ist auch:

$$\frac{SN}{MS} = \tfrac{1}{2}$$

Es ergibt sich somit:

Die Punkte M, S, N und H liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . (47)

Ferner folgt:

Der Schwerpunkt und der Höhenschnittspunkt des Urdreiecks, sind Aehnlichkeitspunkte des Umkreises und Nennpunktkreises . (48)

Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes a' mit dem Berührungspunkte 1 der Seite A und des Inkreises, hat die Gleichung:

$$B' + kC' = 0$$

oder:

$$A + C + k(A + B) = 0$$

oder:

$$A_1 + C_1 + k(A_1 + B_1) = 0$$

weshalb:

$$k = -\frac{C_1}{B_1} = -\frac{T_{13}}{T_{12}}$$

Man hat somit für diese Gerade die Gleichung:

$$\frac{B'}{T_{13}} - \frac{C'}{T_{12}} = 0$$

und ebenso für die Verbindungslinien der Mittelpunkte b' und c' mit den Berührungspunkten 2 und 3:

$$\frac{C'}{T_{12}} - \frac{A'}{T_{23}} = 0$$

$$\frac{A'}{T_{23}} - \frac{B'}{T_{13}} = 0$$

woraus hervorgeht:

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der dem Urdreieck anbeschriebenen Kreise mit den Berührungspunkten des Inkreises und der von jenen Kreisen direct berührten Dreiecksseiten, schneiden sich in einem und demselben Punkte D . . . . (49)

Für dessen Coordinaten ergibt sich:

$$A_D' = \lambda T_{23}, \quad B_D' = \lambda T_{13}, \quad C_D' = \lambda T_{12}$$

oder:

$$B_D + C_D = \lambda T_{23}, \quad A_D + C_D = \lambda T_{13}, \quad A_D + B_D = \lambda T_{12}$$

$$A_D : B_D : C_D = (-T_{23} + T_{31} + T_{12}) : (T_{23} - T_{31} + T_{12}) : (T_{23} + T_{31} - T_{12})$$

da nun:

$$T_{23} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_1}{\varrho_2 \varrho_3}, \quad T_{31} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_2}{\varrho_1 \varrho_3}, \quad T_{12} = -\frac{r^2 \sigma_0 \sigma_3}{\varrho_1 \varrho_2}$$

so hat man:

$$A_D : B_D : C_D = \frac{1}{\sigma_1} : \frac{1}{\sigma_2} : \frac{1}{\sigma_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (50)$$

Die Verbindungslinie der Ecke a'' des Dreiecks $A''B''C''$ mit dem auf der Seite A liegenden Berührpunkte 1 des Inkreises hat die Gleichung:

$$B'' + kC'' = 0$$

oder:

$$(\varrho_1\sigma_3 A + \varrho_2\sigma_0 B + \varrho_3\sigma_1 C) + k(\varrho_1\sigma_2 A + \varrho_2\sigma_1 B + \varrho_3\sigma_0 C) = 0$$

Nun ist aber:

$$(\varrho_1\sigma_3 A_1 + \varrho_2\sigma_0 B_1 + \varrho_3\sigma_1 C_1) + k(\varrho_1\sigma_2 A_1 + \varrho_2\sigma_1 B_1 + \varrho_3\sigma_0 C_1) \equiv 0$$

woraus folgt, da wieder $B_1 = T_{12}$, $C_1 = T_{13}$ und $A_1 = 0$ ist:

$$k = -\frac{\sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_0\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3} = -\frac{4\varrho_1\varrho_2}{4\varrho_1\varrho_3} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$$

Also geht obige Gleichung über in:

$$\frac{B''}{\varrho_2} - \frac{C''}{\varrho_3} = 0$$

Ebenso folgt für die Gleichungen der Verbindenden der Ecken b'' und c'' mit den Berührungspunkten 2 und 3:

$$\frac{C''}{\varrho_3} - \frac{A''}{\varrho_1} = 0$$

$$\frac{A''}{\varrho_1} - \frac{B''}{\varrho_2} = 0$$

Es ergibt sich also der Satz:

Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks $A''B''C''$ mit den entsprechenden Berührungspunkten des Inkreises und den Seiten des Urdreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte K . (51)

Die Gleichungen jener Verbindungslinien sind aber:

$$\varrho_1\sigma_1 A(\varrho_2 - \varrho_3) + \varrho_2\sigma_2 B(\varrho_2 + \varrho_3) - \varrho_3\sigma_3 C(\varrho_2 + \varrho_3) = 0$$
$$-\varrho_1\sigma_1 A(\varrho_3 + \varrho_1) + \varrho_2\sigma_2 B(\varrho_3 - \varrho_1) + \varrho_3\sigma_3 C(\varrho_3 + \varrho_1) = 0$$
$$\varrho_1\sigma_1 A(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_2\sigma_2 B(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_3\sigma_3 C(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$$

Hieraus folgt für die Coordinaten des Punktes K:

$$A_k : B_k : C_k = \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_1\sigma_1} : \frac{\varrho_1 + \varrho_3}{\varrho_2\sigma_2} : \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_3\sigma_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (52)$$

Da nach Früheren die Punkte U, J und S einer Geraden angehören, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1}, & \frac{\varrho_1+\varrho_3}{\varrho_2}, & \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\varrho_3} \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Dividirt man nun die Elemente der ersten Verticalreihe mit σ_1, die der zweiten mit σ_2 und die der dritten mit σ_3, so folgt:

$$\begin{vmatrix} A_k, & B_k, & C_k \\ A_D, & B_D, & C_D \\ A_L, & B_L, & C_L \end{vmatrix} \equiv 0$$

d. h. Die Punkte $\bar{k}$, D und L liegen auf einer und derselben Geraden.

Weil aber auch die Punkte J, S, T einer Geraden angehören, so hat man:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ \frac{\sigma_1}{\varrho_1}, & \frac{\sigma_2}{\varrho_2}, & \frac{\sigma_3}{\varrho_3} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Diese Determinante geht aber, indem man mit σ_1, σ_2, σ_3, die Elemente der ersten, zweiten und dritten Verticalreihe dividirt über in:

$$\begin{vmatrix} A_D, & B_D, & C_D \\ A_L, & B_L, & C_L \\ A_S, & B_S, & C_S \end{vmatrix} \equiv 0$$

d. h. Die Punkte D, L und S gehören ebenfalls einer und derselben Geraden an:

Betrachtet man nun die Punkte D und k als das Punktepaar 0,1, L und S als das Punktepaar 2,3, so hat man nach (28):

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1}, & \frac{1}{\sigma_2} \\ \frac{1}{\sigma_1\varrho_1}, & \frac{1}{\sigma_2\varrho_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\sigma_1\varrho_1}, & \frac{\varrho_1+\varrho_3}{\sigma_2\varrho_2} \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1}, & \frac{1}{\sigma_2} \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\varrho_1+\varrho_3}{\sigma_1\varrho_1}, & \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\sigma_2\varrho_2} \\ \frac{1}{\sigma_1\varrho_1}, & \frac{1}{\sigma_2\varrho_2} \end{vmatrix}$$

$$\varrho_1^2\varrho_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \varrho_2, & \varrho_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \\ \sigma_1, & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varrho_1, & \varrho_2 \\ \sigma_1, & \sigma_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \varrho_2+\varrho_3, & \varrho_1+\varrho_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\varrho_1^2\varrho_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2\Delta}{\varrho_1-\varrho_2} \doteq 0 \quad \text{oder:} \quad \Delta \equiv 0$$

Hieraus folgt:

Die Punkte D, K, L und S liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . (53)

Da alle Kreise durch die unendlich fernen Kreispunkte hindurchgehen, deren Verbindungslinie nach Früheren die Gleichung

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

besitzt; so kann man, wenn $K' = 0$ und $K'' = 0$ die Gleichungen zweier Kreise vorstellen, stets setzen:

$$K' - \mu K'' = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3).(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

worin alsdann:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

die Gleichung der Potenzglieder beider Kreise bedeuten muss.

Zur Bestimmung der Grössen α, β, γ und μ erhielte man nun allerdings sechs Gleichungen; wovon aber zwei nur die schon vorausgesetzte Bedingung enthalten, dass $K' = 0$ und $K'' = 0$ Kreisgleichungen sind, so dass also in Wirklichkeit die zu suchenden Grössen unzweideutig bestimmt werden können.

Nun ist nach (33) die Gleichung des Inkreises:

$$K_J = A^2\varrho_1^2\sigma_1^2 + B^2\varrho_2^2\sigma_2^2 + C^2\varrho_3^2\sigma_3^2 - 2AB\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2 - 2AC\varrho_1\varrho_3\sigma_1\sigma_3 - 2BC\varrho_2\varrho_3\sigma_2\sigma_3 = 0$$

und nach Früheren die Gleichung des Umkreises:

$$K_M = AB\varrho_3 + AC\varrho_2 + BC\varrho_1 = 0$$

Setzt man nun:

$$K_M + \mu K_J = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3)(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

so hat man durch Gleichsetzung der Coefficienten von A^2, B^2 und C^2

$$\varrho_1\alpha = \mu\varrho_1^2\sigma_1, \quad \varrho_2\beta = \varrho_2^2\sigma_2^2 \quad \varrho_3\gamma = \mu\varrho_3^2\sigma_3^2$$

Es ist also:

$$A\varrho_1\sigma_1^2 + B\varrho_2\sigma_2^2 + C\varrho_3\sigma_3^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

die Gleichung der Potenzlinie für den Umkreis und Inkreis des Urdreiecks.

Die Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise hat bekanntlich die Gleichung:

$$A + B + C = 0$$

und es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Gerade, die unendlich ferne Gerade und die Potenzlinie des Umkreises und Inkreises sich in einem und demselben Punkte schneiden; denn die Determinante:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varrho_1\sigma_1^2, & \varrho_2\sigma_2^2, & \varrho_3\sigma_3^2 \\ 1, & 1, & 1 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = \mu . \begin{vmatrix} \sigma_1^2, & \sigma_2^2, & \sigma_3^2 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

geht durch Addition der $-\sigma_0^2$fachen Elemente der letzten Horizontalreihe zu denen der ersten Reihe über in:

$$\varDelta = k . \begin{vmatrix} \varrho_2\varrho_3, & \varrho_1\varrho_3, & \varrho_1\varrho_2 \\ \frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1, & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

folglich:

$$\varDelta \equiv 0$$

d. h. Die Potenzlinie des Um- und Inkreises ist parallel mit der Linie der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise . . . . (55)

Bestimmt man auf ähnliche Weise die Gleichung der Potenzlinie für den Umkreis und für einen der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise, indem man setzt:

$$K_M + \lambda K_1 = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3).(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) für:

$$\alpha = \lambda\varrho_1\sigma_0^2$$
$$\beta = \lambda\varrho_2\sigma_3^2$$
$$\gamma = \lambda\varrho_3\sigma_2^2$$

und somit für die Gleichung jener Potenzlinie:

$$P' = A\varrho_1\sigma_0^2 + B\varrho_2\sigma_3^2 + C\varrho_3\sigma_2^2 = 0$$

Ebenso hat man für die Potenzlinien der Kreise K_M und K_2, K_M und K_3 die Gleichungen:

$$P'' = A\varrho_1\sigma_3^2 + B\varrho_2\sigma_0^2 + C\varrho_3\sigma_1^2 = 0$$
$$P''' = A\varrho_1\sigma_2^2 + B\varrho_2\sigma_1^2 + C\varrho_3\sigma_0^2 = 0$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Gerade P', die unendlich ferne Gerade und die Verbindungslinie der auf den Dreiecksseiten B und C liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Denn, da die Gleichung der letzteren Geraden:

$$-A + B + C = 0$$

ist, und die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varrho_1\sigma_0^2, & \varrho_2\sigma_3^2, & \varrho_3\sigma_2^2 \\ -1, & 1, & 1 \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} \sigma_0^2, & \sigma_3^2, & \sigma_2^2 \\ -\frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

durch Subtraction der σ_0^2fachen Elemente der letzten Horizontalreihe von denen der ersten Reihe übergeht in

$$\varDelta = k'.\begin{vmatrix} 0, & (\varrho_1+\varrho_2)\varrho_3, & (\varrho_1+\varrho_3)\varrho_2 \\ -\frac{1}{\varrho_1}, & \frac{1}{\varrho_2}, & \frac{1}{\varrho_3} \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

so ergibt sich leicht, dass:

$$\varDelta \equiv 0$$

Es ist somit die Potenzlinie P' parallel mit der Verbindungslinie der auf den Seiten B und C liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden.

Oder: Die Potenzlinien für den Umkreis und je einen der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise bilden ein Dreieck, das ähnlich und ähnlichliegend ist mit dem Dreiecke, welches von den Schnittpunkten der Innenwinkelhalbirenden und Dreiecksseiten gebildet wird. . . . . (56)

Da aber die Potenzlinie zweier Kreise auf ihrer Centrale senkrecht steht, so ergibt sich zugleich der Satz:

Errichtet man von den Mittelpunkten der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise Senkrechte auf die entsprechenden Verbindungslinien der auf den Dreiecksseiten liegenden Schnittpunkte der Innenwinkelhalbirenden, so treffen sich dieselben in einem und demselben Punkte, dem Mittelpunkte des Umkreises. . . . . (57)

Die Gleichung des Neunpunktkreises ist:

$$K_N = A^2\varrho_1\Sigma_{23} + B^2\varrho_2\Sigma_{13} + C^2\varrho_3\Sigma_{12} + BC\varrho_1 r^2 + AC\varrho_2 r^2 + AB\varrho_3 r^2 = 0$$

Setzt man nun:

$$K_M + \lambda K_N = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3).(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha = \lambda\Sigma_{23}, \quad \beta = \lambda\Sigma_{13}, \quad \gamma = \lambda\Sigma_{12}$$

so hat man für die Gleichung der Potenzlinie dieser beiden Kreise:

$$A\Sigma_{23} + B\Sigma_{13} + C\Sigma_{12} = 0$$

d. h. Die Potenzlinie des Umkreises und Neunpunktkreises ist die Höhenschnittspolare des Urdreiecks und steht somit senkrecht auf der Centrale beider Kreise. . . . . (58)

Setzt man nun:

$$K_J + \lambda K_N = (A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3).(A\alpha + B\beta + C\gamma)$$

woraus:

$$\alpha = \sigma_1{}^2\varrho_1 + \lambda\Sigma_{23}$$
$$\beta = \sigma_2{}^2\varrho_2 + \lambda\Sigma_{13}$$
$$\gamma = \sigma_3{}^2\varrho_3 + \lambda\Sigma_{12}$$

so folgt:

$$\lambda\varrho_3 r^2 = \varrho_1\beta + \varrho_2\alpha + 2\varrho_1\varrho_2\sigma_1\sigma_2$$

$$\lambda = \frac{2\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{r^2}$$

und somit:

$$\alpha:\beta:\gamma = \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} : \frac{\varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_1} : \frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

so dass also die Gleichung der Potenzlinie für den Inkreis und Neunpunktkreis wird:

$$T = A\frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} + B\frac{\varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_1} + C\frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_2} = 0 \quad . \; . \; . \; (59)$$

Verschafft man sich nun zur Geraden T den Inkreispol o, indem man die Grössen A_0, B_0, C_0 so bestimmt, dass die Gleichung

$$A\varrho_1\sigma_1(-A_0\varrho_1\sigma_1 + B_0\varrho_2\sigma_2 + C_0\varrho_3\sigma_3) + B\varrho_2\sigma_2(A_0\varrho_1\sigma_1 - B_0\varrho_2\sigma_2 + C_0\varrho_3\sigma_3)$$
$$+ C\varrho_3\sigma_3(A_0\varrho_1\sigma_1 + B_0\varrho_2\sigma_2 - C_0\varrho_3\sigma_3) = 0$$

der Inkreispolaren des Punktes o, zusammenfällt mit der Gleichung der Geraden T, so dass also:

$$-A_0\varrho_1\sigma_1 + B_0\sigma_2\varrho_2 + C_0\sigma_3\varrho_3 = \frac{k}{\sigma_1(\varrho_2 - \varrho_3)}$$

$$A_0\varrho_1\sigma_1 - B_0\varrho_2\sigma_2 + C_0\varrho_3\sigma_3 = \frac{k}{\sigma_2(\varrho_3 - \varrho_1)}$$

$$A_0\varrho_1\sigma_1 + B_0\varrho_2\sigma_2 - C_0\varrho_3\sigma_3 = \frac{k}{\sigma_3(\varrho_1 - \varrho_2)}$$

so erhält man für die Coordinaten des Punktes o die Beziehung:

$$A_0 : B_0 : C_0 = (\varrho_2 - \varrho_3)^2 \frac{\sigma_1}{\varrho_1} : (\varrho_3 - \varrho_1)^2 \frac{\sigma_2}{\varrho_2} : (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \frac{\sigma_3}{\varrho_3}$$

Würde man diese Coordinaten in die Gleichung der Geraden T einsetzen, so erhielte man nach Unterdrückung eines constanten Factors den Ausdruck:

$$\sigma_1(\varrho_2 - \varrho_3) + \sigma_2(\varrho_3 - \varrho_1) + \sigma_3(\varrho_1 - \varrho_2)$$

Da derselbe aber identisch gleich Null ist, so folgt, dass der Punkt o der Geraden T selbst angehört und diese somit Tangente des Inkreises ist. Es ergibt sich also der Satz:

Der Inkreis und Neunpunktkreis berühren sich, und ihre gemeinschaftliche Tangente hat die Gleichung: $T = 0$. . . . . (60)

Nun zeigt sich aber, wenn man die Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren des Punktes L durch Auflösung der Gleichungen:

$$A\varrho_1\sigma_1 + B\varrho_2\sigma_2 + C\varrho_3\sigma_3 = 0$$

$$A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 = 0$$

bestimmt, woraus

$$A : B : C = \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{\varrho_1} : \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_2} : \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (60a)$$

folgt, dass die Dreieckspolare dieses Punktes die Gleichung:

$T = 0$ hat.

d. h. Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises ist die Dreieckspolare des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren von L. (61)

Nach den Sätzen über Pol und Polare des Dreiecks folgt zugleich noch:

Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises ist auch Tangente desjenigen Kegelschnittes $\Phi(s)$, der die Dreiecksseiten in ihren Mitten berührt und den Schwerpunkt S des Urdreiecks zum Mittelpunkte hat. . . . . (62)

Durchschneidet man die Seiten eines Dreiecks mit irgend einer Geraden in den Punkten α, β, γ, so liegen die Mitten der Verbindungslinien $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ auf einer und derselben Geraden, die man die Gauss'sche Gerade nennen kann.

Fasst man die schneidende Gerade als Dreieckspolare eines Punktes 0 auf, so hat sie die Gleichung:

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0 = 0$$

Für die Linie $a\alpha$ hat man somit die identischen Gleichungen:

$$B + \lambda C \equiv kA + \mu(AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0) = 0$$

folglich:

$$1 = \mu A_0C_0, \quad \lambda = \mu A_0B_0, \quad 0 = k + \mu B_0C_0$$

$$\lambda = \frac{B_0}{C_0}$$

und somit ist die Gleichung von $a\alpha$:

$$BC_0 + CB_0 = 0$$

Denkt man sich durch den Eckpunkt c des Urdreiecks eine Parallele zu $a\alpha$ und hierzu bezüglich der in c zusammenstossenden Dreiecksseiten die vierte harmonische Gerade gezogen, so schneidet letztere die Verbindungslinie $a\alpha$ in deren Mitte.

Die durch die Ecke c gehende Gerade hat aber zunächst die Gleichung:

$$A + \nu B = 0$$

und da sie parallel zu $a\alpha$ sein soll:

$$\frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2} = \frac{x_2C_0 + x_3B_0}{y_2C_0 + y_3B_0}$$

folglich:

$$\nu = \frac{\varrho_2B_0 - \varrho_3C_0}{\varrho_1B_0}$$

Die durch die Mitte von $a\alpha$ und Ecke c gehende Gerade hat somit die Gleichung:

$$A - \nu B = 0$$

oder:

$$A\varrho_1B_0 + B(\varrho_3C_0 - \varrho_2B_0) = 0$$

Die Verbindungslinie $b\beta$ hat die Gleichung:

$$AC_0 + CA_0 = 0$$

Zieht man nun durch die Ecke a eine Gerade parallel zu $b\beta$ und hierzu bezüglich der in a zusammenstossenden Dreiecksseiten die

vierte harmonische Gerade, so geht letztere ebenfalls durch die Mitte von $b\beta$.

Die durch die Ecke a gehende Gerade hat aber zunächst die Gleichung

$$B + \varepsilon C = 0$$

und damit sie parallel mit $b\beta$ sei, muss:

$$\frac{x_2 + \varepsilon x_3}{y_2 + \varepsilon y_3} = \frac{x_1 C_0 + x_3 A_0}{y_1 C_0 + y_3 A_0}$$

folglich:

$$\varepsilon = \frac{\varrho_3 C_0 - \varrho_1 A_0}{\varrho_2 C_0}$$

Die durch die Mitte von $b\beta$ gehende Gerade hat also die Gleichung:

$$B - \varepsilon C = 0$$

oder:

$$B\varrho_2 C_0 + C(\varrho_1 A_0 - \varrho_3 C_0) = 0$$

Demnach hat man für die Gauss'sche Gerade die Gleichungen:

$$A\varrho_1 B_0 + B(\varrho_3 C_0 - \varrho_2 B_0) + \lambda(BC_0 + CB_0) \equiv \mu(B\varrho_2 C_0 + C(\varrho_1 A_0 - \varrho_3 C_0)) + k(AC_0 + CA_0) = 0$$

Es bestehen also die Beziehungen:

$$\varrho_1 B_0 = kC_0$$
$$\varrho_3 C_0 - \varrho_2 B_0 + \lambda C_0 = \mu\varrho_2 C_0$$
$$\lambda B_0 = \mu(\varrho_1 A_0 - \varrho_3 C_0) + kA_0$$

woraus für λ folgt:

$$\lambda = \varrho_3 \frac{\varrho_1 A_0 + \varrho_2 B_0 - \varrho_3 C_0}{-\varrho_1 A_0 + \varrho_2 B_0 + \varrho_3 C_0}$$

Setzt man diesen Wert für λ in obige Gleichung ein, so erhält man für die Gauss'sche Gerade die Gleichung:

$$A\varrho_1(-\varrho_1 A_0 + \varrho_2 B_0 + \varrho_3 C_0) + B\varrho_2(\varrho_1 A_0 - \varrho_2 B_0 + \varrho_3 C_0) + C\varrho_3(\varrho_1 A_0 + \varrho_2 B_0 - \varrho_3 C_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade kann man nun ebenso gut dem Punkte 0, als wie dessen Dreieckspolare $P(0)$ entsprechen lassen.

Die Gleichung desjenigen Kegelschnittes $\Phi(S)$, der die Seiten des Urdreiecks in ihren Mitten berührt und den Schwerpunkt S desselben zum Mittelpunkte hat, hat bekanntlich die Gleichung:

$$\Phi(S) = A^2\varrho_1^2 + B^2\varrho_2^2 + C^2\varrho_3^2 - 2AB\varrho_1\varrho_2 - 2AC\varrho_1\varrho_3 - 2BC\varrho_2\varrho_3 = 0$$

Die Polare dieses Kegelschnittes für irgend einen Punkt 0 hat nun die Gleichung:

$$x\tfrac{1}{2}\Phi'(S)_{x_0}+y\tfrac{1}{2}\Phi'(S)_{y_0}+z\tfrac{1}{2}\Phi'(S)_{z_0}=0$$

oder:

$$A\varrho_1(-\varrho_1A_0+\varrho_2B_0+\varrho_3C_0)+B\varrho_2(\varrho_1A_0-\varrho_2B_0+\varrho_3C_0)$$
$$+C\varrho_3(\varrho_1A_0+\varrho_2B_0-\varrho_3C_0)=0$$

Es ergibt sich demnach:

Die Gauss'sche Gerade irgend eines Punktes 0 fällt mit der Polaren dieses Punktes bezüglich des Kegelschnittes $\Phi(S)$ zusammen. . . . . (64)

Mit Hülfe der Sätze über Pol und Polare des Dreiecks geht ferner hervor.

Für alle Gauss'schen Geraden, die durch den Schwerpunkt des Urdreiecks gehen, liegen die entsprechenden Punkte im Unendlichen und ihre entsprechenden Geraden sind Tangenten des Kegelschnittes $\Phi(S)$. Jedem Punkte des Kegelschnittes $\Phi(S)$ kommt als Gauss'sche Gerade dessen Tangente in jenem Punkte zu. Jeder Tangente des Kegelschnittes $\Phi(S)$ entspricht als Gauss'sche Gerade ein Durchmesser dieses Kegelschnittes. Dem Schwerpunkte S des Urdreiecks entspricht als Gauss'sche Gerade die unendlich ferne Gerade. . (65)

Hieraus gehen ferner die Sätze hervor:

Jede Tangente des Kegelschnittes $\Phi(S)$ bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten mit dem Schwerpunkte des Urdreiecks auf einer und derselben Geraden liegen.

Die Dreieckspolare irgend eines Punktes 0 bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten auf der Polare dieses Punktes bezüglich des Kegelschnittes $\Phi(S)$ liegen. . . . . (66)

Die Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Dreieckspolaren von L sind nach (60a) bestimmt durch das Verhältniss:

$$A:B:C=\frac{\varrho_2-\varrho_3}{\varrho_1}:\frac{\varrho_3-\varrho_1}{\varrho_2}:\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3}$$

Die diesem Punkte entsprechende Gauss'sche Gerade hat also die Gleichung:

$$A\varrho_1(\varrho_2-\varrho_3)+B\varrho_2(\varrho_3-\varrho_1)+C\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2)=0$$

Nun ist aber die Gleichung der Verbindungslinie des Schwerpunktes und des Inkreiscentrums:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \varrho_2\varrho_3, & \varrho_1\varrho_3, & \varrho_1\varrho_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}=0$$

oder:

$$A\varrho_1(\varrho_2-\varrho_3)+B\varrho_2(\varrho_3-\varrho_1)+C\varrho_3(\varrho_1-\varrho_2)=0$$

Unter Berücksichtigung von (61) ergibt sich somit:

Die gemeinschaftliche Tangente des Inkreises und Neunpunktkreises bildet mit dem Urdreiecke ein Vierseit, dessen Diagonalmitten auf der Linie der Punkte J, S, U, F liegen. . . . . . . (67)

Die dem Inkreiscentrum entsprechende Gauss'sche Gerade hat die Gleichung:

$$A\varrho_1\sigma_1+B\varrho_2\sigma_2+C\varrho_3\sigma_3=0$$

Nach (31) und (64) ergibt sich also:

Die Polare des Inkreiscentrums bezüglich des Kegelschnittes $\Phi(S)$ fällt zusammen mit der Dreieckspolare des Punktes L. . . . . (68)

Da ferner die Dreieckspolare des Inkreiscentrums die Gerade der äusseren Aehnlichkeitspunkte der dem Urdreiecke anbeschriebenen Kreise ist, so folgt ferner der Satz:

Verlängert man die Aussenwinkelhalbirenden des Urdreiecks bis zu den Schnittpunkten mit den Gegenseiten, so liegen die Mitten der Strecken, die zwischen jenen Schnittpunkten und den Gegenecken des Dreiecks liegen, auf der Dreieckspolare des Punktes L. . . . . (69)

Dem Grebe'schen Punkte entspricht als Gauss'sche Gerade eine Linie, deren Gleichung ist:

$$A\varrho_1(-\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2)+B\varrho_2(\varrho_1^2-\varrho_2^2+\varrho_3^2)+C\varrho_3(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_3^2)=0$$

oder:

$$A\Sigma_{23}+B\Sigma_{13}+C\Sigma_{12}=0$$

d. h. Die Gauss'sche Gerade des Grebe'schen Punktes fällt zusammen mit der Höhenschnittspolare. . . . . (70)

Die Polare des Grebe'schen Punktes bezüglich des Kegelschnittes $\Phi(S)$ ist die Höhenschnittspolare. . . . . (71)

Ferner folgt aus den Eigenschaften des Grebe'schen Punktes:

Verlängert man die in den Eckpunkten des Urdreiecks an den Umkreis gezogenen Tangenten bis zu den Schnittpunkten mit den Gegenseiten des Dreiecks, so liegen die Mitten der Strecken dieser Tangenten, die zwischen jenen Schnittpunkten und den Ecken des Dreiecks liegen, auf der Höhenschnittspolare des Dreiecks. . . . (72)

Bezeichnet man mit m_1, m_2, m_3 (Fig. 4.) die Mitten dieser auf den Tangenten des Umkreises liegenden Strecken und beschreibt aus diesen Punkten m_1, m_2, m_3 Kreise, welche diese Strecken zu Durch-

messern haben, so besitzen diese drei Kreise eine und dieselbe gemeinschaftliche Sehne, da ihre Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind.

Diese gemeinschaftliche Sehne steht aber senkrecht auf der Geraden $m_1 m_2 m_3$, welche nach (72)′ die Höhenschnittspolare des Urdreiecks ist. Die Verbindungslinien des Umkreiscentrums mit den Ecken des Urdreiecks sind aber zugleich Tangenten der Kreise m_1, m_2, m_3, die alle von gleicher Länge, nämlich gleich dem Radius des Umkreises, sind. Da nun ferner die Verbindungslinie MN senkrecht auf der Höhenschnittspolare steht, so folgt nach (58) der Satz:

Die drei Kreise m_1, m_2, m_3, welche die Tangentenlängen zu Durchmessern haben, schneiden sowohl den Umkreis als auch Neunpunktkreis rechtwinklig, und haben alle drei zur gemeinschaftlichen Sehne die Linie der Punkte M, N, S, H und zum Potenzpunkte den Mittelpunkt des Umkreises. . . . . (73)

Sind die Coordinatenverhältnisse zweier Punkte die folgenden:

$$A_0 : B_0 : C_0 = \alpha : \beta : \gamma$$
$$A_1 : B_1 : C_1 = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}$$

so nennt man bekanntlich diese Punkte reciproke Punkte. Die Gleichungen der Verbindungslinien dieser Punkte mit der Ecke a des Urdreiecks sind aber:

$$B\gamma - C\beta = 0$$
$$B\beta - C\gamma = 0$$

oder in der Normalform:

$$\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{(x_2\gamma - x_3\beta)^2 + (y_2\gamma - y_3\beta)^2}} = 0$$

$$\frac{B\beta - C\gamma}{\sqrt{(x_2\beta - x_3\gamma)^2 + (y_2\beta - y_3\gamma)^2}} = 0$$

oder:

$$\frac{B\gamma - C\beta}{\sqrt{r^2(\beta^2 + \gamma^2) - 2\beta\gamma\Sigma_{23}}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{B\beta - C\gamma}{\sqrt{r^2(\beta^2 + \gamma^2) - 2\beta\gamma\Sigma_{23}}} = 0$$

Die Abstände des Inkreiscentrums, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ sind, von diesen beiden Ecktransversalen ergeben sich somit als gleich lang, und man hat demnach:

Die Verbindungslinien zweier reciproker Punkte mit den Ecken

des Urdreiecks schliessen mit den Winkelhalbirenden je zwei gleiche Winkel ein. . . . . (74)

Aus den bisher aufgestellten Coordinatenverhältnissen verschiedener merkwürdiger Punkte folgt nun, dass folgende Punkte reciprok sind:

Der Schwerpunkt und der Grebe'sche Punkt
Das Umkreiscentrum und der Höhenschnittspunkt
Der Punkt Q und D } . . (75)

Der Polkegelschnitt des Inkreiscentrums besitzt die Gleichung:

$$AB + AC + BC = 0$$

Derselbe hat die Aussenwinkelhalbirenden des Urdreiecks zu Tangenten, also die Innenwinkelhalbirenden zu Normalen; da aber die Brennstrahlen für die Ecken des Urdreiecks mit den Normalen gleiche Winkel bilden und diese das Inkreiscentrum enthalten, so folgt:

Die Brennpunkte des zum Inkreiscentrum gehörigen Polkegelschnittes sind reciproke Punkte. . . . . (76)

Regensburg im Februar 1877.

XVIII.

Fortrücken der Bahnscheitel eines Pendels von geringer Elongation. Mit Bezugnahme auf das Foucault'sche Pendel.

Von

R. Hoppe.

Die Richtung der Schwerkraft sei Axe der z, die Länge eines um einen Punkt frei beweglichen einfachen Pendels $= c$; dann sind die Gleichungen der lebendigen Kraft und der constanten Projection der Flächengeschwindigkeit:

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = 2g(z-h)$$

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t} = k$$

oder, wenn man

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

setzt:

$$\frac{c^2}{c^2-z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + (c^2-z^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 2g(z-h)$$

$$(c^2-z^2)\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k$$

Eliminirt man einzeln $\partial\varphi$ und ∂t, so erhält man:

$$\partial t = \frac{c\partial z}{\sqrt{2g(z-h)(c^2-z^2)-k^2}} \tag{2}$$

$$\partial \varphi = \frac{ck\partial z}{(c^2-z^2)\sqrt{2g(z-h)(c^2-z^2)-k^2}} \tag{3}$$

Seien α und β das Maximum und Minimum von z, entsprechend also dem tiefsten und höchsten Punkte, welchen das Pendel erreicht; dann verschwindet die Grösse unter der Wurzel für beide Werte, und man hat:

$$(z-h)(c^2-z^2)-\frac{k^2}{2g}=(\alpha-z)(z-\beta)(z+\gamma) \tag{4}$$

woraus für $z=\pm c$:

$$\frac{k^2}{2g}=(c-\alpha)(c-\beta)(c+\gamma)=(c+\alpha)(c+\beta)(\gamma-c) \tag{5}$$

mithin, wie aus letzterem Werte zu ersehen:

$$\gamma > c$$

Wir betrachten nun $c-\alpha$ und $c-\beta$ als unendlich klein 1. Ordnung. Zwischen beiden variirt $c-z$. Dann hat man:

$$\frac{c}{c^2-z^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c-z}+\frac{1}{c+z}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c-z}+\frac{1}{2c}+\varepsilon\right) \tag{6}$$

wo ε als unendlich klein neben endlichen und unendlich grossen Termen nicht in Rechnung kommen soll. Führt man in (3) die Werte (4) (6), für $\frac{k}{\sqrt{2g}}$ den ersten Wert (5) ein und setzt zur Abkürzung einstweilen

$$M=\sqrt{\frac{(c-\alpha)(c-\beta)}{(\alpha-z)(z-\beta)}} \tag{7}$$

so kommt:

$$\partial\varphi=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c-z}+\frac{1}{2c}+\varepsilon\right)M\partial z\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}} \tag{8}$$

Nun ist

$$\frac{1}{c-z}\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}}=\frac{1}{c-z}+\frac{1}{c-z}\left(\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{c-z}+\frac{1}{c-z}\,\frac{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}-1}{\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}}+1}$$

$$=\frac{1}{c-z}+\frac{1}{\gamma+z}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma+c}{\gamma+z}}+1}$$

$$=\frac{1}{c-z}+\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{\gamma+c}+\varepsilon'$$

wo der unendlich kleine Rest ε' durch Substitution von c für z im endlichen Terme entstanden ist. Jetzt geht Gl. (8) über in

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c-z} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{\gamma+c} + \frac{1}{2c} + \varepsilon_1\right) M\partial z$$

wo auch ε_1 unendlich klein. Verschwindet nun $c-\beta$, so verschwindet nach Gl. (5) auch $\gamma - c$, daher differirt $\frac{1}{\gamma+c}$ unendlich wenig von $\frac{1}{2c}$, und man erhält:

$$\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c-z} + \frac{3}{4c} + \varepsilon_2\right) M\partial z$$

Setzt man zur Integration

$$\sqrt{\frac{z-\beta}{\alpha-z}} = \operatorname{tg}\psi \tag{9}$$

so wird

$$\alpha - z = (\alpha-\beta)\cos^2\psi; \quad z-\beta = (\alpha-\beta)\sin^2\psi$$

$$c - z = (c-\beta)\cos^2\psi + (c-\alpha)\sin^2\psi \tag{10}$$

$$M\partial z = 2\partial\psi\sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)} \tag{11}$$

daher

$$\partial\varphi = \left\{\frac{\partial\psi}{(c-\beta)\cos^2\psi + (c-\alpha)\sin^2\psi} + \left(\frac{3}{4c} + \varepsilon_2\right)\partial\psi\right\}\sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)}$$

Dies integrirt giebt:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\psi\sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}}\right) + \left(\frac{3}{4c}\psi + \int\varepsilon_2\partial\psi\right)\sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)} \tag{12}$$

Mit Beschränkung auf den ersten Term hat man annähernd:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\psi\sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}} = \sqrt{\frac{c-\alpha}{c-\beta}}\sqrt{\frac{z-\beta}{\alpha-z}}$$

woraus:

$$z = \frac{\alpha(c-\beta)x^2 + \beta(c-\alpha)y^2}{(c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2}$$

$$c - z = \frac{(c-\alpha)(c-\beta)(x^2+y^2)}{(c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2}$$

oder, da $x^2 + y^2 = (c-z)(c+z)$ ist:

$$(c-\beta)x^2 + (c-\alpha)y^2 = (c-\alpha)(c-\beta)(c+z) \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{2c(c-\alpha)} + \frac{y^2}{2c(c-\beta)} = 1 - \frac{c-z}{2c} \tag{13}$$

Lässt man den unendlich kleinen letzten Term rechts weg, so ist die Bahn eine Ellipse, deren Halbaxen

$$a = \sqrt{2c(c-\beta)}; \quad b = \sqrt{2c(c-\alpha)} \tag{14}$$

sind, die grössere in der Richtung der y.

Nach Gl. (9), in welcher man beim Uebergang von einem Quadranten in den andern das Vorzeichen der Wurzel wechseln lassen muss, erreicht das Pendel zweimal die grösste Höhe ($z = \alpha$) und Tiefe ($z = \beta$), wenn ψ vier Quadranten durchläuft. Variirt φ durch 4 Quadranten, so trifft nach Gl. (1) das Pendel am Ende in dem Meridian ein, von dem es ausgegangen ist. Vernachlässigt man nun in Gl. (12) den zweiten Teil der Rechten, so vollenden φ und ψ ihre Quadranten gleichzeitig, die (nahezu elliptische) Bahn ist also unveränderlich. Bei Berücksichtigung des Restes, welcher genau periodisch in ψ ist, weil ε_2 allein von z abhängt, bleibt sich die Bahn, gerechnet von $\psi = 4k\mathrm{R}$ bis $4(k+1)\mathrm{R}$, noch immer congruent, rotirt aber mit unendlich kleiner Geschwindigkeit um die Verticale. Nach Vollendung der so begrenzten Bahn wird das horizontale Vorrücken derselben gemessen durch den Wert von $\varphi - \psi$ für $\psi = 4\mathrm{R}$, das ist mit Vernachlässigung von ε_2

$$\Phi - 4\mathrm{R} = \frac{3}{4c} 4\mathrm{R} \sqrt{(c-\alpha)(c-\beta)}$$

oder nach (14)

$$\Phi - 4\mathrm{R} = \frac{3}{4c^2} 2\mathrm{R}ab = \frac{3}{4c^3} E \tag{15}$$

wo E den Flächeninhalt der umlaufenen Ellipse ausdrückt.

Diese Grösse ist positiv, daher bewegen sich die Bahnscheitel im Sinne des Umlaufs. Sie ist ferner unabhängig von der Schwerkraft und von der Linieneinheit.

Ist die kleine Halbaxe b sehr klein gegen a, so gewährt das Pendel zufolge unseres Ergebnisses eine Erscheinung, die offenbar mit dem Einfluss der Rotation der Erde concurrirt. Letztere bewirkt bei einem in verticaler Ebene schwingenden Pendel eine Rotation der Ebene, die in 24 Stunden höchstens 4R beträgt. Nehmen wir dieses Maximum, das nur am Pole stattfindet, an, lassen das Pendel hin und zurück in 2 Secunden schwingen, setzen $a = \frac{c}{10}$, und fragen: Wie gross muss b sein, damit die Bahn ohne Erdrotation ebenso schnell rotirt? Gl. (15) ergiebt:

$$\frac{2.4\mathrm{R}}{24.60.60} = \frac{3}{4} 4\mathrm{R} \frac{1}{10} \frac{b}{c}$$

woraus:

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{3240}$$

Da ein solches Pendel nahezu 1 Meter lang ist, so brauchte es nur um $\frac{1}{3}$ Millimeter aus der Ebene abzuweichen, um die ganze Wirkung

der Erdrotation zu neutralisiren, bzhw. zu verdoppeln. Hieraus ist ersichtlich, dass der Foucault'sche Pendelversuch sich nicht mit rohen Mitteln anstellen lässt ohne beträchtlichen Täuschungen ausgesetzt zu sein, und dass bei Versuchen, welche die Rotationsgeschwindigkeit genauer constatiren sollen, die grösste Sorgfalt auf Herstellung ebener Bewegung verwandt werden muss.

Von der Formel (2) ist bis jetzt kein Gebrauch gemacht. Führt man den Wert (4) ein, so kommt, mit Anwendung von (7) (11)

$$\partial t = \frac{cM\partial z}{\sqrt{2g(c-\alpha)(c-\beta)(\gamma+z)}} = \frac{2c\,\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+z)}}$$

$$= \frac{2c\,\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+c)}}\left(1-\frac{c-z}{\gamma+c}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c\,\partial\psi}{\sqrt{2g(\gamma+c)}}\left(2+\frac{c-z}{\gamma+c}+\varepsilon_3\right)$$

oder, da

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma+c}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}\left(1+\frac{\gamma-c}{2c}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}\left(1-\frac{\gamma-c}{4c}+\varepsilon_4\right)$$

ist:

$$\partial t = \frac{\partial\psi}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\left(2-\frac{\gamma-c}{2c}+\frac{c-z}{2c}+\varepsilon_5\right)$$

wo die verschiedenen ε Unendlichkleine höherer Ordnung als der nächst vorhergehende Term sind. Nach (5) ist aber die Grösse

$$\gamma - c = (\gamma+c)\frac{c-\alpha}{c+\alpha}\,\frac{c-\beta}{c+\beta}$$

gleichfalls unendlich klein höherer Ordnung, verschmilzt also mit ε_5. Jetzt wird nach (10)

$$\partial t = \partial\psi\sqrt{\frac{c}{g}}\left\{1+\frac{(c-\beta)\cos^2\psi+(c-\alpha)\sin^2\psi}{4c}+\varepsilon_6\right\}$$

und nach (14)

$$\partial t = \partial\psi\sqrt{\frac{c}{g}}\left(1+\frac{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}{8c^2}+\varepsilon_6\right)$$

Integrirt man von $\psi = 0$ bis $\psi = 4\mathrm{R}$, so erhält man mit Vernachlässigung von ε_6:

$$T = 4\mathrm{R}\sqrt{\frac{c}{g}}\left(1+\frac{a^2+b^2}{16c^2}\right)$$

als Ausdruck der Dauer einer vollen Schwingung.

Zur Berechnung der Länge der Bahn hat man aus der Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\partial s = \partial t \sqrt{2g(z-h)}$$

und zwar ist, wie sich aus (4) für $s=0$ mit Anwendung von (5) ergiebt,

$$hc^2 = \alpha\beta\gamma - (c-\alpha)(c-\beta)(\gamma+c)$$

mithin c Hauptwert von h, und $z-h$ unendlich klein. Daher ist $\sqrt{z-h}$ keiner Reihenentwickelung mit steigender Ordnung der Unendlichkleinen und rationalen Termen fähig. Eine Behandlung des Integrals nach andrer Methode aber würde an dieser Stelle kein Interesse haben.

XIX.

Erste Sätze von den bestimmten Integralen unabhängig vom Differentialbegriff entwickelt.

Von

R. Hoppe.

Besonders in Hinsicht auf das Fourier'sche Theorem ist eine Grundlegung der Theorie der bestimmten Integrale unabhängig vom Differentialbegriff wichtig. Eine Bearbeitung der Principien in diesem Sinne hat J. Thomae in der Separatschrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" — geliefert. Motive denselben Gegenstand auf's neue zu behandeln sind mir die folgenden. Erstens führt seine Darstellung des Integrals als Grenzwert der Summé überflüssige Elemente in die Rechnung ein und ist daher nicht die einfachst mögliche. Zweitens wird mitten in der Reihe seiner Sätze der Differentialbegriff unnötigerweise zugezogen und verdunkelt den logischen Connex. Manche andre Abweichungen, die ich vornehme, sind secundärer Natur.

Gegenstand des Gegenwärtigen werden ausschliesslich einfache, reelle Integrale sein. Differentiale werden erst da eintreten, wo die Differentiation selbst in Frage steht, und bei der Frage der Convergenz.

§. 1. Interpolation loser Reihen. Einmalige Interpolation einer losen, d. h. nicht gesetzmässigen, Reihe reeller Grössen

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

wollen wir nennen die Einschaltung eines neuen Gliedes $> x_{k-1}$ und $< x_k$ zwischen 2 beliebige successive Glieder x_{k-1}, x_k. Unter Interpolation schlechthin verstehen wir dann eine bestimmte Succession mehrerer einmaligen Interpolationen nach beliebigen Gliedern.

Zur Bezeichnung ist es notwendig die Anzahl der Glieder anzugeben; wir schreiben darum die Reihe:

$$\overset{n}{x}_0 < \overset{n}{x}_1 < \dots \overset{n}{x}_n \tag{1}$$

denn nach einmaliger Interpolation wachsen die Ordnungszahlen des hintern Teils der Reihe, und man hat:

$$\overset{n+1}{x}_h = \overset{n}{x}_h \quad (h < k)$$
$$\overset{n+1}{x}_h = \overset{n}{x}_{h-1} \quad (h > k)$$

Eine leichte Betrachtung ergiebt, dass durch geeignete Interpolation, z. B. wenn man alle n Differenzen, dann alle $2n$, dann alle $4n$, etc. Differenzen der successiven Glieder durch die Einschaltungen nach gleichem Zahlenverhältniss teilt, unendlich klein gemacht werden können (was offenbar nicht bei jeder in's unendliche fortgesetzten Interpolation der Fall ist).

Das Anfangs- und Endglied der Reihe bleibt von aller Interpolation unberührt. Sei demnach bei Variation von n constant

$$\overset{n}{x}_0 = a; \quad \overset{n}{x}_n = b.$$

§. 2. Grenzwert der Summe von Producten der successiven Differenzen einer interpolirten Reihe multiplicirt mit den den Gliedern entsprechenden Werten einer Function. Die Reihe (1) werde in solcher Weise unendlichmal interpolirt, dass die Differenzen der successiven Glieder unendlich klein werden. Sei φx eine mit x beständig wachsende, eindeutige Function. Dann lässt sich beweisen, dass

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi \overset{n}{x}_k (\overset{n}{x}_k - \overset{n}{x}_{k-1}) \tag{2}$$

für $n = \infty$ einen Grenzwert hat, der von der möglichen Verschiedenheit der Interpolation unabhängig ist.

Betrachten wir neben obiger Summe auch die folgende

$$T_n = \sum_{k=1}^{k=n} \varphi \overset{n}{x}_{k-1} (\overset{n}{x}_k - \overset{n}{x}_{k-1})$$

und lassen, durch Einschaltnng vor $\overset{n}{x}_k$, n um 1 wachsen; dann bleiben alle Glieder beider Reihensummen unverändert bis auf eins, welches in 2 Glieder übergeht, und man erhält nach Subtraction:

$$S_{n+1}-S_n=\varphi\overset{n+1}{x}_k\,(\overset{n+1}{x}_k-\overset{n+1}{x}_{k-1})+\varphi\overset{n+1}{x}_{k+1}(\overset{n+1}{x}_{k+1}-\overset{n+1}{x}_k)$$
$$-\varphi\overset{n}{x}_k(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})$$

$$T_{n+1}-T_n=\varphi\overset{n+1}{x}_{k-1}(\overset{n+1}{x}_k-\overset{n+1}{x}_{k-1})+\varphi\overset{n+1}{x}_k\,(\overset{n+1}{x}_{k+1}-\overset{n+1}{x}_k)$$
$$-\varphi\overset{n}{x}_{k-1}(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})$$

oder, weil

$$\overset{n}{x}_k=\overset{n+1}{x}_{k+1};\quad \overset{n}{x}_{k-1}=\overset{n+1}{x}_{k-1}$$

ist:

$$S_{n+1}-S_n=-(\varphi\overset{n+1}{x}_{k+1}-\varphi\overset{n+1}{x}_k)(\overset{n+1}{x}_k-\overset{n+1}{x}_{k-1})<0$$
$$T_{n+1}-T_n=(\varphi\overset{n+1}{x}_k-\varphi\overset{n+1}{x}_{k-1})(\overset{n+1}{x}_{k+1}-\overset{n+1}{x}_k)>0$$

folglich nimmt, bei wachsendem n, S_n ab, T_n zu. Ausserdem ist

$$S_n-T_n=\sum_{k=1}^{k=n}(\varphi x_k-\varphi x_{k-1})(x_k-x_{k-1})>0$$

und man erhält:

$$T_1<T_2<\ldots<T_n<S_n<S_{n-1}<\ldots<S_1 \tag{3}$$

d. h. S_n bleibt bei beständigem Abnehmen stets $>T_1$, und T_n bei beständigem Wachsen stets $<S_1$; beide haben also Grenzwerte für $n=\infty$, welche zunächst nur für bestimmte Interpolationsfolge bestimmt sind, und zwar ist

$$\lim S_n > \text{jedes } T_n, \quad \text{und} \quad \lim T_n < \text{jedes } S_n. \tag{4}$$

Bezeichnet ferner Δ die grösste der Differenzen $\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1}$ in Gl. (2), so ist, da alle Terme jener Summe positiv sind,

$$S_n-T_n<\Delta\overset{k=n}{\Sigma}(\varphi\overset{n}{x}_k-\varphi\overset{n}{x}_{k-1})=\Delta(\varphi\overset{n}{x}_n-\varphi\overset{n}{x}_0)=\Delta(\varphi b-\varphi a)$$

und, da nach Voraussetzung $\lim\Delta=0$ ist, auch

$$\lim(S_n-T_n)=0 \tag{5}$$

folglich jene 2 Grenzwerte von S_n und T_n einander gleich.

Es bleibt zu beweisen, dass bei jeder Interpolation dieselben Grenzwerte resultiren. Nehmen wir ausser der Reihe (1) die Reihe

$$a = \overset{m}{x_0}' < \overset{m}{x_1}' < \dots < \overset{m}{x_m}' = b \tag{6}$$

an und interpoliren sie auf beliebige andere Weise, so dass die Differenzen unendlich klein werden. Sei

$$S_m' = \sum_{k=1}^{k=m} \varphi \overset{m}{x_k}' (\overset{m}{x_k}' - \overset{m}{x_{k-1}}')$$

$$T_m' = \sum_{k=1}^{k=m} \varphi \overset{m}{x_{k-1}}' (\overset{m}{x_k}' - \overset{m}{x_{k-1}}')$$

$$\lim S_n = \lim T_n = S; \quad \lim S_m' = \lim T_m' = S'$$

Durch Vereinigung beider Reihen entsteht eine dritte Reihe

$$a = \overset{m+n}{x_0}'' < \overset{m+n}{x_1}'' < \dots < \overset{m+n}{x''}_{m+n} = b \tag{7}$$

welche die Glieder der einen und andern zugleich enthält, daher durch Interpolation aus jeder von beiden hervorgehen kann. Sei analog

$$S_{m+n}'' = \sum^{k=m+n} \varphi \overset{m+n}{x_k}'' (\overset{m+n}{x_k}'' - \overset{m+n}{x_{k-1}}'')$$

$$T_{m+n}'' = \sum^{k=m+n} \varphi \overset{m+n}{x_{k-1}}'' (\overset{m+n}{x_k}'' - \overset{m+n}{x_{k-1}}'')$$

$$\lim S_{m+n}'' = \lim T_{m+n}'' = S''$$

Dann ist zunächst nach (4) bei jeder Interpolationsfolge und für jeden Wert von $m+n$

$$S_{m+n} > S'' > T_{m+n} \tag{8}$$

Unerwiesen ist aber noch, ob S'' dieselbe Grösse sein kann, wenn die Reihe (7) einmal aus (1), das andremal aus (6) durch Interpolation hervorgeht. Dies erhellt folgendermassen. Sei A, B, C, ... eine in's unendliche steigende Reihe; wir fixiren successive Werte von $m+n$ $> A$, $> B$, $> C$, ... und interpoliren die Reihe (7) in solcher Folge, dass sie für jeden fixirten Wert alle Glieder von (1) und (6) enthält, was durch blosse Hinzufügung der neuen Glieder stets möglich ist. Dann geht, für beliebig grosse $m+n$, S_{m+n}'' durch Interpolation aus S_n und aus S_m' hervor, folglich differiren die 2 Werte der Constanten S'' unendlich wenig von der einen Variabeln S_{m+n}'', sind also einander gleich. Dann aber ist nach (3)

$$S_n > S_{m+n}''; \quad T_{m+n}'' > T_n$$
$$S_m' > S_{m+n}''; \quad T_{m+n}'' > T_m'$$

und man hat nun zufolge (4) und (8):

$$T_n < S < S_n; \quad T_m' < S' < S_m'$$
$$S_n > S'' > T_n; \quad S_m' > S' > T_m'$$

woraus nach Subtraction der übereinanderstehenden Scalen:

$$T_n - S_n < S - S'' < S_n - T_n$$
$$T_m' - S_m' < S'' - S' < S_m' - T_m'$$

und dann nach Addition:

$$T_n - S_n + T_m' - S_m' < S - S' < S_n - T_n + S_m' - T_m'$$

Die äussern Glieder verschwinden nach (5) für unendlich grosse n und m, folglich ist das Mittelglied null, und man hat:

$$S = S'$$

was zu beweisen war.

§. 3. Erweiterungen. Der Satz von §. 2. war an die Bedingung geknüpft, dass φx mit x wächst. Wenn statt dessen φx bei wachsendem x abnimmt, so wächst $-\varphi x$ mit x. Wendet man dann den Satz auf $-\varphi x$ an, so ergiebt sich leicht, dass er auch von φx gilt.

Die Reihe (1) enthielt bisher stets die feststehenden Glieder $\overset{n}{x_0}, \overset{n}{x_n}$. Uebergeht man diese, so fallen in der Reihensumme S_n der erste und letzte Term weg. Da alle Terme unendlich klein sind, so bleibt der Grenzwert S ungeändert. Giebt es nun eine Reihe von Grössen

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < b$$

derart, dass φx von $x = a$ bis a_1, von da bis a_2, etc. entweder beständig wächst oder beständig abnimmt, sei es mit Einschluss oder Ausschluss der Grenzen, und man wendet den Satz von §. 2. auf jedes dieser Teilintervalle einzeln an, so erhält man, nach Addition der entsprechenden Summen S_n, wieder die ursprüngliche Summe S_n, und deren Grenzwert ist dann die Summe der einzelnen Grenzwerte S. Folglich gilt der Satz auch von einer Function φx, die nur in lauter Intervallen von einem Werte zum andern beständig wächst oder abnimmt.

Auch die Bedingung, dass die Reihe der x beständig wächst, lässt sich beseitigen. Kehrt man die Reihe (1) um, so geht S_n in $-T_n$, T_n in $-S_n$ über. Bei beständig abnehmenden x hat also S_n gleichfalls einen Grenzwert. Wenn jetzt die x bald zu-, bald abnehmen, so kann man wie oben das Intervall von a bis b in Teilintervalle zerlegen, in deren jedem die x nur in einem Sinne variiren. Demnach gilt der Satz noch für eine beliebige Reihe der x, wenn sie nur auf durchgehend unendlich kleine Differenzen interpolirt wird.

Da jeder Term der Summe (2) unendlich klein ist, so hat eine Aenderung einer endlichen Anzahl von Functionswerden φx keinen Einfluss auf den Grenzwert S. Eine Aenderung unendlich vieler Functionswerte hingegen kann den Wert von S ändern. Unter allen Umständen steht es uns aber frei, wenn die x bekannt sind, denen die abzuändernden φx entsprechen, so zu interpoliren, dass kein solches x in der Reihe vorkommt, kurz alle jene x zu vermeiden, da zwischen ihnen, auch wenn sie einander unendlich nahe kommen, immer noch Reihenglieder angenommen werden können. Hier zeigt es sich, dass es Fälle geben kann, wo aus verschiedener Interpolation verschiedener Grenzwert resultirt, sofern bei Aufnahme jener x in die Reihe sich S mit gewissen Functionswerten ändert, bei Vermeidung derselben nicht.

Erfüllt also die Function φx die Bedingung des Satzes nicht, differirt sie aber von einer Function $\varphi_1 x$, die der Bedingung genügt, nur in einzelnen Werten, seien es auch unendlich viele, so gilt der Satz noch für jede Interpolation, welche die entsprechenden einzelnen x meidet.

Derselbe Fall findet z. B. statt, wenn φx für rationale x einen andern Lauf hat als für irrationale. Die rationalen x sind unendlich viele Einzelwerte, die irrationalen nicht. Man hat dann bei Interpolation nur irrationale Glieder einzuschalten und die Ausnahmsbestimmung von φx für rationale x zu ignoriren *).

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so haben wir 2 Sätze:

I. Satz. Die Summe

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\varphi x_k (x_k - x_{k-1}) \tag{9}$$

in welcher φx eine eindeutige Function ist, welche in lauter Intervallen von einem Werte von x zum andern, sei es mit Einschluss oder Ausschluss dieser Grenzen, beständig wächst oder beständig ab-

*) Thomae hat den im Vorstehenden erklärten Umstand ganz unberücksichtigt gelassen. Seine Darstellung kennt den Unterschied zwischen Intervall und Einzelwert und das Verhalten der letztern zum Integral gar nicht; vielmehr giebt sich darin die irrtümliche Anschauung kund, als ob das Intervall aus unendlich vielen Einzelwerten bestünde, unendlich viele Punkte eine Linie ausmachten. Demgemäss ist auch seine Erörterung der Irrationalzahlen unrichtig, indem sie sich mit den Rationalzahlen bei ihm in das Intervall teilen. Infolge davon erscheint das Resultat seiner Behandlung von Beispielen der letzt genannten Art als wunderbare Eigenschaft der betreffenden Functionen, wobei er es bewenden lässt.

nimmt, hat, wenn durch fortgesetzte Interpolation die sämmtlichen Differenzen $\overset{n}{x} - \overset{n}{x}_{k-1}$ unendlich klein werden, einen Grenzwert, der von der möglichen Verschiedenheit der Interpolation unabhängig ist.

II. Satz. Erfüllt die Function φx obige Bedingung zwar nicht, differirt sie aber von einer Function $\varphi_1 x$, welche der Bedingung genügt, nur in einzelnen Werten von x, seien es auch unendlich viele, so hat die Summe (9.) denselben Grenzwert wie

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi_1(\overset{n}{x}_k(\overset{n}{x}_k - \overset{n}{x}_{k-1})$$

wenn in der Reihe der x_k diejenigen x nicht vorkommen, für welche $\varphi x \gtrless \varphi_1 x$ ist.

Im Falle des letztern Satzes ist also die Unabhängigkeit des Grenzwerts von der Interpolation eine beschränkte.

§. 4. Definition des bestimmten Integrals. Die in §. 2. formulirte Grösse S heisst das Integral von $\varphi x\, \partial x$ im Intervall von a bis b und wird geschrieben:

$$\int_a^b \varphi x\, \partial x = \lim \sum_{k=1}^{k=n} \varphi \overset{n}{x}_k(\overset{n}{x}_k - \overset{n}{x}_{k-1}) \quad \begin{cases} \overset{n}{x}_n = b \\ \overset{n}{x}_0 = a \end{cases} \tag{10}$$

Diese Gleichung definirt den links stehenden Ausdruck, und die Definition ist gültig für alle Functionen φx, welche den Bedingungen des I. oder II. Satzes genügen, die Summe und deren Variation mit n im Sinne dieser Sätze verstanden.

§. 5. Form der Abhängigkeit des Integrals von seinen Grenzen. Da die rechte Seite der Gl. (10) unabhängig von der Reihe der x ausgenommen deren Anfangs- und Endglied ist, so kann das Integral nur Function von a und b sein. Sei also

$$\int_a^b \varphi x\, \partial x = F(a, b)$$

Eine leichte Betrachtung ergiebt, dass gemäss der Definition

$$\int_a^b \varphi x\, \partial x + \int_b^c \varphi x\, \partial x = \int_a^c \varphi x\, \partial x \tag{11}$$

ist, indem die zweite Reihensumme blosse Fortsetzung der ersten ist. Daher hat man:

$$F(a,b)+F(b,c)=F(a,c)$$

Betrachtet man c, von dem $F(a,b)$ nicht abhängt, als constant und setzt

$$F(a,c)=-f(a)$$

so wird

$$F(a,b)=f(b)-f(a) \tag{12}$$

und man hat:

III. Satz. Jedes Integral im Intervall von a bis b ist die Differenz zweier Werte derselben Function entsprechend den Argumenten a und b.

Diese Function $f(x)$ möge die Integralfunction von $\varphi x\,\partial x$ heissen. Addirt man eine Constante zu ihr, so bleibt die Grösse (12) ungeändert, folglich enthält jede Integralfunction eine willkürliche Constante als Addenden.

Aus der Gleichung

$$\int_a^b \varphi x\,\partial x=f(b)-f(a) \tag{13}$$

folgt nun leicht erstlich Gl. (11), ferner insbesondere:

$$\int_a^a \varphi x\,\partial x=0$$

$$\int_a^b \varphi x\,\partial x=-\int_b^a \varphi x\,\partial x$$

§. 6. Mittelwertsatz. Sei A der kleinste, B der grösste Wert der Function φx zwischen $x=a$ und $x=b$, und $a<b$. Wir interpoliren die Reihe (1) so, dass die Differenzen $\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1}$ sämmtlich positiv werden. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{k=n}(\varphi\overset{n}{x}_k-A)(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})>0$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(\varphi\overset{n}{x}_k-B)(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})<0$$

woraus:

$$A\sum_{k=1}^{k=n}(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})<\sum_{k=1}^{k=n}\varphi\overset{n}{x}_k(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})<B\sum_{k=1}^{k=n}(\overset{n}{x}_k-\overset{n}{x}_{k-1})$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

folglich, indem man zum Grenzwert übergeht,

$$A(b-a) \overline{\overline{<}} \int_a^b \varphi x \partial x \overline{\overline{<}} B(b-a)$$

Bezeichnet $M\varphi x$ einen Mittelwert der Function, d. h. eine Grösse zwischen A und B, so kann man das Resultat schreiben:

$$\int_a^b \varphi x \partial x = (b-a) M\varphi x \tag{14}$$

§. 7. Stetigkeit der Integralfunction. Das Integral (10) ist stetige Function der obern Grenze b, wenn

$$\varDelta = \int_a^{b+\varepsilon} \varphi x \partial x - \int_a^b \varphi x \partial x \tag{15}$$

zugleich mit ε unendlich klein ist. Nach (11), dann nach (14) ist

$$\varDelta = \int_b^{b+\varepsilon} \varphi x \partial x = \varepsilon M\varphi x \tag{16}$$

Da nun $M\varphi x$ zwischen bestimmten Grenzen enthalten ist, so ist die Bedingung der Stetigkeit erfüllt. Führt man für das Integral den Ausdruck $f(b) - f(a)$ ein, und schreibt x statt b, so ergiebt sich, dass $f(x)$ stetige Function von x, und hieraus wieder, dass das Integral stetige Function von a und b ist.

IV. Satz. Das in §. 4. definirte bestimmte Integral ist stetige Function beider Grenzen.

§. 8. Differentiation der Integrale. Setzt man in (15) ∂b für ε, so stellt $\varDelta$ das Differential des Integrals partiell nach b dar, und man hat nach (16):

$$\partial b . \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b \varphi x \partial x = \partial b M\varphi x$$

und zwar bezeichnet $M\varphi x$ einen Mittelwert der Function zwischen $x = b$ und $x = b + \partial b$. Ist nun φx stetig bei $x = b$, so haben alle solche Mittelwerte den Grenzwert φb; folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^b \varphi x \partial x = \varphi b$$

Führt man den Ausdruck (13) ein, und schreibt x statt b, so kommt:

$$\frac{\partial(f(x)-f(a))}{\partial x} = \varphi x$$

oder, wenn a constant:

$$f'(x) = \varphi x \text{ (wenn } \varphi x \text{ stetig)} \tag{17}$$

Demnach ist die Function unter dem Integralzeichen, wofern sie stetig, immer die Derivation der Integralfunction, und man hat allgemein:

$$\int_a^b f'(x)\,\partial x = f(b) - f(a) \tag{18}$$

Variiren jetzt a und b gleichzeitig, so ist

$$\partial \int_a^b f'(x)\,\partial x = f'(b)\,\partial b - f'(a)\,\partial a \quad \text{oder}$$

$$\partial \int_a^b \varphi x\,\partial x = \varphi b\,\partial b - \varphi a\,\partial a$$

Variirt φx mit einer Grösse u, und man setzt

$$\frac{\partial \varphi x}{\partial u} = \varphi_1 x; \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial u} = f_1(x)$$

so hat man:

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b \varphi x\,\partial x = \frac{\partial(fb - fa)}{\partial u} = f_1(b) - f_1(a)$$

$$= \int_a^b f_1'(x)\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial f(x)}{\partial u}\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial f(x)}{\partial x}\,\partial x$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f'(x)}{\partial u}\,\partial x = \int_a^b \frac{\partial \varphi x}{\partial u}\,\partial x$$

Variiren a, b und beliebige in φx enthaltene Grössen $u, v, \ldots$, so ist schliesslich

$$\partial \int_a^b \varphi x\,\partial x = \varphi b\,\partial b - \varphi a\,\partial a + \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi x}{\partial u}\,\partial u + \frac{\partial \varphi x}{\partial v}\,\partial v + \ldots\right)\partial x$$

§. 9. Erweiterter Mittelwertsatz. Sei

$$x = \psi(u)$$

und $\psi(u)$ eine Function, die einen Differentialquotienten $\psi'(u)$ hat. In der Bezeichnung eines bestimmten Integrals (10) bedeuten nun stets die Integralgrenzen a, b den Anfangs- und Endwert derjenigen Variabeln, hier x, welche hinter dem Differentialzeichen ∂ steht. Schreibt man also für ∂x sein Aequivalent $\psi'(u)\partial u$, so müssen an die Stelle von a, b der Anfangs- und Endwert von u treten. Variirt u von α bis β, so variirt x von $\psi(\alpha)$ bis $\psi(\beta)$. Man hat daher zu setzen:

$$a = \psi(\alpha); \qquad b = \psi(\beta)$$

dann wird

$$\int_a^b \varphi x \partial x = \int_\alpha^\beta \varphi\psi(u)\,\psi'(u)\partial u$$

Nach (18) ist

$$\int_\alpha^\beta \psi'(u)\partial u = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = b - a$$

daher nach (14)

$$\int_a^b \varphi x \partial x = M\varphi x \int_\alpha^\beta \psi'(u)\partial u \quad \text{oder}$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi\psi(u)\,\psi' u \partial u = M\varphi\psi u \int_\alpha^\beta \psi'(u)\partial u \tag{19}$$

Jetzt wollen wir statt der Zeichen u, α, β, ψ', $\varphi\psi$ schreiben x, a, b, χ, φ; dann lautet die Formel:

$$\int_a^b \varphi(x)\chi(x)\partial x = M\varphi(x) \int_a^b \chi(x)\partial x \tag{20}$$

Die Bedingung, dass $\psi(u)$ einen Differentialquotienten hat, ist nach (17) erfüllt, wenn $\chi(u)$ stetig ist. In (19) bedeutet $M\varphi\psi u$ ein Mittel zwischen dem kleinsten und grössten Werte von $\varphi\psi u$, wenn ψu von $\psi\alpha$ bis $\psi\beta$ variirt. Wegen Stetigkeit von ψu werden diese 2 äussersten Werte auch stets erreicht, wenn u von α bis β variirt. Daher ist $M\varphi\psi u$ auch Mittelwert für letztere Variation. Einen Grund zu besonderer Vorsicht bietet dagegen die Setzung einer beliebigen Function $\varphi(u)$ für $\varphi\psi u$. Wenn nämlich ψu für verschiedene u denselben Wert hat, so entspricht denselben auch gleicher Wert von $\varphi\psi u$, nicht aber von $\varphi(u)$, wodurch sich die Substitution verbietet. Um diesen Fehler zu meiden, stellen wir für die Function ψu die zwar nicht als notwendig erwiesene, aber zureichende Bedingung, dass sie durchgängig in einem Sinne variirt, so dass jedem ψu nur ein u entspricht; diese ist gleichbedeutend mit der, dass $\chi(u)$ sein Vorzeichen nicht

wechselt. Jetzt lautet die Bedingung der Gültigkeit des erweiterten Mittelwertsatzes (20):

$$\chi(x) \text{ stetig und von unveränderlichem Vorzeichen.} \tag{21}$$

§. 10. Convergenz der Integrale bei unendlich grossen Functionswerten. Sei $\varphi(a+\varepsilon) = \infty$ für verschwindendes ε. Hat alsdann das Integral

$$S_\varepsilon = \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi x \, \partial x$$

einen Grenzwert, so heisst es convergent, und der Grenzwert wird geschrieben:

$$\lim S_\varepsilon = \int_{a}^{b} \varphi x \, \partial x$$

andernfalls heisst es divergent und kann nur als Function von ε Gegenstand der Rechnung sein.

Um die Bedingungen der Convergenz aufzustellen, setzen wir:

$$l_0 x = \frac{1}{x}; \quad l_1 x = \log l_0 x; \quad l_2 x = \log l_1 x; \quad \ldots l_n x = \log l_{n-1} x$$

$$Lx = -\frac{1}{\alpha}(l_n x)^{-\alpha}$$

wo $l_0, l_1, \ldots l_n, L$ Functionszeichen, α eine positive Constante bedeutet. Eine Differentiation ergiebt:

$$L'x = \frac{l_0 x}{l_1 x \, l_2 x \ldots l_n x \, (l_n x)^\alpha}$$

$$l_{n+1}'x = \frac{l_0 x}{l_1 x \, l_2 x \ldots l_n x}$$

Beide Functionen verharren positiv, solange das positive x klein genug bleibt, dass eine $n$malige Logarithmirung von $\frac{1}{x}$ noch ein positives Resultat giebt. Die Grösse $b-a$ habe diese geforderte Kleinheit.

Wir setzen nun in Gl. (20) einzeln

$$\chi(x) = L'(x-a); \qquad \chi(x) = l_{n+1}'(x-a)$$

dann ist beidemal $\chi(x)$ positiv von $x = a+\varepsilon$ bis $x = b$, und man hat nach (18) bzhw.:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \chi(x) \, \partial x = \begin{cases} L(b-a) - L\varepsilon \\ l_{n+1}(b-a) - l_{n+1}\varepsilon \end{cases}$$

Zerlegt man also φx folgendermassen:

$$\varphi x = \frac{\varphi(x)}{\chi(x)} \cdot \chi(x)$$

so erhält man nach Gl. (20), deren Bedingung (21) erfüllt ist, bzhw.:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi x \,\partial x = M \frac{\varphi x}{L'(x-a)} \{L(b-a) - L\varepsilon\}$$

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi x \,\partial x = M \frac{\varphi x}{l_{n+1}'(x-a)} \{l_{n+1}(b-a) - l_{n+1}\varepsilon\}$$

Hier sind die Subtrahenden $L\varepsilon$ unendlich klein, $l_{n+1}\varepsilon$ unendlich gross, die Minuenden constant, folglich das Integral endlich, wenn

$$M \frac{\varphi x}{L'(x-a)} \tag{22}$$

endlich ist, dagegen unendlich gross, wenn

$$M \frac{\varphi x}{l_{n+1}'(x-a)} \tag{23}$$

nicht unendlich klein ist.

Nimmt man nun an, dass $\varphi(a+\varepsilon)$ bei verschwindendem ε von irgend einem ε an sein Vorzeichen nicht wechselt, so wächst der absolute Wert des Integrals beständig bei abnehmendem ε, hat also einen Grenzwert, wenn er endlich ist. Im erstgedachten Falle convergirt demnach das Integral.

Die Mittelwerte (22) (23) sind endlich, wenn die betreffenden Functionen für $x = a+\varepsilon$ endlich sind oder mit ε verschwinden, unendlich gross, wenn es die Functionswerte sind.

Folglich convergirt das Integral, wenn

$$\frac{\varphi(a+\varepsilon)}{L'\varepsilon} = \frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_0\varepsilon} l_1\varepsilon\, l_2\varepsilon \ldots l_n\varepsilon (l_n\varepsilon)^\alpha \tag{24}$$

für irgend ein n und irgend ein positives α mit ε verschwindet, und $\varphi(a+\varepsilon)$ bei verschwindendem ε sein Vorzeichen nicht wechselt; es divergirt, wenn

$$\frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_{n+1}'\varepsilon} = \frac{\varphi(a+\varepsilon)}{l_0\varepsilon} l_1\varepsilon\, l_2\varepsilon \ldots l_n\varepsilon \tag{25}$$

bei verschwindendem ε nicht verschwindet.

Der Fall, wo erstere Grösse endlich ist, braucht nicht erwähnt zu werden, weil sie dann für ein kleineres positives α immer verschwindet.

Es war vorausgesetzt, dass b genügend klein sei. Dass die Grösse von b keinen Einfluss auf die Convergenz hat, erkennt man jedoch leicht durch Zerlegung des Intervalls nach (11).

Die entscheidenden Grössen (24) (25) werden

$$\text{für } n=0: \quad \varphi(a+\varepsilon)\,\varepsilon^{1-\alpha}, \qquad \varphi(a+\varepsilon)\,\varepsilon$$

$$\text{für } n=1: \quad \varphi(a+\varepsilon)\,\varepsilon\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+\alpha}, \quad \varphi(a+\varepsilon)\,\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$$

Ergiebt das kleinere n keine Entscheidung, so schreitet man zum nächst grössern.

Das Kriterium der Convergenz für unendlich grosse Functionswerte an der obern Grenze ist leicht durch Substitution von $b-x$ auf das vorige zurückzuführen. Es tritt bloss $\varphi(b-\varepsilon)$ an die Stelle von $\varphi(a+\varepsilon)$.

Wird $\varphi x = \infty$ für $x = c \pm \varepsilon$, wo $a < c < b$, so hat man das Intervall a bis b zu zerlegen in die Intervalle a bis c und c bis b. In (24) und (25) ist dann $\varphi(c \pm \varepsilon)$ für $\varphi(a+\varepsilon)$ zu setzen.

§. 11. Convergenz der Integrale für unendlich grosses Intervall. Das Intervall kann unendlich gross sein, wenn $b = \infty$, wenn $a = -\infty$ ist und wenn beides zugleich stattfindet. Den 2. Fall kann man auf den ersten zurückführen durch Substitution $-x$ für x, den 3. Fall auf die beiden ersten durch Zerlegung des Intervalls. Es handelt sich also allein um den ersten.

Hat das Integral (10) für $b = \infty$ einen Grenzwert, so heisst es convergent, und der Grenzwert wird geschrieben:

$$\int_0^\infty \varphi x\,\partial x$$

Sei $x = \log\frac{1}{\xi}$, also $\xi = e^{-x}$, und ε positiv unendlich klein; dann wird

$$\int_a^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \varphi x\,\partial x = -\int_{e^{-a}}^{\varepsilon} \varphi\left(\log\frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\xi} = \int_{\varepsilon}^{e^{-a}} \varphi\left(\log\frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\xi}$$

Nach §. 10. convergirt letzteres Integral, wenn

$$\frac{\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon l_0 \varepsilon} l_1\varepsilon\, l_2\varepsilon \dots l_n\varepsilon\,(l_n\varepsilon)^\alpha$$

oder, da $\varepsilon l_0\varepsilon = 1$, wenn

$$\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) l_1\varepsilon\, l_2\varepsilon \dots l_n\varepsilon\,(l_n\varepsilon)^\alpha$$

unendlich klein ist, und $\varphi\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ bei verschwindendem ε sein Vorzeichen nicht wechselt. Substituirt man für ε die positive Unendlichkleine $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, so geht $l_k\varepsilon$ in $l_{k-1}\varepsilon$ über. Schreibt man zugleich $n+1$ für n, so lautet die entscheidende Grösse (24) für Convergenz:

$$\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) l_0\varepsilon\, l_1\varepsilon \dots l_n\varepsilon\,(l_n\varepsilon)^\alpha \tag{26}$$

Hieraus geht die andere für $\alpha = 0$ hervor

$$\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) l_0\varepsilon\, l_1\varepsilon \dots l_n\varepsilon \tag{27}$$

welche die Divergenz beweist, wenn sie nicht verschwindet.

12. **Quadratur.** Seien $a = x_0, x_1, x_2, \dots x_n = b$ die Abscissen, $\varphi x_0, \varphi x_1, \varphi x_2, \dots \varphi x_n$ die Ordinaten von Punkten $P_0, P_1, P_2, \dots P_n$ einer ebenen Curve AB, (A mit P_0, B mit P_n identisch), $N_0, N_1, N_2, \dots N_n$ deren Projectionen auf die x Axe. Indem man zwischen den consecutiven Punkten immer neue auf der Curve annimmt, lassen sich die Bogen zwischen diesen unendlich klein machen. Jedem Maximum und Minimum der Ordinate entspreche ein Punkt P. Ergänzt man nun die Rechtecke

$$P_k N_k N_{k-1} M_{k-1} = \varphi x_k (x_k - x_{k-1}) \tag{28}$$

$$P_{k-1} N_{k-1} N_k L_k = \varphi x_{k-1} (x_k - x_{k-1}) \tag{29}$$

so liegt der Bogen $P_k P_{k-1}$ stets innerhalb des Rechtecks $P_k L_k P_{k-1} M_{k-1}$, um welches beide Rechtecke von einander differiren; daher differirt der Streifen

$$P_k N_k N_{k-1} P_{k-1} \tag{30}$$

von jedem der beiden Rechtecke um weniger als beide Rechtecke unter sich. Nimmt man nun die Summe der Differenzen der Rechtecke (28) und (29), jede positiv gerechnet, so ist diese bis zu jedem Maximum oder Minimum nach Gl. (5) unendlich klein, folglich, wenn die Anzahl der Maxima und Minima endlich ist, von Anfang bis Ende

unendlich klein. Die Summe der Differenzen von (28) und (30), auch positiv gerechnet, ist kleiner, also auch unendlich klein. Der absolute Wert der Differenz der Summen von (28) und (30) ist nie grösser, also auch unendlich klein. Die Summe der (28) ist S_n (Gl. (2)), die Summe der (30) das Flächenstück

$$F = AP_1P_2 \dots PN_n N_0$$

folglich ist $S_n - F$ unendlich klein. Da hiernach die Variable S_n unendlich wenig von den Constanten $S = \lim S_n$ und F differirt, so ist

$$F = S = \int_a^b \varphi x \, \partial x$$

Das bestimmte Integral stellt das ebene Flächenstück zwischen dem Curvenbogen, den Ordinaten seiner Endpunkte und der Abscissenaxe dar, wenn φx die Ordinate, x die Abscisse des laufenden Punktes, a deren Aufangs-, b deren Endwert ist.

XX.

Zur Theorie der magnetischen Induction.

Von

Herrn Dr. L. **Weber**,

Assistenten am physikalischen Institut in Kiel.

Die allgemeine Theorie der magnetischen Induction, wie sie zuerst von Poisson (Mém. de l'Inst. d. Fr. Tome V et VI) gegeben ist, geht von folgender Vorstellung über das Wesen des Magnetismus aus. Nach der Coulomb'schen Hypothese hat man sich den magnetischen Zustand eines Idiomagneten sowol wie eines inducirt magnetischen Körpers vorzustellen als bestehend in einer räumlichen Trennung zweier imponderabeler Fluida, eines nördlich und eines südlich magnetischen Fluidums. Wenn man in Bezug auf die Wirkungsweise derselben auch dieselben allgemeinen Gesetze anzunehmen hat wie sie für die analogen elektrischen Fluida gültig sind, so ist den magnetischen Fluidis doch die charakteristische Eigenschaft zu vindiciren, gebunden zu sein an sehr kleine Körperteilchen, die von Poisson als magnetische Elemente bezeichnet werden.

Es wird nämlich angenommen, dass die beiden in einem magnetischen Element in jederzeit gleichen Mengen vorhandenen Fluida bei ihrer Trennung doch innerhalb des Elementes bleiben und sich in unendlich dünnen Schichten über die Oberfläche desselben verbreiten. Ausserdem geht Poisson von der Ansicht aus, dass innerhalb eines magnetischen Elementes die Trennung der beiden Fluida entsprechend der Stärke der inducirenden Kräfte bis zu unbegrenzten Mengen möglich sei. Ein magnetischer Körper hat demnach dieselben Eigenschaften wie ein Conglomerat unendlich kleiner, unter einander

isolirter elektrischer Conductoren. Poisson bezeichnet das Verhältniss des von den magnetischen Elementen eingenommenen Raumes zu dem Volumen des ganzen Körpers durch die Grösse k und nimmt an, dass die verschiedene Magnetisirbarkeit verschiedener Substanzen in einer Variabilität dieser Grösse k ihren Ausdruck finde.

Denkt man sich nun einen magnetisirbaren Körper der Einwirkung gegebener äusserer magnetischer Massen ausgesetzt, so führt die Vorstellung der unbegrenzten Menge der in einem magnetischen Element vorhandenen Fluida sofort zu der Bemerkung, dass nach stattgehabter Induction ein Gleichgewicht derjenigen Kräfte stattfinden muss, welche auf einen Punkt im Innern eines magnetischen Elementes ausgeübt werden 1) von den äusseren inducirenden magnetischen Massen, 2) von dem in den übrigen Elementen inducirten Magnetismus, 3) von den getrennten magnetischen Teilen des Elementes selbst. Als Bedingungsgleichungen für das genannte Gleichgewicht findet Poisson (Mém. Tome V. S. 291.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} + X + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + Y + \frac{4\pi}{3}\beta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + Z + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0,$$

in welchen die Glieder $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ die Componenten der äusseren Kräfte; X, Y, Z die Componenten der von den übrigen magnetischen Elementen ausgeübten Kräfte und $\frac{4\pi}{3}\alpha$, $\frac{4\pi}{3}\beta$, $\frac{4\pi}{3}\gamma$ die Componenten der von dem freien Magnetismus des betrachteten Elementes ausgeübten Kräfte bedeuten. Durch die Einführung einer Function Q, welche das inducirte Potential des ganzen Körpers darstellt, wird aus den vorigen Gleichungen (s. a. a. O. S. 299.)

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{4\pi\alpha(1-k)}{3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{4\pi\beta(1-k)}{3} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{4\pi\gamma(1-k)}{3} = 0.$$

Indem sich nun durch weitere Betrachtungen auf Grund der Theorie der elektrischen Induction die Werte der 3 Functionen α, β,

γ ergeben, übersieht man, dass die Aufstellung der obigen Gleichgewichtsbedingungen in der Tat ein Mittel gibt, den Wert des inducirten Potentiales Q auszudrücken durch das gegebene V. Auf S. 294. ergibt sich der Wert für Q

$$Q = \iiint \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} \beta + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z_1} \gamma \right\} k dx_1 dy_1 dz_1$$

in welchem die Integration über den ganzen inducirten Körper zu erstrecken ist; ϱ die Entfernung des Volumelementes $(dx_1 dy_1 dz_1)$ von demjenigen Punkt (xyz) bedeutet, auf welchen sich das Potential bezieht, und α, β, γ als die Differentialquotienten einer Function φ zu betrachten sind, welche wiederum aus dem gegebenen V durch Reihenentwickelung nach den sinus und cosinus gewisser Winkel gebildet wird. Eine bemerkenswerte Umgestaltung erfährt der Ausdruck für Q auf S. 303., indem das dreifache Integral der obigen Gleichung auf folgendes Oberflächenintegral reducirt wird

$$Q = k \int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos l' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cos m' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \cos n' \right\} \frac{d\omega}{\varrho}$$

in welchem l, m, n die Richtungswinkel der Oberflächennormale des inducirten Körpers bedeuten. Man erfährt durch diese Form, dass die Wirkung des inducirten Magnetismus sich immer ersetzen lässt durch diejenige einer gewissen fingirten einfachen Oberflächenbelegung des Körpers.

Die weitere Behandlung der in dem Ausdrucke für Q auftretenden Grössen α, β, γ, φ ist weder von Poisson noch von Green, welcher in seinem Essay on the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism (Crelle Journal Bd. 39. 44. 47.) dasselbe Problem in ähnlicher Weise darlegt, in besonders übersichtlichen Formen gegeben.

Nach einer erheblich abweichenden Methode ist nun in neuerer Zeit die Formel für das inducirte Potential entwickelt worden von Beer in seiner „Einleitung in die Elektrostatik etc.". Gewisse Unvollkommenheiten, welche sich in dieser Beer'schen Abhandlung befinden, werden es gerechtfertigt erscheinen lassen, auf's Neue eine Darstellung dieser Methode zu geben.

Dieser Zweck wird von der vorliegenden Arbeit zu erreichen versucht. Der § 1. enthält eine Darstellung der Methode der successiven Induction, welche sich sehr eng an die Beer'sche Methode anschliesst. Die Richtigkeit des gewonnenen Resultates ergibt sich im § 2. durch Vergleichung mit einem Resultate von C. Neumann, der in seinem



jüngst erschienenen Werke „Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential" auf Grund der Poisson'schen Ergebnisse eine sehr elegante und vollständige Lösung des vorliegenden Problemes gegeben hat. Der § 3. soll die Abweichungen der Beer'schen Darstellung von derjenigen des § 1. aufdecken und begründen und hat daher den weiteren Zweck das Verständniss der ziemlich schwierigen Beer'schen Darstellung zu erleichtern. Im § 4. endlich soll eine Methode der successiven Induction zur Darstellung kommen, auf welche ich durch Herrn Professor Dr. C. Neumann aufmerksam gemacht bin.

§ 1.

1. Definitionen. Steht ein magnetisirbarer Körper $\mathfrak{A}$ unter dem Einfluss von unveränderlichen äusseren Kräften, so wird derselbe einen magnetischen Zustand annehmen, welcher rücksichtlich seiner Wirkung definirt ist durch das Potential von $\mathfrak{A}$ auf einen variabelen Punkt xyz. Man bezeichnet dies Potential als das inducirte Potential des Körpers $\mathfrak{A}$. Der mathematische Ausdruck desselben ist in seiner allgemeinsten Form

$$U_{(xyz)} = \Sigma \frac{\varepsilon\mu}{r},$$

wenn man unter μ die Menge des an einem Punkte vorhandenen freien magnetischen Fluidums; unter r die Entfernung dieses Punktes von dem variabelen Punkt (xyz) und unter ε den Wert ∓ 1 versteht. Es wird nun immer möglich sein, den obigen Ausdruck auf die Form zu bringen

$$U_{(xyz)} = \int\limits_{\mathfrak{A}} W dx_1 dy_1 dz_1$$

in welchem die Integration über den ganzen Raum des Körpers $\mathfrak{A}$ zu erstrecken ist; $dx_1 dy_1 dz_1$ ein unendlich kleines Volumenelement bedeutet; und worin W als ein dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ zukommender Functionswert erscheint. Die dabei zu Grunde zu legende Vorstellung hat ihr Analogon bei der Betrachtung der ponderabelen Materie. In ähnlicher Weise nämlich, wie man sich die Verteilung der in Wirklichkeit discontinuirlichen Materie eines Körpers, als continuirlich vorstellen kann, sobald es sich um die Aufstellung gewisser Integrale handelt, wird man auch für die nach der Poisson-schen Hypothese als in Wirklichkeit discontinuirlich verteilten magnetischen Fluida immer eine fingirte continuirliche magnetische Durchtränkung eines Körpers substituiren können. Die bei dieser Vorstellung zu überwindende Schwierigkeit, in jedem kleinsten Teilchen die gleichen Mengen nördlichen und südlichen Fluidums zu denken,

und doch zugleich eine Verschiedenheit von dem sogenannten neutralen magnetischen Zustand zu statuiren, ist von derselben Natur wie die analoge bei den sogenannten Doppelbelegungen auftretende.

Die Function W wird nun im Allgemeinen abhängig sein von der Lage des Punktes xyz, dem inducirenden Potentiale, der Beschaffenheit und den Dimensionen des magnetisirten Körpers. Lassen wir Alles bis auf die Dimensionen des Körpers ungeändert, so ist klar, dass bei abnehmender Grösse desselben sich die Function W im Allgemeinen ändern und sich jedenfalls einer bestimmten endlichen Grösse w nähern muss, wenn man die Dimensionen des magnetisirten Körpers bis zu endlicher Kleinheit abnehmen lässt. Alsdann wird zu setzen sein

$$U_{(xyz)} = u_{(xyz)} = w dx_1 dy_1 dz_1$$

Diesen Wert u bezeichnen wir als das inducirte Potential eines für sich allein gedachten Körperelementes oder zur Abkürzung als das *direct inducirte Potential* eines Körperelementes. Analog würde

$$U' = \int_{\mathfrak{A}} u = \int_{\mathfrak{A}} w dx_1 dy_1 dz_1$$

zu bezeichnen sein als das *direct inducirte Potential* des Körpers $\mathfrak{A}$.

Zusatz. Die obige Definition des *direct inducirten Potentiales* ist unabhängig von der in der Einleitung scizzirten Vorstellungsweise Poisson's und verträglich mit der Ampère'schen Hypothese über das Wesen des Magnetismus.

2. Es handelt sich zunächst darum, einen analytischen Ausdruck für das *direct inducirte Potential* eines Körperelementes zu finden. Zu dem Zweck haben wir folgende Voraussetzungen zu machen. Wir nehmen erstens an, dass dasselbe in Bezug auf Punkte in endlicher Entfernung von derselben Form sei wie das Potential eines permanenten Magneten in Bezug auf ∞ ferne Punkte. Zweitens setzen wir das nach irgend einer Richtung genommene magnetische Moment eines unendlich kleinen Körperelementes proportional der nach derselben Richtung genommenen Componente der inducirenden Kräfte und im Uebrigen nur abhängig von der Beschaffenheit des inducirten Körpers.

3. Das Potential eines permanenten Magneten in Bezug auf einen unendlich fernen Punkt (xyz) ist bekanntlich

$$\frac{M.\cos\delta}{R^2}$$

wenn M das magnetische Moment, R die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Magneten und δ den Winkel zwischen R und der magnetischen Axe des Magneten bedeutet. Bezeichnet man einen beliebigen Punkt des Magneten mit $x_1 y_1 z_1$, so kann man vorstehenden Ausdruck auch schreiben

$$\frac{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)}{R^3}$$

worin nun die 3 Grössen A, B, C die magnetischen Momente des Magneten in Bezug auf die drei Coordinatenaxen bedeuten.

4. Bezeichnen wir einen beliebigen Punkt eines sehr kleinen inducirt magnetischen Körpers mit $(x_1 y_1 z_1)$, so wird der ersten Voraussetzung (2) zufolge sein Potential auf einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt xyz von der Form sein

$$u = \frac{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)}{r^3}$$

worin $r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$ ist und a, b, c die magnetischen Momente des kleinen Körpers in Bezug auf die drei Coordinatenaxen bedeuten. Wir wollen nun die zweite in (2) gemachte Voraussetzung in Anwendung bringen und die drei Momente a, b, c proportional setzen den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Componenten der inducirenden Kräfte. Nennen wir zu dem Zwecke V das Potential des inducirenden Idiomagneticums, so sind

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1}; \quad -\frac{\partial V}{\partial y_1}; \quad -\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

die von demselben auf den Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausgeübten Kräfte und wir haben demnach zu setzen

$$a = -a' \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$b = -b' \frac{\partial V}{\partial y_1}$$

$$c = -c' \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

wenn wir unter a', b', c' die Grössen verstehen, welche von der Beschaffenheit des inducirten Körpers in Hinsicht auf die Richtungen der Coordinatenaxen und ausserdem noch von den Dimensionen des betrachteten kleinen Körpers abhängen. Stellen wir uns fernerhin vor, dass der betrachtete kleine Körper bis zu unendlicher Kleinheit abnehme, so gehen a', b', c' über in

$$K_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1\,; \quad K_2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\,; \quad K_3\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

wo nun die 3 Grössen K lediglich von der Beschaffenheit des Körpers abhängen. Da sich die folgenden Betrachtungen nur auf isotrope Körper beziehen, in denen also keine Richtung vor der andern bevorzugt ist, so können wir die drei Constanten K einander gleich setzen. Dadurch wird dann der obige Ausdruck für u

$$u = -K\left\{\frac{x-x_1}{r^3}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{y-y_1}{r^3}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{z-z_1}{r^3}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1\, dy_1\, dz_1$$

Beachtet man endlich die bekannten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{y-y_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} = \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{z-z_1}{r^3} &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} = \frac{\partial T}{\partial z_1} \end{aligned}\right\} \text{ wo } T = \frac{1}{r} \text{ ges. ist.}$$

so vereinfacht sich der Ausdruck für u in

$$u = -K\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1\, dy_1\, dz_1 \qquad [a]$$

5. **Bemerkung.** Die vorstehende Entwickelung ist unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, dass die gegebene Function V im Bereiche des Körperelementes $dx_1\, dy_1\, dz_1$ sammt ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Werte aufweise, eine Voraussetzung übrigens, die eo ipso dadurch realisirt ist, dass V das Potential äusserer magnetischer Massen ist.

6. Aus der Formel [a] folgt sofort, dass der Wert des in einem Körper $\mathfrak{A}$ *direct inducirten Potentiales* ist

$$U' = -K\iiint\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1\, dy_1\, dz_1 \qquad [b]$$

7. Der vorstehende Wert von U' ist wiederum unter der Voraussetzung gültig, dass V sammt seinen ersten Ableitungen im Bereiche des Körpers $\mathfrak{A}$ endliche und stetige Werte aufweise.

8. Aus der in 4. gegebenen Entwickelung folgt ohne Weiteres: Vermehrt man das gegebene Potential V um die Potentiale V_1, V_2 ...

welche innerhalb $\mathfrak{A}$ dieselben Eigenschaften wie V besitzen sollen, so wird das direct inducirte Potential zu vermehren sein um resp.

$$U_1' = -K\iiint\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V_1}{\partial y_1}+\frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V_1}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1$$

$$U_2' = -K\iiint\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+\frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V_2}{\partial y_1}+\frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V_2}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1$$

. . . .

9. Setzt man einen magnetisirbaren Körper $\mathfrak{A}$ dem Einflusse gegebener unveränderlicher magnetischer Kräfte aus, so wird das inducirte Potential in Folge der gegenseitigen Einwirkung der Teile von $\mathfrak{A}$ natürlich einen durchaus andern Wert bekommen als wir für den bisher betrachteten Hülfsbegriff des *direct inducirten Potentiales* gefunden haben. Trotzdem werden die voraufgehenden Formeln einen bequemen Weg bieten, zur Aufstellung jenes endgültigen inducirten Potentiales zu gelangen. Wir denken uns zu dem Zwecke den endgültigen magnetischen Zustand in folgender Weise entstanden. Das gegebene Idiomagneticum, dessen Potential $V = V_{(xyz)}$ sei, inducire zunächst in jedem Körperelemente von $\mathfrak{A}$ in der Weise Magnetismus, als ob keine Einwirkung der Teile des Körpers $\mathfrak{A}$ unter einander stattfände; oder, präciser ausgedrückt, es werde zunächst in solcher Weise Magnetismus inducirt, dass das Potential desselben dem oben definirten *direct inducirten Potentiale* gleichkommt. Diesen Vorgang bezeichnen wir als den ersten Inductionsact. Das durch diesen ersten Act inducirte Potential bezeichnen wir, je nachdem der Punkt, auf welchen sich dasselbe bezieht, ein äusserer oder innerer ist, durch S_1 und V_1. Die Werte für S_1 und V_1 ergeben sich unmittelbar aus [b]. Es wird

$$S_1 = -K\iiint_{\mathfrak{A}}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T_a}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T_a}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T_a}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1 \qquad [c]$$

sein. Dabei soll der dem T hinzugefügte Index a andeuten, dass die Punkte (xyz), welche als die Centren der r zu betrachten sind, ausserhalb $\mathfrak{A}$ liegen. Es wird ferner sein

$$V_1 = -K\iiint_{\mathfrak{A}}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T_i}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T_i}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T_i}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1 \qquad [d]$$

worin der dem T hinzugefügte Index i andeuten soll, dass die T sich auf innere Punkte als Centren der r beziehen.

10. Bevor wir zum 2ten Inductionsact übergehen, wollen wir die für S_1 und V_1 gewonnenen Ausdrücke noch einer Umgestaltung

unterwerfen und dabei zugleich die Eigenschaften der Function V_1 etwas näher betrachten. Wir gehen dabei von einem bekannten Green'schen Satze aus, der z. B. von Beer in seiner „Einleitung in die Elektrost. etc." S. 15. bewiesen wird. Derselbe lautet: Sind G und H zwei Functionen der rechtwinkligen Coordinaten xyz, welche innerhalb eines Körpers $\mathfrak{A}$ endliche und stetige Werte aufweisen, so ist jederzeit

$$\iiint G\Delta^2 H dx dy dz = -\int G \frac{\partial H}{\partial \nu} d\sigma - \iiint \left\{ \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

worin das erste Integral rechter Hand über die Oberfläche von $\mathfrak{A}$, die beiden andern Integrale über den ganzen Raum von $\mathfrak{A}$ zu erstrecken sind; worin ferner $\Delta^2 H$ die übliche Bedeutung $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$ hat; $d\sigma$ ein Oberflächenelement und $\frac{\partial ..}{\partial \nu}$ eine Differentiation nach der innern Normale der Oberfläche bedeutet. Die von uns betrachteten Functionen V und T_a besitzen nun im Innern von $\mathfrak{A}$ die Eigenschaften der Stetigkeit und Endlichkeit. Wir können demnach auf diese beiden Functionen den angezogenen Green'schen Satz sofort anwenden, indem wir $G = T_a$ und $H = V$ setzen. Ersetzen wir noch die laufenden Coordinaten von $\mathfrak{A}$ durch $x_1 y_1 z_1$ und multipliciren alle drei Glieder des Green'schen Satzes mit K, so ist

$$K\iiint T_a \Delta^2 V dx_1 dy_1 dz_1 = -K\int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - K\iiint \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T_a}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

oder

$$K\iiint T_a \Delta^2 V dx_1 dy_1 dz_1 = -K\int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + S_1$$

Beachten wir ferner, dass nach bekanntem Satze $\Delta^2 V$ innerhalb $\mathfrak{A}$ gleich Null ist, so wird

$$S_1 = K\int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \qquad [e]$$

11. Aus dieser Formel für S ersehen wir nebenbei, dass der durch den ersten Inductionsact hervorgerufene Magnetismus in seiner Wirkung auf äussere Punkte ersetzt werden kann durch eine gewisse fingirte Oberflächenbelegung des Körpers, deren Dichtigkeit η_1 sofort anzugeben ist als

$$\eta_1 = K \frac{\partial V}{\partial \nu} \qquad [f]$$

Würde beispielsweise der Körper $\mathfrak{A}$ ein prismatischer Stab sein, dessen Axe normal zu den Flächen constanten Potentiales eines unendlich weit entfernten Idiomagneticums läge, so ist leicht zu übersehen, dass in diesem Falle der durch den ersten Inductionsact inducirte Magnetismus sich ersetzen lassen würde durch eine Belegung der beiden Endflächen.

12. Eine ähnliche Umformung des in 9. gewonnenen Ausdrucks für V_1 ist nicht ohne Weiteres auszuführen, da die Function T_i im Innern von $\mathfrak{A}$ unendlich gross wird. Wir benutzen daher folgendes bekannte Hülfsmittel. Um einen inneren Punkt (xyz), für welchen wir den Wert von V_1 ermitteln wollen, legen wir eine Kugel $\mathfrak{K}$ von sehr kleinem Radius, und bezeichnen das übrige Stück von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$, so dass

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{K}$$

ist. Alsdann wird

$$V_1 = (\mathfrak{B}) + (\mathfrak{K}) \qquad [g]$$

sein, wenn man

$$(\mathfrak{B}) = -K \int_{\mathfrak{B}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

und

$$(\mathfrak{K}) = -K \int_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

setzt, wo die Integrationen über die Räume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ zu erstrecken sind. Was zunächst den Ausdruck für $(\mathfrak{B})$ betrifft, so übersehen wir dass $\Delta^2(\mathfrak{B}) = 0$ sein muss, da $(\mathfrak{B})$ für den im Innern der Kugel $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkt xyz als ein Potential äusserer Massen zu betrachten ist. Aus demselben Grunde ist auch $(\mathfrak{B})$ sammt seinen ersten Ableitungen innerhalb $\mathfrak{K}$ endlich und stetig. Ausserdem sind in dem Ausdrucke für $(\mathfrak{B})$ V und T_i zwei Functionen, welche innerhalb $\mathfrak{B}$ endliche und stetige Werte besitzen. Wir können auf $(\mathfrak{B})$ daher den obigen Green'schen Satz (10) anwenden und erhalten

$$(\mathfrak{B}) = K \int_{\mathfrak{B}} T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma$$

Die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ besteht aus den beiden Oberflächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}$. Wenn wir demnach eine Differentiation nach der äusseren Normale der Kugel $\mathfrak{K}$ durch $\frac{\partial ..}{\partial N}$ bezeichnen, so wird

$$(\mathfrak{B}) = K \int_{\mathfrak{A}} T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + K \int_{\mathfrak{K}} T_i \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma \qquad [h]$$

Rücksichtlich des Ausdruckes für ($\mathfrak{K}$) können wir bei sehr klein gedachtem Radius der Kugel ohne erheblichen Fehler die Werte $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial y_1}$, $\frac{\partial V}{\partial z_1}$ als constant betrachten und vor das Integrationszeichen setzen, so dass

$$(\mathfrak{K}) = -K\frac{\partial V}{\partial x_1}\int\frac{\partial T_i}{\partial x_1}dx_1dy_1dz_1 - K\frac{\partial V}{\partial y_1}\int\frac{\partial T_i}{\partial y_1}dx_1dy_1dz_1 - K\frac{\partial V}{\partial z_1}\int\frac{\partial T_i}{\partial z_1}dx_1dy_1dz_1.$$

Nach einem bekannten Satze über das Potential einer homogenen Kugel auf innere Punkte ist nun

$$\int\frac{\partial T_i}{\partial x_1}dx_1dy_1dz_1 = \frac{4\pi}{3}(x-a)$$

$$\int\frac{\partial T_i}{\partial y_1}dx_1dy_1dz_1 = \frac{4\pi}{3}(y-b)$$

$$\int\frac{\partial T_i}{\partial z_1}dx_1dy_1dz_1 = \frac{4\pi}{3}(z-c)$$

wenn a, b, c die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel bedeuten. Substituiren wir diese Werte in den letzten Ausdruck für ($\mathfrak{K}$) und vertauschen gleichzeitig $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $\frac{\partial V}{\partial y_1}$, $\frac{\partial V}{\partial z_1}$ mit $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, was offenbar für die Ausdehnung der kleinen Kugel erlaubt ist, so wird

$$(\mathfrak{K}) = -K\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\partial V}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial V}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial V}{\partial z}(z-c)\right\}$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck in Klammern ist aber bei äusserst klein gedachtem Radius der Kugel nichts Anderes als das vollständige Differential von V. Daher kann man die vorige Gleichung auch schreiben

$$(\mathfrak{K}) = -K\frac{4\pi}{3}(V_{(xyz)} - V_{(abc)}) \qquad [i]$$

Hieraus folgern wir zunächst, dass $\Delta^2(\mathfrak{K}) = 0$ ist, denn es ist $\Delta^2 V = 0$; ferner sehen wir, dass ($\mathfrak{K}$) und seine ersten Ableitungen endliche Werte haben müssen.

Lassen wir nun den Radius der kleinen Kugel $\mathfrak{K}$ bis zum vollständigen Verschwinden abnehmen, so erhält in dem obigen Ausdrucke für ($\mathfrak{B}$) das Integral $\int\limits_{\mathfrak{K}} T_i\frac{\partial V}{\partial N}d\sigma$ den Wert Null und in dem

Ausdrucke für $(\mathfrak{R})$ fällt der Punkt (xyz) mit (abc) zusammen, so dass $(\mathfrak{R}) = 0$ wird. Demnach wird

$$V_1 = (\mathfrak{B}) + (\mathfrak{R}) = K \int_{\mathfrak{A}} T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \qquad [k]$$

13. Die letzte Gleichung lässt sich mit Hülfe eines bekannten Green'schen Satzes noch anders ausdrücken. Ist nämlich Φ eine Function, welche sammt ihren ersten Ableitungen innerhalb eines Körpers $\mathfrak{A}$ endlich und stetig bleibt, und ausserdem der Bedingung Genüge leistet $\Delta^2 \Phi = 0$, so besagt jener Satz, dass für einen im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegenen Punkt i jederzeit

$$\int \left\{ \Phi \frac{\partial T_i}{\partial \nu} - T_i \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\} d\sigma = 4\pi \Phi_i$$

ist, wenn man unter T_i die reciproke Entfernung des innern Punktes i von dem Oberflächenelement $d\sigma$ versteht. Die Anwendung dieses Satzes auf den obigen Ausdruck für V_1 ergibt

$$V_1 = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V \qquad [l]$$

14. In 12. sahen wir, dass die beiden Teile von V_1 $(\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{R})$ innerhalb $\mathfrak{A}$ sammt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig waren und der Gleichung $\Delta^2 = 0$ genügten. Dasselbe gilt daher von V_1.

15. Das bisherige Ergebniss lautet demnach zusammengefasst: Steht ein magnetisirbarer Körper $\mathfrak{A}$ unter dem Einfluss äusserer unveränderlicher Kräfte, so ist das durch den ersten Inductionsact inducirte, oder anders ausgedrückt das *direct inducirte Potential* (s. 2.) auf äussere Punkte

$$S_1 = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \qquad [m]$$

und dasjenige auf innere Punkte

$$V_1 = K \int T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma = 4\pi K V \qquad [n]$$

Dem Potentiale V_1 kommen innerhalb $\mathfrak{A}$ dieselben Haupteigenschaften zu, wie dem ursprünglichen Potentiale V.

16. Wir gehen nun zu einem weiteren Stadium der Magnetisirung des Körpers $\mathfrak{A}$ über. Durch den ersten Inductionsact ist in demselben ein gewisses Quantum Magnetismus inducirt worden, das rücksichtlich seiner Wirkung auf innere Punkte vollständig definirt ist durch das Potential V_1. Diese hinzugekommenen magnetischen Kräfte werden nun eine neue inducirende Wirkung auf den Körper $\mathfrak{A}$ üben und wir

stellen uns vor, dass diese neue Induction wieder in der Weise vor sich ginge, als ob dabei keine weitere Einwirkung der einzelnen Teile von 𝔄 untereinander stattfände; oder, mit andern Worten, es mögen diejenigen magnetischen Kräfte, deren Potential V_1 ist, in der Weise Magnetismus induciren, dass das Potential desselben dem durch V_1 *direct inducirten Potentiale* gleichkommt. Diesen Vorgang nennen wir den 2ten Inductionsact.

17. Da wir gesehen haben, dass V_1 innerhalb 𝔄 dieselben allgemeinen Eigenschaften besitzt, welche für V erforderlich waren, um die Aufstellung der Ausdrücke für S_1 und V_1 zu ermöglichen, so können wir nun unmittelbar das Resultat in 15. benutzen, um dasjenige *direct inducirte Potential* aufzustellen, welches durch die inducirenden magnetischen Kräfte mit dem Potentiale V_1 hervorgerufen wird. Dasselbe wird für äussere Punkte

$$S_2 = K\int T_a \frac{\partial V_1}{\partial \nu} d\sigma \qquad [o]$$

und für innere Punkte

$$V_2 = K\int T_i \frac{\partial V_1}{\partial \nu} d\sigma \qquad [p]$$

oder

$$V_2 = K\int V_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V_1$$

18. Durch dieselbe Beweisführung wie sie in 12. und 14. gegeben ist, sehen wir, dass dem Potentiale V_2 innerhalb 𝔄 dieselben allgemeinen Eigenschaften zukommen müssen, wie dem V_1 und V.

19. Nach vollendetem 2ten Inductionsacte besitzt der Körper 𝔄 Magnetismus, dessen Gesammtpotential auf äussere Punkte

$$S_1 + S_2$$

und auf innere Punkte

$$V_1 + V_2 \text{ ist.}$$

20. Die nun folgenden weiteren Inductionsacte lassen wir in gleicher Weise darin bestehen, dass die durch den jedesmal voraufgegangenen Inductionsact neu inducirten Magnetismen ihrerseits auf's Neue Magnetismus induciren, was immer in der Weise zu denken ist, als ob während eines Inductionsactes keine Einwirkung der einzelnen Teile von 𝔄 unter einander stattfände. Der 3te, 4te, 5te etc. Inductionsact besteht also darin, dass in Folge der Potentiale resp. V_2, V_3, V_4 etc. die *direct inducirten Potentiale* resp. V_3, V_4, V_5 etc. hervorgerufen werden.

21. Nach n Inductionsacten wird somit der Körper 𝔄 ein Potential Q_a auf äussere Punkte besitzen, dessen Wert

$$Q_a^{(n)} = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n \qquad [q]$$

ist; und es wird der Körper $\mathfrak{A}$ auf innere Punkte ein Potential Q^i besitzen, dessen Wert

$$Q_i^{(n)} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n \qquad [r]$$

ist. Hierin ist

$$V_1 = K \int T_i \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V$$

und allgemein

$$V_h = K \int T_i \frac{\partial V_{h-1}}{\partial \nu} d\sigma = K \int V_{h-1} \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K V_{h-1} \qquad [s]$$

ferner

$$S_1 = K \int T_a \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma$$

und allgemein

$$S_h = K \int T_a \frac{\partial V_{h-1}}{\partial \nu} d\sigma \qquad [t]$$

Den Ausdruck für $Q_a^{(n)}$ können wir unter Berücksichtigung von [t] auch schreiben

$$Q_a^{(n)} = K \int T_a \frac{\partial (V + V_1 + V_2 + \ldots V_n)}{\partial \nu} d\sigma$$

woraus mit Rücksicht auf [r]

$$Q_a^{(n)} = K \int T_a \frac{\partial (V + Q_i^{(n)})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [u]$$

wird. Desgleichen kann der Ausdruck für $Q_i^{(n)}$ geschrieben werden

$$Q_i^{(n)} = K \int T_i \frac{\partial (V + V_1 + V_2 + \ldots V_n)}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$Q_i^{(n)} = K \int T_i \frac{\partial (V + Q_i^{(n)})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [v]$$

22. Indem wir nun mit Beer die Annahme machen, dass für $n = \infty$ (oder nach unendlich vielen Inductionsacten) der im Körper $\mathfrak{A}$ nach unserm fingirten Verfahren hervorgerufene magnetische Zustand mit demjenigen identisch wird, welcher in Wirklichkeit eintritt, und indem wir die dem wirklichen Zustände entsprechenden inducirten Potentiale resp. auf einen äusseren und inneren Punkt mit Q_a und Q_i bezeichnen, erhalten wir:

$$Q_i = V_1 + V_2 + \ldots \text{ in inf.}$$
$$Q_a = S_1 + S_2 + \ldots \text{ in inf.}$$

$$Q_a = K\int T_a \frac{\partial(V+V_1+V_2+\ldots \text{ in inf.})}{\partial\nu}\,d\sigma$$

oder

$$Q_a = K\int T_a \frac{\partial(V+Q_i)}{\partial\nu}\,d\sigma \qquad [w]$$

und ferner:

$$Q_i = K\int T_i \frac{\partial(V+V_1+V_2+\ldots \text{ in inf.})}{\partial\nu}\,d\sigma$$

oder

$$Q_i = K\int T_i \frac{\partial(V+Q_i)}{\partial\nu}\,d\sigma. \qquad [x]$$

Hierin sind die Functionen V nach dem recurrenten Gesetz (21. [s]) zu ermitteln.

23. Obwol das Problem des inducirten Magnetismus durch die Formeln [w] und [x] gelöst ist, nehmen wir doch noch eine Umgestaltung derselben vor, um eine bessere Vergleichung derselben mit den von Beer, Neumann und Poisson gefundenen Resultaten anstellen zu können. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem Ausdrucke $V+Q_i = V+V_1+V_2+\ldots$ diejenigen Werte wirklich ein, welche sich aus [s] ergeben. Es war

$$V_1 = K\int V\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma - 4\pi K V$$

Setzen wir zur Abkürzung $\lambda = 4\pi K$, so wird

$$V_1 = \lambda\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma - \lambda V$$

oder auch

$$V_1 = -\lambda V + \lambda\frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma$$

Ebenso wird [y]

$$V_2 = -\lambda V_1 + \lambda\frac{1}{4\pi}\int V_1\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma$$

$$V_3 = -\lambda V_2 + \lambda\frac{1}{4\pi}\int V_2\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma$$

. . . .

Ausserdem wollen wir eine Reihenfolge neuer Functionen bilden durch die Abkürzungen

$$F_1 = \frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi}\int F_1\frac{\partial T_i}{\partial\nu}\,d\sigma \qquad [z]$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi}\int F_2 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

in welchen sämmtliche Functionswerte sich auf innere resp. an der innern Seite der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ gelegene Punkte beziehen. Durch Einführung dieser Functionen F in die Gleichungen [y] wird zunächst

$$V_1 = -\lambda V + \lambda F_1$$

Indem wir diesen Ausdruck substituiren in die Gleichung [y] für V_2, wird

$$V_2 = -\lambda(-\lambda V + \lambda F_1) - \lambda^2 \frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma + \lambda^2 \frac{1}{4\pi}\int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$V_2 = \lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung für V_3 ergibt

$$V_3 = -\lambda(\lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2) + \lambda^3 \frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$
$$-2\lambda^3 \frac{1}{4\pi}\int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma + \lambda^3 \frac{1}{4\pi}\int F_2 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

oder

$$V_3 = -\lambda^3 V + 3\lambda^3 F_1 - 3\lambda^3 F_2 + \lambda^3 F_3$$

Wir übersehen bereits das Gesetz, nach welchem die Bildung dieser Formeln fortschreitet, und erhalten

$$\begin{aligned}
V &= V \\
V_1 &= -\lambda V + \lambda F_1 \\
V_2 &= \lambda^2 V - 2\lambda^2 F_1 + \lambda^2 F_2 \\
V_3 &= -\lambda^3 V + 3\lambda^3 F_1 - 3\lambda^3 F_2 + \lambda^3 F_3 \\
V_4 &= \lambda^4 V - 4\lambda^4 F_1 + 6\lambda^4 F_2 - 4\lambda^4 F_3 + \lambda^4 F_4 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Durch Addition der Verticalcolumnen ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
V + Q_i = V&(1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \ldots) \\
&+ F_1(1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \ldots)\lambda \\
&+ F_2(1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \ldots)\lambda^2 \\
&+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \ldots = \frac{1}{1+\lambda}$$

$$1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \ldots = \frac{1}{(1+\lambda)^2}$$

$$1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \ldots = \frac{1}{(1+\lambda)^3}$$

. . . .

und setzen wir gleichzeitig

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = \varkappa; \qquad \lambda = \frac{\varkappa}{1-\varkappa}$$

so wird

$$V + Q_i = (1-\varkappa)\{V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \varkappa^3 F_3 + \ldots \text{ in inf.}\} \qquad [aa]$$

24. Durch Substituirung dieser Gleichung [aa] werden die Gleichungen [w] und [x], indem wir berücksichtigen, dass

$$K = \frac{1}{4\pi}\lambda = \frac{1}{4\pi}\frac{\varkappa}{1-\varkappa} \qquad [bb]$$

$$Q_a = \frac{\varkappa}{4\pi}\int T_a \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \ldots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [cc]$$

$$Q_i = \frac{\varkappa}{4\pi}\int T_i \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \ldots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [dd]$$

25. Das gewonnene Resultat sprechen wir so aus:

I. Steht ein magnetisirbarer Körper $\mathfrak{A}$ unter dem Einfluss unveränderlicher äusserer Kräfte, deren Potential V ist, so ist das inducirte Potential bezogen auf einen beliebigen Punkt (xyz)

$$Q_{(xyz)} = \frac{\varkappa}{4\pi}\int_{\mathfrak{A}} T_{(xyz)} \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \ldots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [ee]$$

worin die Integration über die Oberfläche des Körpers $\mathfrak{A}$ zu erstrecken ist; T die reciproke Entfernung des Oberflächenelementes $d\sigma$ von dem Punkte (xyz) bedeutet; unter $\frac{\partial ..}{\partial \nu}$ eine Differentiation nach der innern Normale von $\mathfrak{A}$ verstanden ist; und worin die Functionen F nach dem recurrenten Gesetze [z] aus dem gegebenen V abzuleiten sind.

II. Die Wirkung des inducirten Magnetismus auf einen äusseren oder inneren Punkt kann ersetzt werden durch die Wirkung einer fingirten einfachen Oberflächenbelegung, für deren Dichtigkeit die Formel gilt

$$H = \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \ldots \text{ in inf.})}{\partial \nu} \qquad [ff]$$

§ 2.

Vergleichung des im vorigen § gefundenen Resultates mit demjenigen von C. Neumann.

1. In dem jüngst erschienenen Werke von C. Neumann „Untersuchungen über das Newton'sche und logarithmische Potential" heisst es S. 247. u. ff.:

„Wirken auf einen magnetisirbaren Körper (der z. B. aus weichem „Eisen bestehen kann) von Aussen her unveränderliche magnetische „Kräfte ein, deren Potential F gegeben ist, so kann das sogenannte „inducirte Potential Q stets angesehen werden als das Potential einer „gewissen fingirten einfachen Belegung der Oberfläche des Körpers, „deren Dichtigkeit den Wert hat

$$K\frac{\partial(Q+F)}{\partial\nu}$$

„so dass also für sämmtliche Punkte i und a die Formeln gelten:

$$Q_i = K\int T_i \frac{\partial(Q+F)}{\partial\nu}\,d\sigma$$

$$Q_a = K\int T_a \frac{\partial(Q+F)}{\partial\nu}\,d\sigma$$

„Von diesen beiden Formeln ist bereits die erstere ausreichend, um „das Potential Q und die Dichtigkeit $K\frac{\partial(Q+F)}{\partial\nu}$ eindeutig zu be- „stimmen."

Neumann findet sodann auf S. 250. die Werte:

$$Q_i = (1-\varkappa)\{F_i + \varkappa F_i' + \varkappa^2 F_i'' + \ldots\} - F_i \qquad \text{[a]}$$

$$K\frac{\partial(Q+F)}{\partial\nu} = \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\partial(F+\varkappa F'+\varkappa^2 F''+\ldots)}{\partial\nu} \qquad \text{[b]}$$

worin durch $\frac{\partial ..}{\partial\nu}$ eine Differentiation nach der innern Normale von $\mathfrak{A}$ verstanden ist; $d\sigma$ ein Oberflächenelement bedeutet; zwischen den Constanten $\varkappa$ und K die Beziehung stattfindet

$$K = \frac{\varkappa}{4\pi(1-\varkappa)} \qquad \text{[c]}$$

und worin die Functionen F_i', F_i'', ... nach folgendem Gesetze zu ermitteln sind

$$F_i = F$$

$$F_i' = \frac{1}{4\pi}\int F \frac{\partial T_i}{\partial \nu}\, d\sigma \qquad [d]$$

$$F_i'' = \frac{1}{4\pi}\int F' \frac{\partial T_i}{\partial \nu}\, d\sigma$$

. . . .

2. Wie sofort zu übersehen ist, befinden sich die Neumann'schen Formeln in vollständiger Uebereinstimmung mit denjenigen des vorigen §, sobald wir die frühere Bezeichnungsweise

$$V;\quad F_1;\quad F_2;\ \ldots$$

resp. ändern in

$$F;\quad F_i';\quad F_i'';\ \ldots$$

3. Eine Vergleichung dieser Resultate mit den von Poisson gegebenen Gleichungen findet sich in dem genannten Neumann'schen Werke auf S. 261. und 262. Daraus ergibt sich, dass die von Poisson (Mém. de l'Acad. S. 294. 302. 303.) aufgestellten Formeln

$$Q = \iiint \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}(k\alpha) + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta}(k\beta) + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta}(k\gamma) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad [e]$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \beta &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \gamma &= \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \qquad [f]$$

$$V + Q + \frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi = 0 \qquad [g]$$

$$Q = -k\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{d\sigma}{\varrho} \qquad [h]$$

sich in vollständiger Uebereinstimmung mit denjenigen Formeln befinden, von welchen Neumann bei seiner Entwickelung ausgegangen ist. Es zeigt sich, dass die ursprüngliche Neumann'sche Constante K zur Poisson'schen k in der Beziehung steht

$$K = \frac{3k}{4\pi(1-k)} \qquad [i]$$

oder dass zwischen dem Neumann'schen $\varkappa$ und dem Poisson'schen k zufolge der Gleichung

$$K = \frac{\varkappa}{4\pi(1-\varkappa)}$$

die Beziehung besteht

$$\varkappa = \frac{3k}{1+2k} \qquad [k]$$

4. Da nun die Constanten $\varkappa$ und K des vorigen § sich als identisch mit denselben von Neumann gebrauchten Constanten erwiesen haben, so gelten mithin für unsere beiden Constanten $\varkappa$ und K dieselben Beziehungen zum Poisson'schen k.

5. Diese Beziehungen zwischen den Constanten können wir zu einer teilweisen Prüfung der Richtigkeit unserer Entwickelung resp. unserer Voraussetzungen benutzen. Es ist nämlich klar, dass wir zu denselben Beziehungen gelangen müssen, wenn wir unsere Ausgangsformel (§ 1. [a]) direct mit den Poisson'schen Gleichungen vergleichen. Aus der Poisson'schen Formel [e] folgt, wenn wir die Bezeichnung $\frac{1}{\varrho}$ mit T und $\xi\eta\zeta$ mit $x_1y_1z_1$ vertauschen, für das inducirte Potential eines Körperelementes

$$q = \left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}(k\alpha) + \frac{\partial T}{\partial y_1}(k\beta) + \frac{\partial T}{\partial z_1}(k\gamma)\right\} dx_1dy_1dz_1 \qquad [l]$$

Diese Formel muss identisch werden mit unserer Formel (§ 1. [a])

$$u = -K\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1dy_1dz_1 \qquad [m]$$

sobald wir annehmen, dass sich der Ausdruck für q auf ein für sich allein gedachtes Körperelement bezieht oder mit andern Worten, wenn wir den Fall fingiren, dass von Seiten des g a n z e n Körpers $\mathfrak{A}$ keine Einwirkung auf das betrachtete Körperelement stattfinde. Unter dieser Voraussetzung geht dann offenbar die Poisson'sche Gleichung [g] über in

$$V + \frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi = 0 \qquad [n]$$

woraus

$$\varphi = -\frac{3}{4\pi(1-k)}V \qquad [o]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \alpha = -\frac{3}{4\pi(1-k)}\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = \beta = -\frac{3}{4\pi(1-k)}\frac{\partial V}{\partial y_1} \qquad [p]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} = \gamma = -\frac{3}{4\pi(1-k)}\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

folgt. Durch Substitution dieser Werte in [l] wird

$$q = -\frac{3k}{4\pi(1-k)}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T}{\partial z_1}\right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

Dieser Ausdruck ist sonach identisch mit unserer Formel [m] und es ergibt sich zwischen den Constanten K und k wieder die frühere Beziehung

$$K = -\frac{3k}{4\pi(1-k)}$$

§ 3.

Vergleichung der im § 1. gegebenen Entwickelung mit derjenigen Beer's.

1. In seinem Werke „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik" entwickelt Beer auf S. 151. und 152. eine Formel für das inducirte Potential eines einzelnen Körperelementes. Er geht dabei von derselben in § 1. 2. gemachten ersten Voraussetzung aus, dass das Potential eines Körperelementes für Punkte in endlicher Entfernung von derselben Form sei, wie dasjenige eines permanenten Magneten in Bezug auf Punkte in unendlich grosser Entfernung. Anstatt der zweiten in § 1. 2. gemachten Voraussetzung nimmt Beer an, dass das fragliche Potential proportional sei der Menge des inducirenden Idiomagneticums. Er gelangt mit Hülfe dieser Voraussetzungen in ähnlicher Weise wie Green (Crelle Journ. Bd. 47. S. 196.) zu dem Ausdruck (s. S. 156.)

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}+\frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\right\} dk \qquad [a]$$

Die Herleitung dieses Ausdruckes ist unabhängig von der Vorstellung der Poisson'schen magnetischen Elemente gemacht; und steht der Ausdruck mit unserer Formel (§ 1. [a]) der Form nach in vollständiger Uebereinstimmung, wenn man statt der Beer'schen Constanten $\frac{1}{\alpha^2}$ unsere Constante K setzt und noch die Schreibweise dk durch die ausführlichere $dx_1 dy_1 dz_1$ ersetzt. Bei der weiteren Entwickelung kommt nun aber die Vorstellung der magnetischen Elemente wieder zum Vorschein*). Beer denkt sich nämlich die Induction

*) Die Abwechselung der Ausdrücke Körperelement, Volumenelement, Element, Molecül ist bei Beer nicht als zufällig zu betrachten. Es bedeuten die drei ersten Ausdrücke allerdings dasselbe, was wir bisher als Körperelement $dx\,dy\,dz$ bezeichnet haben. Dagegen ist unter dem Molecül ein Poisson'sches „magnetisches Element" zu verstehen.

des Körpers $\mathfrak{A}$ durch äussere Massen mit dem Potentiale V in folgender Weise entstanden. Es werde zunächst in der Weise Magnetismus inducirt, als ob keine gegenseitige Einwirkung der magnetischen Elemente unter einander stattfände. Diesen Vorgang bezeichnet Beer als den ersten Inductionsact. Die Möglichkeit der gegenseitigen Einwirkung der einzelnen Teile eines und desselben magnetischen Elementes bleibt hierbei vorhanden. Ohne sich indessen über diese Vorstellungsweise genauer auszudrücken, nimmt Beer den obigen Ausdruck [a] als das Potential eines Körperelementes nach vollendetem 1sten Inductionsact an. Unmittelbar folgt daraus das Potential des im ersten Inductionsact in $\mathfrak{A}$ erzeugten Magnetismus bezogen auf äussere Punkte

$$S = -\frac{1}{\alpha^2}\int\left\{\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right\}dk \qquad [b]$$

Nunmehr geht Beer zum 2ten Inductionsact über. Derselbe besteht darin, dass in jedem einzelnen magnetischen Elemente ein weiteres Quantum Magnetismus dadurch erzeugt wird, dass die übrigen magnetischen Elemente eine inducirende Wirkung auf dasselbe ausüben in Folge des ihnen durch den ersten Inductionsact verliehenen Magnetismus. Um diese Wirkung analytisch ausdrücken zu können, ermittelt Beer (s. S. 158.) eine gewisse Function V_1, welche er gleichsetzt dem auf die Punkte e i n e s magnetischen Elementes bezogenen Potentiale der ü b r i g e n magnetischen Elemente; wobei dies Potential als zugehörig betrachtet wird dem durch den ersten Inductionsact erzeugten Magnetismus. Indem Beer nun dieser Function V_1 während des 2ten Inductionsactes genau dieselbe Rolle zuweist wie dem Potentiale V beim ersten Act, gewinnt er für dasjenige Potential eines Körperelementes, welches in Folge des 2ten Actes dem schon früher vorhandenen hinzuzufügen ist, den analogen Ausdruck

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V_1}{\partial y'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V_1}{\partial z'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right\}dk$$

Hieraus folgt dann wieder unmittelbar, dass das Potential des Körpers $\mathfrak{A}$ auf äussere Punkte in Folge des 2ten Inductionsactes zu vermehren ist um

$$S_1 = -\frac{1}{\alpha^2}\int\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V_1}{\partial y'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V_1}{\partial z'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right\}dk$$

Sodann wird wiederum eine Function V_2 ermittelt, welche, bezogen auf die Punkte e i n e s magnetischen Elementes, gleich gesetzt werden kann demjenigen Potentiale der ü b r i g e n magnetischen Elemente,

welches ihnen zukommt durch den beim 2ten Inductionsact in ihnen hervorgerufenen Magnetismus. Der 3te, 4te, 5te Inductionsact besteht in analoger Weise darin, dass in jedem magnetischen Element auf's Neue ein Quantum Magnetismus erzeugt wird und zwar durch diejenigen magnetischen Quanta, welche in den übrigen magnetischen Elementen während des voraufgehenden resp. 2ten, 3ten, 4ten etc. Inductionsactes hervorgerufen waren. Durch eine unendliche Anzahl aufeinanderfolgender Inductionsacte wird das Potential des Körpers 𝔄 auf äussere Punkte successive vermehrt um $S_2, S_3, \ldots$ Das inducirte Potential wird mithin

$$T = S + S_1 + S_2 + \ldots \text{ in inf.} \qquad [c]$$

Ausserdem sieht man, dass der endgültige magnetische Zustand der einzelnen magnetischen Elemente als eine Ueberlagerung aller derjenigen Magnetismen angesehen werden kann, welche successive durch die Potentiale $V\, V_1\, V_2 \ldots$ in ihnen erzeugt waren. Diese letztere Bemerkung drückt Beer so aus (S. 158.): „In dem durch das Potential „V influencirten Körper tritt ein magnetischer Zustand ein, wie er „auch einträte, wenn eine gegenseitige Einwirkung der Molecüle nicht „stattfände und das einzelne Element dem folgenden Potentiale aus„gesetzt würde

$$U = V + V_1 + V_2 + \ldots + C.\text{“} \qquad [d]$$

Die Beer'schen Functionen T und U laufen, wie man sofort bemerken wird, parallel den Functionen Q_a und $(Q_i + V)$ des § 1.

2. In ähnlicher Weise wie in § 1. unterwirft Beer den Ausdruck für U einer Umgestaltung und findet auf S. 162

$$U = \frac{3 - 2\varkappa}{3} (V + \varkappa V' + \varkappa^2 V'' + \ldots) + C \qquad [e]$$

worin die Constante $\varkappa$ zu seiner ursprünglichen Constanten $\frac{1}{\alpha^2}$ in der Beziehung

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\varkappa}{3 - 2\varkappa} \qquad [f]$$

steht; worin C eine willkürliche Constante ist; und worin die unsern früheren Functionen $F_1 F_2 \ldots$ parallel laufenden Functionen $V' V'' \ldots$ nach dem recurrenten Gesetz zu ermitteln sind

$$\begin{aligned} V &= V \\ V' &= -\frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = V - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} ds \\ V'' &= -\frac{1}{4\pi} \int V' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = V' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} ds \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad [g]$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass unter $\frac{\partial ..}{\partial n}$ die Differentiation nach der äusseren Normale der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ und unter ds ein Oberflächenelement von $\mathfrak{A}$ verstanden ist.

Für die Function T findet Beer die Formeln (s. S. 162)

$$T = -\frac{3\varkappa}{4\pi(3-2\varkappa)}\int\frac{\partial U}{\partial n}\frac{1}{r}ds$$

oder [h]

$$T = -\frac{\varkappa}{4\pi}\int\frac{\partial(V+\varkappa V'+\varkappa^2 V''+\ldots)}{\partial n}\frac{1}{r}ds$$

Hieraus folgt ähnlich wie in § 1. 25., dass die Wirkung des inducirten Magnetismus auf äussere Punkte ersetzt werden kann durch eine gewisse fingirte einfache Oberflächenbelegung, als deren Dichtigkeit sich ergibt:

$$\varrho = -\frac{3\varkappa}{4\pi(3-2\varkappa)}\frac{\partial U}{\partial n}$$

oder [i]

$$\varrho = -\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{\partial(V+\varkappa V'+\varkappa^2 V''+\ldots)}{\partial n}$$

3. Vergleichen wir nun zunächst die Formeln [h] und [i] mit den entsprecqenden [cc] und [ff] des § 1., so bemerken wir, dass dieselben nicht ohne Weiteres übereinstimmen; denn es sind die Differentiationen bei Beer nach der äusseren Normale zu bilden. Es lässt sich mit den Beer'schen Formeln aber eine Umgestaltung vornehmen, durch welche dieselben mit denen des § 1. völlig zusammenstimmend werden. Obwol die Functionen V', V'', ... einer Differentiation nach der äusseren Normale unterzogen werden, so geht doch aus der von Beer auf S. 161. gegebenen Entwickelung hervor, dass dieselben sich auf innere Punkte beziehen. Daher können wir die Formeln [g] unter Anwendung unserer früheren Bezeichnungsweise $\frac{1}{r} = T$, und unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial T_i}{\partial n} = -\frac{\partial T_i}{\partial \nu}$ ist, auch so schreiben

$$V = V$$

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int V\frac{\partial T_i}{\partial \nu}d\sigma \qquad [k]$$

$$V'' = \frac{1}{4\pi}\int V'\frac{\partial T_i}{\partial \nu}d\sigma$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

In dieser Form erkennt man, dass V' V''... als die Potentiale einer

auf der Oberfläche von 𝔄 ausgebreiteten Doppelbelegung angesehen werden können. Daher ist es erlaubt zu setzen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial n} &= -\frac{\partial V}{\partial \nu} \\
\frac{\partial V'}{\partial n} &= -\frac{\partial V'}{\partial \nu} \\
\frac{\partial V''}{\partial n} &= -\frac{\partial V''}{\partial \nu} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad [l]$$

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen [l] werden die Formeln [h] und [i], wenn wir noch das Beer'sche T mit dem früheren Q_a vertauschen:

$$\begin{aligned}
Q_a &= \frac{\varkappa}{4\pi}\int T_a \frac{\partial(V+\varkappa V'+\varkappa^2 V''+\ldots)}{\partial \nu}\, d\sigma \\
\varrho &= \frac{\varkappa}{4\pi}\,\frac{\partial(V+\varkappa V'+\varkappa^2 V''+\ldots)}{\partial \nu}
\end{aligned} \qquad [m]$$

und zwar haben zufolge der Gleichungen [k] die hier auftretenden Functionen $V'\,V''\ldots$ genau dieselbe Bedeutung wie die Functionen $F_1 F_2 \ldots$ des § 1.

Die Beer'schen Formeln [h] und [i] stehen demnach in vollständiger Uebereinstimmung mit den Formeln [cc] und [ff] des § 1. Eine der Formel [dd] entsprechende Gleichung lässt sich indessen aus den Beer'schen Resultaten nicht direct ableiten.

4. **Zusatz.** Da sich aus 3. zugleich die Identität des Beer'schen $\varkappa$ mit dem unsrigen ergibt, so wird dadurch unter Berücksichtigung von § 2. [k] die von Beer auf S. 169. angegebene Beziehung seiner Constanten $\varkappa$ zur Poisson'schen k, nämlich

$$\varkappa = \frac{3k}{1+2k} \qquad [n]$$

verificirt.

5. Vergleichen wir nun ferner die Fundamentalformeln § 1. [a] und § 3. [a]

$$\begin{aligned}
&-K\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T}{\partial z_1}\right\} dx_1 dy_1 dz_1 \\
&-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial T}{\partial y'}+\frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial T}{\partial z'}\right\} dk
\end{aligned} \qquad [o]$$

so stimmen dieselben der Form nach zwar ebenfalls überein; sie zeigen indessen eine Abweichung in Bezug auf ihre Constanten. Denn während unsere Constante K zu dem $\varkappa$ des Endresultates in der Beziehung steht:

$$K = \frac{1}{4\pi} \frac{\varkappa}{1-\varkappa}$$

steht die Beer'sche Constante $\frac{1}{\alpha^2}$ zu demselben $\varkappa$ in der Beziehung:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{3\varkappa}{3-2\varkappa} \qquad [p]$$

Würden wir annehmen, dass die beiden Formeln [o] genau dieselbe Bedeutung hätten, so würde jene Abweichung zwischen den Constanten ihre Erklärung nur in einem entweder von uns oder von Beer gemachten analytischen Fehler finden können. Wie sich indessen zeigen wird, haben jene beiden Formeln [o] in der Tat eine verschiedene Bedeutung.

6. Die Beer'sche Entwickelung des inducirten Potentiales stützt sich wie wir gesehen haben fortdauernd auf die Vorstellung der magnetischen Elemente, während die Darstellung des § 1. durch die Definition des *direct inducirten Potentiales* eines Körperelementes für die weitere mathematische Analyse jene Vorstellung beseitigte. Es mag hier zugegeben werden, dass die ursprüngliche Vorstellung über den inducirten magnetischen Zustand bei Beer eine leichter aufzufassende ist, als die unserer Definition zu Grunde liegende. Wenn wir es trotzdem vorzogen, von der letzteren auszugehen, so lag der Grund zum Teil freilich darin, dass wir durch unsere Darstellung eine möglichst vollständige Unabhängigkeit von der specifischen Vorstellung der magnetischen Elemente zu erzielen suchten; zum Teil aber auch darin, dass die Schwierigkeiten und Unsicherheiten, welche bei der Beer-schen Grundanschauung die weitere mathematische Entwickelung ziemlich stark afficiren, bei unserer Darstellung viel mehr vermieden werden konnten.

7. Der Einfluss, welchen die beständige Rücksichtnahme auf die Existenz der magnetischen Elemente bei Beer auf seine Rechnung ausübt, zeigt sich zuerst bei der Entwickelung der Formel für die oben (s. 1.) genannte Function V_1. Auf Seite 157. seines genannten Werkes stellt Beer die Formel auf für dasjenige Potential, welches in Bezug auf die Punkte eines magnetischen Elementes den übrigen magnetischen Elementen nach dem ersten Inductionsact zukommt. Er findet, dass dasselbe gleich

$$(\mathfrak{A}) - (\mathfrak{K})$$

ist, wenn nämlich $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{K})$ die Bedeutung haben:

$$(\mathfrak{A}) = -\frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathfrak{A}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk$$

und

$$(\mathfrak{K}) = -\frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathfrak{K}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z'}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dk.$$

Dabei ist die erste Integration über den ganzen Raum von $\mathfrak{A}$ zu erstrecken und die zweite über den Raum einer kleinen Kugel $\mathfrak{K}$, welche um einen Punkt des betrachteten magnetischen Elementes beschrieben ist. In etwas übersichtlicherer Weise als es bei Beer (S. 157.) geschieht, ergibt sich durch eine buchstäblich gleiche Entwickelung wie wir sie oben (§ 1. 12.) gaben,

$$(\mathfrak{K}) = -\frac{4\pi}{3\alpha^2}(V_{(xyz)} - V_{(abc)})$$

wo unter *abc* wieder die Coordinaten des Mittelpunktes der sehr klein gedachten Kugel und unter *xyz* diejenigen eines variabelen Punktes im Innern des betrachteten magnetischen Elementes verstanden sind. Wäre es Beer nun, wie bei unserer Darstellung im § 1., darauf angekommen, das Potential des ganzen Körpers $\mathfrak{A}$ auf einen innern Punkt (xyz) zu ermitteln, so hätte er bei verschwindendem Radius der Kugel $\mathfrak{K}$ in aller Strenge $V_{(xyz)} = V_{(abc)}$ setzen müssen, woraus $(\mathfrak{K}) = 0$ gefolgt wäre. Beer setzt dagegen

$$(\mathfrak{K}) = -\frac{4\pi}{3\alpha^2}V_{(xyz)}$$

und

$$(\mathfrak{A}) - (\mathfrak{K}) = (\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3\alpha^2}V$$

Indem er also die für das Bereich des betrachteten magnetischen Elementes freilich als constant zu betrachtende Grösse $\frac{4\pi}{3\alpha^2}V_{(abc)}$ fortlässt, substituirt er für den in Wirklichkeit unendlich kleinen Wert $(\mathfrak{K})$ einen solchen von endlicher Grösse $\frac{4\pi}{3\alpha^2}V$. Dies Verfahren findet seine Begründung durch die Bemerkung Beer's, „dass man für die „Wirkung im Innern des Molecüles (magnetischen Elementes) das „Potential des ausserhalb befindlichen magnetischen Fluidums ersetzen „könne durch die Function

$$V_1 = (\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3\alpha^2}V.“$$

Da nämlich V_1 bei der weiteren Bildung der Functionen V_2, V_3 ... nur insofern in Betracht kommt, als es sich um seine Differentialquotienten handelt, so ist es allerdings erlaubt eine willkürliche Constante fortzulassen. Wir haben die Function V_1 daher nicht geradezu als das Potential des ausserhalb des magnetischen Elementes befindlichen Fluidums zu betrachten, sondern als dieses Potential, vermindert um eine im Bereiche des magnetischen Elementes als constant zu betrachtende Grösse. Dieselben Bemerkungen sind in Bezug auf V_2, V_3 ... und die Summe derselben U zu machen. Macht es nun schon einige Mühe, sich in diese von Beer nur flüchtig skizzirte Auffassung seiner Functionen V_1, V_2 ... U und der dabei auftretenden eigentümlichen Constanten hineinzudenken, so kommt doch noch ein weiterer erschwerender Umstand hinzu. Die Functionen V_1, V_2 ... sind nämlich gebildet unter Zugrundelegung eines in der Vorstellung fixirten magnetischen Elementes und sind zunächst nur gültig im Bereiche eines solchen. Denn würde man für einen Punkt $\xi\eta\zeta$, der zwischen den magnetischen Elementen läge, das Potential des ausserhalb befindlichen magnetischen Fluidums bilden, so würde dieses den Wert $(\mathfrak{A})$ anstatt wie früher für den unmittelbar benachbarten Punkt (xyz) den Wert

$$(\mathfrak{A}) + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V$$

haben. Die Functionen V_1, V_2 ... erscheinen daher nicht ohne Weiteres als Functionen eines variabelen Punktes (xyz). Da sie aber als solche für die Begründung der späterhin mit ihnen vorgenommenen Umgestaltungen offenbar betrachtet werden müssen, so ist noch eine besondere Anschauungsweise erforderlich, welche allerdings durch folgende Abstraction gewonnen werden kann. Fassen wir die magnetischen Elemente als unendlich klein gegen die Dimensionen eines Körperelementes auf und dieses wieder als unendlich klein gegen den Körper $\mathfrak{A}$, so ist ersichtlich, dass man unter den dem Punkte xyz oder dem Körperelemente $dx\,dy\,dz$ zukommenden Werten V_1, V_2 ... nur die Mittelwerte der in den magnetischen Elementen des betreffenden Körperelementes vorhandenen Werte von V_1, V_2 ... zu verstehen braucht, um V_1, V_2 ... als Functionen der Stelle xyz auffassen zu können. Die hierin liegende Schwierigkeit ist übrigens von derselben Natur wie diejenige, welche bei der in § 1. gegebenen Definition des *direct inducirten Potentiales* auftritt, und scheint von der Theorie der magnetischen Induction untrennbar zu sein *).

---

*) Anm. Es möge hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass Green in seinem Essay of the theor. S. 199. auf diese etwas difficilen Vorstellungen Rücksicht nimmt, indem er unterscheidet zwischen der von dem ganzen Körper



Dass nun der auf den ersten Blick sehr wesentlich erscheinende Unterschied zwischen der Beer'schen Formel [q] und unserer Formel § 1. [k] in der Tat nur von untergeordneter Bedeutung ist, erkennt man, wenn man die beiderseitigen Umformungen für V_1 vergleicht. Beer findet nämlich auf S. 160.

$$V_1 = -\frac{8\pi}{3\alpha^1} V - \frac{1}{\alpha^2}\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$

wofür wir nach unserer Bezeichnungsweise auch schreiben können

$$V_1 = -\frac{8\pi}{3\alpha^2} V + \frac{1}{\alpha^2}\int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma;$$

und es lautete die Formel § 1. [e]

$$V_1 = -4\pi K V + K\int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

In dieser Form erkennt man sofort, dass der Unterschied zwischen den beiden Functionen V_1 sich auf eine Verschiedenheit der darin auftretenden Constanten reducirt.

8. Die im Vorigen aufgedeckte Verschiedenheit in der Behandlungsweise bei Beer und im § 1. lässt sich in Kürze etwa so ausdrücken: Beer erteilt bei seinen einzelnen Inductionsacten den magnetischen Elementen eine gewisse Rolle zu, indem er eine Einwirkung der einzelnen Teile eines und desselben magnetischen Elementes auf einander in Rechnung zieht, und erst nach vollendeter Induction von der Existenz der magnetischen Elemente abstrahirt; wogegen bei der Darstellung des § 1. die Vorstellung der magnetischen Elemente durch den an die Spitze gestellten Begriff der directen Induction beseitigt wird. Der so ausgesprochene Unterschied in der Behandlungsweise übt die Wirkung auf die aufzustellenden Formeln, dass die parallel stehenden Formeln für V_1 sich so unterscheiden

$$\text{(Beer)} \quad V_1 = +\frac{1}{\alpha_2}\int T \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + \frac{4\pi}{3\alpha^2} V$$

$$\text{(§ 1.)} \quad V_1 = +K\int T \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma \qquad [r]$$

---

¹ und der von den ausserhalb eines Molecüles gelegenen Teile auf einen innern Punkt ausgeübten Kraft, und diese Unterscheidung mathematisch dadurch definirt, dass er eine gewisse Function ψ das erste Mal differentiirt nach dem Verschwinden der kleinen Hülfskugel und das zweite Mal vorher.

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Verschiedenheit dieser beiden Ausdrücke sich auf eine Verschiedenheit der Constanten reducirt, wenn man die Ausdrücke in folgender Form schreibt

$$\text{(Beer)} \quad V_1 = -\frac{8\pi}{3\alpha^2} V + \frac{1}{\alpha^2}\int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma$$

$$\text{(§ 1.)} \quad V_1 = -4\varphi K V + K \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma \qquad [s]$$

9. Hierdurch erkennen wir nun auch, warum sich zwischen den Beer'schen Constanten $\varkappa$ und α einerseits und unsern Constanten $\varkappa$ und K andererseits nicht die nämlichen Beziehungen ergeben konnten; und wir erkennen, freilich nur a posteriori, dass der Beer'schen Fundamentalformel [a] in der Tat eine etwas andere Bedeutung beizulegen ist als unserer analogen Formel (§ 1. [a]), dass aber diese Verschiedenheit sich auf die Bedeutung der Constanten beschränken muss.

10. Dieser Umstand wird vollständig klar, wenn wir die Beer'sche Formel [a] direct mit der von Poisson gegebenen (§ 2. [e])

$$q = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_1}(k\alpha) + \frac{\partial T}{\partial y_1}(k\beta) + \frac{\partial T}{\partial z_1}(k\gamma) \right\} dx_1\, dy_1\, dz_1$$

vergleichen und hierin der Beer'schen Grundanschauung entsprechend die Bestimmung der Grössen α, β, γ vornehmen vermittelst der in der Einleitung angeführten Poisson'schen Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + X + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} + Y + \frac{4\pi}{3}\beta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + Z + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0$$

Diese Gleichungen werden offenbar, wenn es sich um ein einziges magnetisches Element handelt:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{4\pi}{3}\beta = 0 \qquad [t]$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0$$

woraus

$$\alpha = -\frac{3}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\beta = -\frac{3}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y_1}$$

$$\gamma = -\frac{3}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

folgt. Setzt man diese Werte in den Ausdruck für q ein, so wird derselbe

$$q = -\frac{3k}{4\pi}\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1\, dy_1\, dz_1. \qquad [u]$$

Die Beer'sche Formel [a] lautete:

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\partial T}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_1}\right\} dx_1\, dy_1\, dz_1 \qquad [v]$$

wenn wir nämlich die gleichbedeutenden $x'y'z'$ mit $x_1 y_1 z_1$ vertauschen und ebenso $\frac{1}{r} = T$ setzen. Aus der Vergleichung von [u] und [v] folgt nun

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{3k}{4\pi}.$$

Führen wir noch hierin die von Beer angegebene Beziehung zwischen seinem α und $\varkappa$ ein, nämlich

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{4\pi}\frac{3\varkappa}{3-2\varkappa},$$

so folgt

$$k = \frac{\varkappa}{3-2\varkappa}$$

oder

$$\varkappa = \frac{3k}{1+2k}.$$

Dies ist aber dieselbe Beziehung, welche wir oben Gleichung [n] fanden.

§ 4.

In diesem § soll eine Methode der successiven Induction in Anwendung gebracht werden, auf welche ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn Professor Dr. C. Neumann aufmerksam gemacht bin, und welche sich den Poisson'schen Gleichungen unmittelbar anschliesst.

1. Poisson gibt für das inducirte Potential (Mem. de l'Acad. S. 294.) die Formel, welche wir unter Beibehaltung unserer früheren Beziehungsweise $T = \frac{1}{r}$; $\frac{3k}{4\pi(1-k)} = K$ und ξ, η, ζ mit x_1, y_1, z_1 vertauschend, schreiben können:

$$Q_a = \iiint \left\{ A \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + B \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \Gamma \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \qquad [a]$$

$$Q_i = \iiint \left\{ A \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + B \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \Gamma \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \qquad [b]$$

worin die drei (früher durch $k\beta$, $k\beta$, $k\gamma$ bezeichneten) Grössen A, B, Γ die Bedeutung haben (vergl. Mém. S. 299. (c))

$$A = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial x_1}$$

$$B = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial y_1}$$

$$\Gamma = -K \frac{\partial(V + Q_i)}{\partial z_1}$$

In diesen Formeln ist ausser der als gegeben zu betrachtenden Constanten K nur das V bekannt und es handelt sich darum, Q auszudrücken durch V.

2. Das letztere werden wir dadurch erreichen, dass wir für Q eine Reihe von Ausdrücken

$$Q', Q'', Q''' \ldots Q^{(n)} \ldots Q^{(\infty)}$$

bilden, die, mit einem ersten Näherungswert Q' beginnend, sich successive dem wahren Werte von Q mehr und mehr nähern und von denen der Ausdruck $Q^{(\infty)}$ in aller Strenge mit dem wahren Q zusammenfällt.

Den ersten Näherungswert Q' müssen wir nun offenbar erhalten, wenn wir uns vorstellen, dass die Induction zunächst in jedem Körperelement $dx_1 dy_1 dz_1$ so vor sich ginge, als ob dabei keine Einwirkung der übrigen Teile von dem Körqer $\mathfrak{A}$ auf dasselbe stattfände; oder mit andern Worten, indem wir das durch die Kräfte mit dem Potential V *direct inducirte Potential* (vergl. § 1. 1.) bilden. Dieses wird:

$$Q_a' = \iiint \left\{ A' \frac{\partial T_a}{\partial x_1} + B' \frac{\partial T_a}{\partial y_1} + \Gamma' \frac{\partial T_a}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \qquad [d]$$

$$Q_i' = \iiint \left\{ A' \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + B' \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \Gamma' \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \qquad [e]$$

worin nun die Grössen A', B', Γ' aus den Gleichungen [c] sich ergeben, indem man in den letzteren $Q_i = 0$ setzt. Es wird also

$$A' = -K.\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$B' = -K.\frac{\partial V}{\partial y_1} \qquad [f]$$

$$\Gamma' = -K.\frac{\partial V}{\partial z_1}$$

Durch Substitution dieser Gleichungen in [d] und [e] wird

$$Q_a' = -K.\iiint\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T_a}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T_a}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T_a}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1$$

$$Q_i' = -K\iiint\left\{\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial T_i}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\partial T_i}{\partial y_1}+\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial T_i}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dz_1$$

oder mit Hülfe derselben Green'schen Sätze, welche in § 1. auf die buchstäblich gleichen Ausdrücke [c] und [d] angewandt wurden,

$$Q_a' = K\int T_a\frac{\partial V}{\partial \nu}d\sigma \qquad [g]$$

$$Q_i' = K\int T_i\frac{\partial V}{\partial \nu}d\sigma \qquad [h]$$

Den letzteren Ausdruck, welcher mit dem für V_1 in § 1. gefundenen vollständig identisch ist, können wir wieder in derselben Weise umformen wie dort, und erhalten unter Benutzung derselben Abkürzungen [z]

$$Q_i' = -4\pi KV + 4\pi KF_1 \qquad [i]$$

3. Aus der Identität von V_1 und Q_i' folgt, wie wir besonders hervorheben, dass Q_i' innerhalb $\mathfrak{A}$ dieselben Haupteigenschaften wie V besitzt, und dass daher auch der Function $(V + Q_i')$ die nämlichen Eigenschaften zukommen werden.

4: Einen zweiten Näherungswert erhalten wir dadurch, dass in den Gleichungen [c] das noch unbekannte Q_i ersetzt wird durch den in 2. gefundenen Wert Q_i' und diese Gleichungen sodann substituirt werden in die ursprünglichen [a] und [b]. Diese werden

$$Q_a'' = \iiint\left\{\frac{\partial(V+Q_i')}{\partial x_1}\frac{\partial T_a}{\partial x_1}+\frac{\partial(V+Q_i')}{\partial y_1}\frac{\partial T_a}{\partial y_1}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(V+Q_i')}{\partial z_1}\frac{\partial T_a}{\partial z_1}\right\}dx_1dy_1dy_1 \qquad [k]$$

$$Q_i'' = \iiint \left\{ \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial x_1} \frac{\partial T_i}{\partial x_1} + \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial y_1} \frac{\partial T_i}{\partial y_1} + \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial z_1} \frac{\partial T_i}{\partial z_1} \right\} dx_1 dy_1 dz_1 \qquad [l]$$

Zufolge der Bemerkung 3. sind diese beiden Ausdrücke der nämlichen Umgestaltung zu unterwerfen wie vorher die Ausdrücke für Q_a' und Q_i'. Es wird demnach

$$Q_a'' = K \int T_a \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial \nu} d\sigma \qquad [m]$$

$$Q_i'' = K \int T_i \frac{\partial(V+Q_i')}{\partial \nu} d\sigma \qquad [n]$$

Der letzte Ausdruck Q_i'' ist nun in ähnlicher Weise zu behandeln wie der obige für Q_i'. Es wird nämlich zunächst, wenn man den Satz (§ 1. 13.) anwendet auf die Function $(V+Q_i')$,

$$Q_i'' = K \int (Q_i + Q_i') \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi K(V+Q_i')$$

oder, wenn wir die Abkürzung

$$\lambda = 4\pi K,$$

einführen und für Q_i' seinen Wert [i] setzen,

$$Q_i'' = \lambda \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma + \lambda^2 \frac{1}{4\pi} \int F_1 \frac{\partial T_i}{\partial \nu} d\sigma - \lambda V + \lambda^2 V - \lambda^2 F_1$$

oder anders geschrieben

$$Q_i'' = (-\lambda + \lambda^2) V + (\lambda - 2\lambda^2) F_1 + \lambda_2 F_2 \qquad [o]$$

5. Für die Function Q_i'' ist dieselbe Bemerkung zu machen wie in 3. für Q_i'. Es ist nämlich ohne Weiteres klar, dass der Ausdruck [l] derselben Discussion unterworfen werden kann wie sie in § 1. 12 angestellt. Daraus ist denn auch zu schliessen, dass die Function $(V+Q_i'')$ widerum dieselben Haupteigenschaften innerhalb $\mathfrak{A}$ wie V, Q_i', Q_i'' besitzen wird. Noch sei bemerkt, dass Q_i'' identisch ist mit $(V_1 + V_2)$ des § 1.

6. Das nun weiter einzuschlagende Verfahren ist durch 4. und 5. bereits vollständig angegeben. Wir erhalten den 3ten, 4ten, 5ten etc. Näherungswert von Q, indem wir die successive gewonnenen

Werte Q_i'', Q_i''', $Q_i^{(IV)}$ ... etc. einsetzen in die Gleichungen [c]; diese wiederum in [a] und [b] und die so gewonnenen Ausdrücke Q_a''', $Q_a^{(IV)}$, $Q_a^{(V)}$ ... etc. und Q_i''', $Q_i^{(IV)}$, $Q_i^{(V)}$ ... etc. denselben Transformationen unterwerfen wie unter 4. dargestellt.

7. Der $n$te Näherungswert wird durch Anwendung dieses Verfahrens

$$\begin{aligned} Q_i^{(n)} = & (-\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots + \lambda^n) V \\ & + (\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3 - \dots + n\lambda^n) F_1 \\ & + (\lambda^2 - 3\lambda^3 + 6\lambda^4 - \dots + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda^n) F_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda^n F_n \end{aligned}$$

woraus sich ebenso wie in § 1 durch Einführung der Constanten

$$\varkappa = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

ergibt:

$$V + Q_i^{(n)} = (1-\varkappa)\{V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \dots \varkappa^n F_n\} \qquad [p]$$

Unter der Voraussetzung, dass für eine unendliche Anzahl in obiger Weise berechneter Näherungswerte, die letzteren sich successive dem wahren Werte Q_i nähern, wird

$$V + Q_i = (1-\varkappa)\{V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.}\} \qquad [r]$$

Setzen wir diesen Wert dann in die Gleichungen [c] und diese wiederum in [a] und [b] ein, so erhalten wir durch Anwendung der nämlichen Transformationen, wie in § 1. 11. und 12. oder in diesem § unter 4. dargestellt:

$$Q_a = \frac{\varkappa}{4\pi}\int T_a \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [s]$$

$$Q_i = \frac{\varkappa}{4\pi}\int T_a \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_n + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} d\sigma \qquad [t]$$

und für die Dichtigkeit derjenigen fingirten einfachen Oberflächenbelegung, durch welche die Wirkung des inducirten Magnetismus auf äussere und innere Punkte ersetzt werden kann

$$H = \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{\partial(V + \varkappa F_1 + \varkappa^2 F_2 + \dots \text{ in inf.})}{\partial \nu} \qquad [u]$$

8. Die Formeln [s], [t], [u] befinden sich in vollständiger Uebereinstimmung mit den Formeln [cc], [dd], [ff] des § 1., denn es haben die Functionen F_1 F_2 ... an beiden Stellen dieselbe Bedeutung (§ 1. [z]) und es befindet sich die Constante $\varkappa$ an beiden Stellen in der nämlichen Beziehung zur Poisson'schen Constanten k

$$\varkappa = \frac{1+2k}{3k}.$$

Kiel, Aug. 1877.

XXI.

Miscellen.

1.

Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen.

Es sind schon mehrmals die Mittel untersucht worden, welche zur geometrischen Darstellung der elliptischen Integrale und Functionen geeignet sind; einen kleinen Beitrag zu demselben Zwecke sollen auch folgende Zeilen liefern.

1. Betrachtet man die Curve $r = f(\varphi)$ und ihre Inverse (durch reciproke radii vectores transformirte) $r = \frac{a^2}{f(\varphi)}$, so wird der Inhalt des Sectors der ersten durch das Integral $S = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2 d\varphi$, und der zweiten durch $S' = \frac{1}{2}a^4\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{r^2}$ ausgedrückt. Die Curve

$$r = a\sqrt[4]{1 - m^2\sin^2\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

hat zur Inversen die Curve

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{1 - m^2\sin^2\varphi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

und es wird dann

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad S' = \frac{a^2}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}} \quad \ldots (3)$$

oder, wenn wir $a = \sqrt{2}$ wählen und die bekannte Legendre'sche Bezeichnung anwenden,

$$S = E(m, \varphi), \quad S' = F(m, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Wir wollen die betreffenden Curven kurz E und F nennen. Die Gleichung der E-Curve in Descartesischen Coordinaten lautet

$$(x^2 + y^2)^3 - a^4 x^2 - a^4 (1 - m^2) y^2 = 0 \quad \ldots \ldots (5)$$

es ist also eine Curve 6ter Ordnung, welche im Anfangspunkte einen Doppelpunkt besitzt und die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Punkten hat. Ebenso erkennt man aus der Gleichung der F-Curve

$$(x^2 + y^2)^2 - m^2 y^2 (x^2 + y^2) - a^4 = 0 \quad \ldots \ldots (6)$$

dass es eine Curve 4ter Ordnung ist, mit den Kreispunkten als Doppelpunkten. Beide Curven, welche für $m^2 < 1$ eine elliptische Form besitzen, können einfach nach ihren Polargleichungen construirt werden; man kann auch die eine — vielleicht die E — nach der Gleichung darstellen und aus ihr die F nach der Methode der Inversion ableiten.

2. Für jeden Wert des Modulus m, welcher bekanntlich der Bedingung $0 < m < 1$ unterworfen ist, erhalten wir eine E- und eine F-Curve. Es kann aber sehr leicht gezeigt werden, dass man alle diese Curven als Schnitte zweier inversen Flächen H und Φ mit den Ebenen eines bestimmten Büschels erzeugen kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur in den Polargleichungen der Curven $m = \sin \omega$ setzen und die Grössen r, φ, ω als räumliche Polarcoordinaten betrachten, welche mit den parallelen Coordinaten durch die Gleichungen $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi \cos \omega$, $z = r \sin \varphi \sin \omega$ verbunden sind. Es ist dann

$$r = a \sqrt[4]{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \omega} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

die Gleichung der Fläche H und

$$r = \frac{a}{\sqrt[4]{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \omega}} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

die Gleichung der Fläche Φ, oder, in Parallelcoordinaten ausgedrückt:

(9)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - a^4 (x^2 + y^2) = 0 \quad \text{und} \quad (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) - a^4 = 0$$

Wie hieraus zu ersehen, ist die Fläche H eine Rotationsfläche 6ter und Φ eine Rotationsfläche 4ter Ordnung; die Z-Axe ist ihre gemeinschaftliche Rotationsaxe. Die Gleichungen der Meridiancurven

erscheinen in einer äusserst einfachen Gestalt, nämlich $r = a\sqrt{\cos\varphi}$ und $r = \frac{a}{\sqrt{\cos\varphi}}$. Jede durch die X- oder Y-Axe gelegte Ebene schneidet die Fläche H in einer E-Curve und die Fläche Φ in der entsprechenden F-Curve. — Endlich sei noch die Bemerkung beigefügt, dass sich die Fläche Φ zur geometrischen Darstellung der elliptischen Functionen eignet. Legen wir nämlich durch den Punkt (x, y, z) dieser Fläche und durch die X-Axe eine Ebene, so schneidet diese die Fläche in einer F-Curve, deren in den Gränzen 0, φ enthaltener Sector durch die Gleichung $S' = F(m, \varphi)$ bestimmt ist, und es ist dann

$$\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r} = \sin am S', \quad \frac{x}{r} = \cos am S', \quad r^2 = \Delta am S' \quad . \; . \; . \; (10)$$

Königgräz, den 29. April 1877.

A. Strnad.

2.

Ueber Bezeichnungen.

Unter den in der Mathematik gebräuchlichen Zeichen lassen sich nach der einen Seite hin unterscheiden disponibele und feste, nach der andern Zeichen für Grössen, für Functionen, für Operationen und für Anordnungen. In Betreff der disponibelen Zeichen, welchen der Autor erst im vorkommenden Falle ihre Bedeutung beilegt, möchte wol kaum ein Punkt zu erörtern sein; nur ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass die geläufige Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet und das Entsprechen der Buchstaben in verschiedenen Alphabeten uns vielfach zu statten kommt. Es sind daher Festsetzungen, welche diesem Gebrauche hindernd in den Weg treten, nicht zu empfehlen, und wo sie bestehen, als baldigst zu beseitigende Uebelstände zu vermerken, wovon später.

Die festen oder eingeführten Zeichen hingegen, welche ohne Erklärung gebraucht werden, geben vielfachen Grund zur Besprechung. Abänderungsvorschläge im einzelnen, welche schon manchmal zutage getreten sind, gehen meist aus einseitigen Erwägungen hervor; sie begegnen darum oft unmotivirter Missbilligung, weil sie die ihnen entgegenstehenden Interessen nicht zum Bewusstsein und zur Klarheit bringen. Damit Abänderungen einen definitiven Fortschritt der Praxis verbürgen können, muss beim einzelnen Punkte die Gesammtheit ins Auge gefasst und auf alle in Betracht kommenden Gesichtspunkte Rücksicht genommen sein. Letztere in grösst möglicher Vollständig-

keit und bester Ordnung zusammenzustellen ist der Zweck des Folgenden. Doch empfiehlt es sich in praktischen Fragen, dieselben nicht in abstracten Principien, sondern an den wirklich vorliegenden Gegenständen darzulegen. Ich folge daher der oben aufgestellten Einteilung.

I. Zeichen für Grössen. Gewöhnlich ohne Erklärung gebraucht werden die Buchstaben π, e, i, g.

1. Periode der Kreisfunctionen. Wenn ursprünglich π den Kreisumfang für den Durchmesser 1 ausdrücken sollte, so hat diese Bedeutung jetzt keine Geltung mehr, wo immer der Radius zur Einheit genommen wird. Hiernach würde für 2π ein Zeichen zu setzen sein. Doch handelt es sich nicht allein um Ausdruck des Kreisumfangs; eine weit überwiegende Rolle kommt dem 2π als Periodenlänge zu. Die Praxis hat sich bei allen symmetrisch periodischen Functionen dafür entschieden nicht die ganze, sondern die Viertelperiode zu bezeichnen, weil diese das gesammte Intervall der Zahlenwerte der Function umfasst, was sich zunächst bei Tafeln geltend macht, aber auch auf die Rechnung vielfachen Einfluss übt (Complementarfunctionen, Teilung der Intervalle von Integralen u. a. m.). Hier zeigt sich die Schreibung $\frac{\pi}{2}$ äusserst unbequem, so dass es Viele vorziehen dafür 90^0 zu schreiben. Sind wir aber erst dazu gelangt die Nonagesimal- und Sexagesimalteilung zu beseitigen, so wird ein Zeichen für den Quadranten unentbehrlich, da es immer als Benennung zur decimal dargestellten Zahl hinzutritt. Hierzu bedarf es nun keiner neuen Einführung. Im Unterricht lernt der Schüler das Zeichen R für den rechten Winkel, ehe er von π etwas hört; es ist nur nötig bei diesem Zeichen stehen zu bleiben, also nachher bei der Kreisberechnung, wo der Bogen für den Radius 1 als Mass des Centriwinkels betrachtet wird, nur den Bogen nach dem Winkel, statt umgekehrt, zu bezeichnen, mithin $4\mathrm{R}r$ als Wert des Kreisumfangs anzugeben. Dass dies gewöhnlich nicht geschieht, scheint in einer Täuschung seinen Grund zu haben. Man denkt sich, am Zeichen R hafte die Vorstellung einer Winkelfigur. Hat man einmal die Winkelgrösse mit der Zahl identificirt, wie es ja factisch der Fall ist, so macht es doch gewiss keinen Unterschied, ob man $2\mathrm{R} = \pi$ oder $\pi = 2\mathrm{R}$ setzt. Durch den müssigen Uebergang vom Zeichen R zu einem neuen Zeichen π die Illusion zu begünstigen, als handele es sich um heterogene Dinge, ist jedenfalls nicht ratsam.

Lässt sich indes auf diese Art unser nächster Zweck leicht erreichen, so stellt uns ein zweiter Gesichtspunkt, der schon oben angedeutet ist, eine weitere Forderung. Es ist ein Uebelstand, dass Buchstaben mitten aus dem Alphabet heraus für eine exclusive feste

Bezeichnung in Beschlag genommen und dem freien Gebrauche entzogen werden. Sehr oft haben wir Anlass eine Reihe auf einander folgender Buchstaben des Alphabets der Uebersichtlichkeit wegen zu wählen, und finden uns daran durch einen einzigen der Reihe gehindert, weil er Zweideutigkeit verursacht. Für eine so unveränderliche und in allen Gebieten der Mathematik vorkommende Grösse können wir ein besonderes Zeichen haben. Es würde sicher verbürgt sein, dass die Typen nie entwertet würden. Den Weg zur Formirung zeigt uns die bei den Operationszeichen, namentlich dem Differential-, Integral- und Wurzelzeichen befolgte Praxis, welche den anfänglich dafür gebrauchten Buchstaben d, s, r derart modificirt hat, dass die veränderte Form noch immer den gewohnten Eindruck macht und doch kenntlich unterschieden ist. Ebenso könnte man das R etwa links oben abrunden und zugleich verkleinern; letzteres und die gerade Stellung würde schon bei den vorhandenen Lettern ausgeführt werden können und zur Unterscheidung hinreichen. Auf Grössenzeichen hat jenes Verfahren bis jetzt noch keine Anwendung gefunden, doch sind sie hinsichtlich der Unterscheidungsbedürftigkeit in gleichem Falle mit den Operationszeichen; es ist daher wol nur zufällig, dass es noch nicht geschehen ist.

2. Grundzahl der natürlichen Logarithmen. Von dem Vorstehenden findet nur das zweite Abänderungsmotiv, aber dieses in noch höherem Grade auf das Zeichen e Anwendung. Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist eine ebenso unveränderliche und in der ganzen Analysis eine wichtige Rolle spielende Grösse, und verdiente daher ebenso ein besonderes Zeichen. Dass man dieses aus dem kleinen lateinischen Alphabet entnommen hat, beengt den freien Gebrauch noch empfindlicher als die Vorwegnahme des π, weil uns dasselbe ohne die verursachte Lücke das bequemste von allen Alphabeten sein würde. Auch hier liesse sich durch Modification der Buchstabenform abhelfen; in Ermangelung der Typen könnte man einstweilen das selten gebrauchte e dafür setzen. Am meisten fehlt uns ein kurzes Wort, dass die Bedeutung ausdrückt, wie das Wort „Rechter“ im vorigen Falle dem Bedürfniss vollkommen genügte.

3. Quadratwurzel aus -1. Das Zeichen i vertritt nicht wie π und e einen Begriff von unveränderlicher Auffassung. Die Theorie der Imaginären ist noch so stark in der Entwickelung begriffen, dass wir alle Festsetzungen als interimistische betrachten müssen. Es kann insbesondere ein Zweifel erhoben werden, ob i als Grösse, oder $+i$, $-i$ als Vorzeichen wie $+$ und $-$ aufzufassen sind. Hier scheint daher eine Abänderung besser für spätere Zeiten vorbehalten zu werden.

4. Gewicht der Masseneinheit. Das Zeichen g ist in anderem Falle als π, e und i, insofern es in keiner allgemeinen Theorie Bedeutung hat, und nur in der angewandten Mechanik vorkommen kann. Wenn es daher ohne Erklärung gebraucht wird, so lässt es sich als ein disponibeles Zeichen ansehen, dessen Bedeutung aus dem Zusammenhange erhellt. Eine Beeinträchtigung des freien Gebrauches führt dasselbe nicht mit sich. Nur sollte man nicht, wie dies misbräuchlich in manchen Lehrbüchern der Fall ist, das g in Formeln finden, die mit der Erdanziehung nichts zu tun haben, z. B. in dem Ausdruck für die Centrifugalkraft.

Nun giebt es noch manche stehende Bezeichnungen, namentlich für variabele Grössen, z. B. t für die Zeit. Diese lassen sich jedoch wenn sie auch bisweilen ohne Erklärung gebraucht werden, als disponibele betrachten, und haben nie aufgehört als solche zu dienen.

II. Zeichen für Functionen. Bei den stehenden Functionsbezeichnungen mit Angabe des Arguments ist die schädliche Vorwegnahme einzelner Buchstaben grösstenteils dadurch vermieden, dass sie mit mehreren Buchstaben, welche eine Abkürzung des Namens darstellen, geschrieben werden; denn ein freier Gebrauch von solchen Combinationen pflegt nicht stattzufinden. Hierhin gehören die Zeichen sin, cos, tg, cot, log. Zu diesen sind nur wenige Bemerkungen zu machen. Dass neben der ganz unzweideutigen Abkürzung tg noch einige weniger kurze bestehen, ist offenbar überflüssig. Das Zeichen log ist für briggische und natürliche Logarithmen in Gebrauch, doch kommt man nicht in den Fall über die Deutung in Zweifel zu sein. Dieselbe kenntlich zu machen ist leicht, daher braucht keine Unterscheidung eingeführt zu werden. Zu verwerfen ist die in Vorschlag gekommene Einführung eines Zeichens für $\log x$ Grundzahl a. Denn diese Function ist nicht transcendent in 2 Argumenten, sondern rational in 2 Werten einer Function eines Arguments $\log x : \log a$; es würde das Einfachere complicirter machen.

1. Inverse elliptische Functionen 1. Gattung. Die Bezeichnung der elliptischen Functionen ist unter 2 verschiedenen Auffassungsweisen entstanden. Legendre stellte dieselben als Functionen der Amplitude dar. Seine hierauf berechneten Bezeichnungen sind auf die neue Gestaltung der Theorie, in der das Integral 1. Gattung unabhängige Variabele ist, übertragen worden. Hier ist die Amplitude eine Mittelfunction von geringer Bedeutung, nur zur Erleichterung einiger wenigen Deductionen dienlich. Nach Inversion treten 3 coordinirte gleichberechtigte Functionen auf, welche von da an unentbehrliche Elemente der Rechnung sind, und als solche einzeln Zeichen beanspruchen. Jacobi hat diese Zeichen nicht einführen

wollen und statt dessen nur die Amplitude bezeichnet aus dem Grunde, weil die definitive Bezeichnung erst dann bestimmt werden könne, wenn die Theorie zu einem Abschluss gediehen sei; bis dahin seien nur die notwendigsten Einführungen vorzunehmen um nicht der späteren Gestaltung in den Weg zu treten. Hiermit hat er die getroffene Auskunft für eine interimistische erklärt. Wenn nun heutzutage noch das Festhalten an der vermittelten Bezeichnung von manchen Seiten gefordert wird, so ist jedenfalls die Berufung auf Jacobi's Ausspruch nicht stichhaltig. Denn erstens betrachten diejenigen, welche die Zeichen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$, $\Delta am\, u$ gebrauchen, dieselben als Ausdrücke directer Functionen von u, nicht von $am\, u$, mithin sind dieselben gegenüber den Zeichen sin, cos, Δ in Wirklichkeit 3 neue Einführungen, zweitens sieht niemand diese Einführungen als interimistisch an; denn niemand denkt jetzt, nachdem die Auffassung der 3 Functionen länger als 20 Jahre dieselbe geblieben, daran, dass in diesem Punkte die Theorie eine Umgestaltung erfahren könnte. Da wir nun neben dieser Bezeichnung die hinreichend bekannte Gudermann'sche $sn\, u$, $cn\, u$, $dn\, u$ besitzen, so kann es sich nur darum handeln, welche von beiden zweckmässiger ist, die ungleichmässige mit 5 und 4 oder die gleichmässige mit 2 Buchstaben. Alle, die sich überhaupt über letztere ausgesprochen haben, finden sie gut gewählt und praktisch; Einwände dagegen sind nicht an den Tag getreten. Was also die erstere bevorzugen lässt, ist nichts als Täuschung. Diese zu enthüllen war reichlich Grund, da sie dem Fortschritt zu einer befriedigenden Praxis solange entgegengewirkt hat.

2. Elliptische Functionen 2. und 3. Gattung. Gegen die Legendre'sche Bezeichnung E und Π ist erstlich geltend zu machen, dass sie 2 Buchstaben dem freien Gebrauch entzieht; namentlich wird Π gern in andern Bedeutungen gebraucht. Ausserdem ist jetzt E das gewöhnliche Zeichen für den Quadranten 2. Gattung, bei Legendre E_1. Hierzu kommt, dass wir jetzt directe Functionen von u, nicht mehr von $am\, u$ zu bezeichnen haben; endlich in Betreff der 3. Gattung, dass sie, stark abweichend von Legendre, jetzt in derjenigen Form definirt wird, welche unmittelbar in Logarithmen der Jacobischen Functionen übergeht. Die Gudermann'sche Bezeichnung der 2. Gattung $el\, u$ kann sehr wol befriedigen und empfiehlt sich besonders durch den Hinweis auf die geometrische Deutung. Die der 3. Gattung, D mit 4 Indices, welche sich der heutigen Definition anschliesst, hat nur das gegen sich, dass sie einen Buchstaben in Beschlag nimmt. Es wäre sowol zur Vermeidung dieses Umstandes als auch um der Gleichmässigkeit willen eine Combination von 2 kleinen lateinischen Buchstaben vorzuziehen.

Die Zeichen Θ, H für die Jacobi'schen Functionen werden noch

verschieden in Anwendung gebracht, die K und E für die ell. Quadranten nicht als Functionsbuchstaben betrachtet; daher können wir sie zu den disponibelen, wenn auch vorzugsweise gewählten Zeichen rechnen.

3. Das Euler'sche Integral und die Gauss'sche Function. Von den Functionszeichen Γ und F gilt nur der allgemeine Einwand. Es würde sich empfehlen zu schreiben: $\Gamma\mathfrak{e}$ (Gamma Euleri) und Fg (Functio Gaussiana).

III. Zeichen für Operationen. Nicht alle Operationszeichen drücken Functionen aus, und auch unter denjenigen, welche dies tun, giebt es solche, die nicht nach Art der allgemeinen Functionszeichen vor die Argumente geschrieben werden. Beide Arten können wir also den eigentlichen Functionszeichen entgegensetzen. Alle dahin gehörigen Operationszeichen, soweit sie für eingeführte gelten, haben bereits ihre befriedigenden, ausser dem Alphabet liegenden Formen. Manche wollen zwar die Unterscheidung des vollständigen Differentials und partiellen Differentialquotienten durch d und ∂ für eine eingeführte ausgeben. Diese ist aber nur für gewisse einfachere Abhängigkeitsfälle, die freilich die häufigsten sind, haltbar, und muss daher der Natur der Sache zufolge stets eine disponibele, vom Schriftsteller zu erklärende bleiben. Meistens ist sie überhaupt überflüssig.

IV. Die Anordnungszeichen (Klammern, Trennungszeichen u. s. w.) geben keinen Anlass zur Besprechung.

Das Vorstehende hat sich nicht mit der Aufgabe beschäftigt über die vorgefundenen, in Gebrauch befindlichen Bezeichnungen hinaus erfinderisch vorzugehen. Sollte die Nennung der vorhandenen Mängel den Anlass bieten, dass es von anderer Seite geschähe, so würden mir dahin gehende Vorschläge willkommen sein. Es ist ein kurzes Wort für Grundzahl der natürlichen Logarithmen und ein dem e ähnliches Zeichen, ferner ein aus 2 kleinen lateinischen Buchstaben bestehendes Zeichen für die elliptischen Functionen 3. Gattung mit Unterscheidung der 4 Formen zu erfinden. Mein ausschliessliches Ziel war es, gegen oft gehörte täuschende Bestimmungsgründe Kritik zu üben und dadurch das Haupthinderniss einer befriedigenden Praxis zu entfernen.

R. Hoppe.

3.

Bestimmung der Flächeninhalte jener Curven, die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1 \tag{1}$$

gegeben sind, in welcher *m* eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Es ist leicht einzusehen, dass die Fläche der durch die Gleichung: (1) gegebenen Curven bestimmt wird durch nachstehendes Integrale

$$F = 4\int_0^a y\,\partial x \tag{2}$$

Setzt man

$$x = a.u^{\frac{1}{2m}}$$

$$y = b.(1-u)^{\frac{1}{2m}}$$

so geschieht der Gleichung (1) Genüge, und das Integrale (2) geht über in

$$F = \frac{4ab}{2m}\int_0^1 u^{\frac{1}{2m}-1}\,(1-u)^{\frac{1}{2m}}\,du \tag{3}$$

Das in (3) stehende Integrale ist die bekannte Beta-Function, folglich gestattet die Gleichung (3) nachstehende Schreibweise:

$$F = \frac{4ab}{2m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right).\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

Dies vereinfacht sich, wenn man die Gleichung

$$\frac{1}{2m}\,\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)$$

berücksichtigt, denn dann ist

$$F = 4ab.\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{4}$$

Setzt man $m = \infty$, so ist

$$F = 4ab$$

und dies ist selbstverständlich, weil die Gleichung (1) für unendlich

wachsende Werte von m sich fort und fort einem Rechtecke nähert, welches die Seiten $2a$ und $2b$ hat. (Siehe die Arbeit von Dr. J. Grailich im 23. Bande der Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien).

Man kann auch das in (4) stehende Resultat erlangen, wenn man von der Formel Lejeune-Dirichlet's

$$\int x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c}{pqr} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right) \ldots}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)} \tag{5}$$

ausgeht, in welcher x, y, z, ... solche positive Zahlen bedeuten, für welche

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1$$

ist, und wo die Constanten $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positiv sind. Lässt man nämlich das Integrale (5) ein Doppelintegrale sein, so hat man:

$$\iint x^{a-1} y^{b-1}\, dx\, dy = \frac{\alpha^a \beta^b}{pq} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)} \tag{6}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q < 1$$

ist, und a, b, p, q, α, β positive Zahlen bezeichnen. Setzt man nun in (6)

statt a die Zahl 1
„ b „ „ 1
„ p „ „ $2m$
„ q „ „ $2m$
„ α „ „ a
„ β „ „ b

so erhält man:

$$\iint dx\, dy = \frac{ab}{4m^2} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{7}$$

vorausgesetzt, dass

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}<1$$

ist, und a, b und m positive Zahlen bedeuten.

Das in (7) stehende Resultat gibt den 4ten Teil jener Fläche an, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}=1$$

bestimmt ist, und somit ist die Richtigkeit der Formel (4) nachgewiesen.

Bestimmung des Körperinhaltes jener Flächen, die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2m}=1 \tag{8}$$

gegeben sind, in welcher m eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Schneidet man die Fläche (8) durch die Horizontal-Ebene $z=h$, so ist die Gleichung eines Horizontalschnittes

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}+\left(\frac{h}{c}\right)^{2m}=1$$

und diese Gleichung gestattet auch folgende Schreibweise:

$$\frac{x^{2m}}{\frac{a^{2m}}{c^{2m}}(c^{2m}-h^{2m})}+\frac{y^{2m}}{\frac{b^{2m}}{c^{2m}}(c^{2m}-h^{2m})}=1$$

Die Fläche dieses Schnittes ergibt sich aus der Formel (4) und ist:

$$\frac{4ab}{c^2}\sqrt[m]{c^{2m}-h^{2m}}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

Wird dies mit dh multiplicirt, und innerhalb der Grenzen von 0 bis c integrirt, so hat man die Hälfte des gesuchten Körperinhaltes. Es ist demnach

$$K=\frac{8ab}{c^2}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}\cdot\int_0^c\sqrt[m]{c^{2m}-h^{2m}}\,dh$$

Setzt man nun

$$h = c \,.\, u^{\frac{1}{2m}}$$

so ist:

$$K = \frac{8abc}{2m} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)} \cdot \int_0^1 u^{\frac{1}{2m}-1} (1-u)^{\frac{1}{m}} du$$

Das hier auftretende Integrale ist wieder eine Beta-Function, und ist gleich

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2m}\right)}$$

folglich ist

$$K = \frac{8abc}{2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2m}\right)}$$

oder anders geschrieben:

$$K = 8abc \,.\, \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right]^3}{\Gamma\left(1+\frac{3}{2m}\right)}$$

und dies geht für $m = \infty$ über in

$$K = 8abc$$

was wieder von selbst klar ist, weil der durch die Fläche (8) begrenzte Körper mit dem Wachsen von m sich fort und fort dem Körperinhalte eines Parallelepipeds nähert.

Mittelst der Formel (5) von Lejeune-Dirichlet, welche im Jahre 1839 in Liouville's Journal für Mathematik veröffentlicht wurde, lässt sich gleichfalls das gefundene Resultat herstellen.

Simon Spitzer.

4.

Summirung der Reihe $\Sigma \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

1) Bezeichnet man die Summe der Reihe für $m = 1$ mit $\sum_1^\infty \frac{n}{n!}$, so hat man:

$$\sum_1^\infty \frac{n}{n!} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = e$$

also die bekannte Formel.

2) Weil

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

$$e = \quad 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so erhält man durch Addition:

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4} + \dots$$

Daher gilt die Gleichung:

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots = 2e$$

3) Es ist

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[2e] = 2e = \quad 1 + \frac{4}{1.2} + \frac{9}{1.2.3} + \frac{16}{1.2.3.4} + \dots$$

$$1[e] \;= e = \quad 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \dots$$

so ergiebt sich durch Addition:

$$5e = 1 + 4 + \frac{9}{1.2} + \frac{16}{1.2.3} + \frac{25}{1.2.3.4} + \dots$$

woraus folgt:

$$\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} = 1 + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots = 5e$$

4) Weil

$$5e = 1 + 4 + \frac{9}{1.2} + \frac{16}{1.2.3} + \frac{25}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$1[5e] = 5e = \quad 1 + \frac{8}{1.2} + \frac{27}{1.2.3} + \frac{64}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$2[2e] = 4e = \quad 2 + \frac{8}{1.2} + \frac{18}{1.2.3} + \frac{32}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$1[e] \quad = e = \quad 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \cdots$$

so erhält man durch Addition:

$$15e = 1 + 8 + \frac{27}{1.2} + \frac{64}{1.2.3} + \frac{125}{1.2.3.4} + \cdots$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} = 1 + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \cdots = 15e$$

5) Es ist

$$15e = 1 + 8 + \frac{27}{1.2} + \frac{64}{1.2.3} + \frac{125}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$1[15e] = 15e = \quad 1 + \frac{16}{1.2} + \frac{81}{1.2.3} + \frac{256}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$3[5e] \quad = 15e = \quad 3 + \frac{24}{1.2} + \frac{81}{1.2.3} + \frac{192}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$3[2e] \quad = \quad 6e = \quad 3 + \frac{12}{1.3} + \frac{27}{1.2.3} + \frac{48}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$1[e] \quad = \quad e = \quad 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \cdots$$

so erhält man durch Addition:

$$52e = 1 + 16 + \frac{81}{1.2} + \frac{256}{1.2.3} + \frac{625}{1.2.3.4} + \cdots$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} = 1 + \frac{2^5}{2!} + \frac{3^5}{3!} + \frac{4^5}{4!} + \cdots = 52e$$

6) Weil

$$52e = 1 + 16 + \frac{81}{1.2} + \frac{256}{1.2.3} + \frac{625}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$1[52e] = 52e = \quad 1 + \frac{32}{1.2} + \frac{243}{1.2.3} + \frac{1024}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$4[15e] = 60e = \quad 4+\frac{64}{1.2}+\frac{324}{1.2.3}+\frac{1024}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$6[5e] = 30e = \quad 6+\frac{48}{1.2}+\frac{162}{1.2.2}+\frac{384}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$4[2e] = 8e = \quad 4+\frac{16}{1.2}+\frac{36}{1.2.3}+\frac{64}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$1[e] = e = \quad 1+\frac{2}{1.2}+\frac{3}{1.2.3}+\frac{4}{1.2.3.4}+\ldots$$

so ergiebt sich durch Addition:

$$203e = 1+32+\frac{243}{1.2}+\frac{1024}{1.2.3}+\frac{3125}{1.2.3.4}+\ldots$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} = 1+\frac{2^6}{2!}+\frac{3^6}{3!}+\frac{4^6}{4!}+\ldots = 203e$$

7) Es ist

$$203e = 1+32+\frac{243}{1.2}+\frac{1024}{1.2.3}+\frac{3125}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$1[203e] = 203e = \quad 1+\frac{64}{1.2}+\frac{729}{1.2.3}+\frac{4096}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$5[52e] = 260e = \quad 5+\frac{160}{1.2}+\frac{1215}{1.2.3}+\frac{5120}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$10[15e] = 150e = \quad 10+\frac{160}{1.2}+\frac{810}{1.2.3}+\frac{2560}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$10[5e] = 50e = \quad 10+\frac{80}{1.2}+\frac{270}{1.2.6}+\frac{640}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$5[2e] = 10e = \quad 5+\frac{20}{1.2}+\frac{45}{1.2.3}+\frac{80}{1.2.3.4}+\ldots$$

$$1[e] = e = \quad 1+\frac{2}{1.2}+\frac{3}{1.2.3}+\frac{4}{1.2.3.4}+\ldots$$

so erhält man durch Addition:

$$877e = 1+64+\frac{729}{1.2}+\frac{4098}{1.2.3}+\frac{15625}{1.2.3.4}+\ldots$$

oder

$$\sum_1^\infty \frac{n^7}{n!} = 1+\frac{2^7}{2!}+\frac{3^7}{3!}+\frac{4^7}{4!}+\ldots = 877e$$

8) Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke e, $2e$, $5e$, $15e$, $52e$, $203e$, . . . ist leicht ersichtlich:

$$\sum_1^\infty \frac{n}{n!} = e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 2e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 5e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 2\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{2!}\right\}\right] = 15e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 3\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 3\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 52e$$

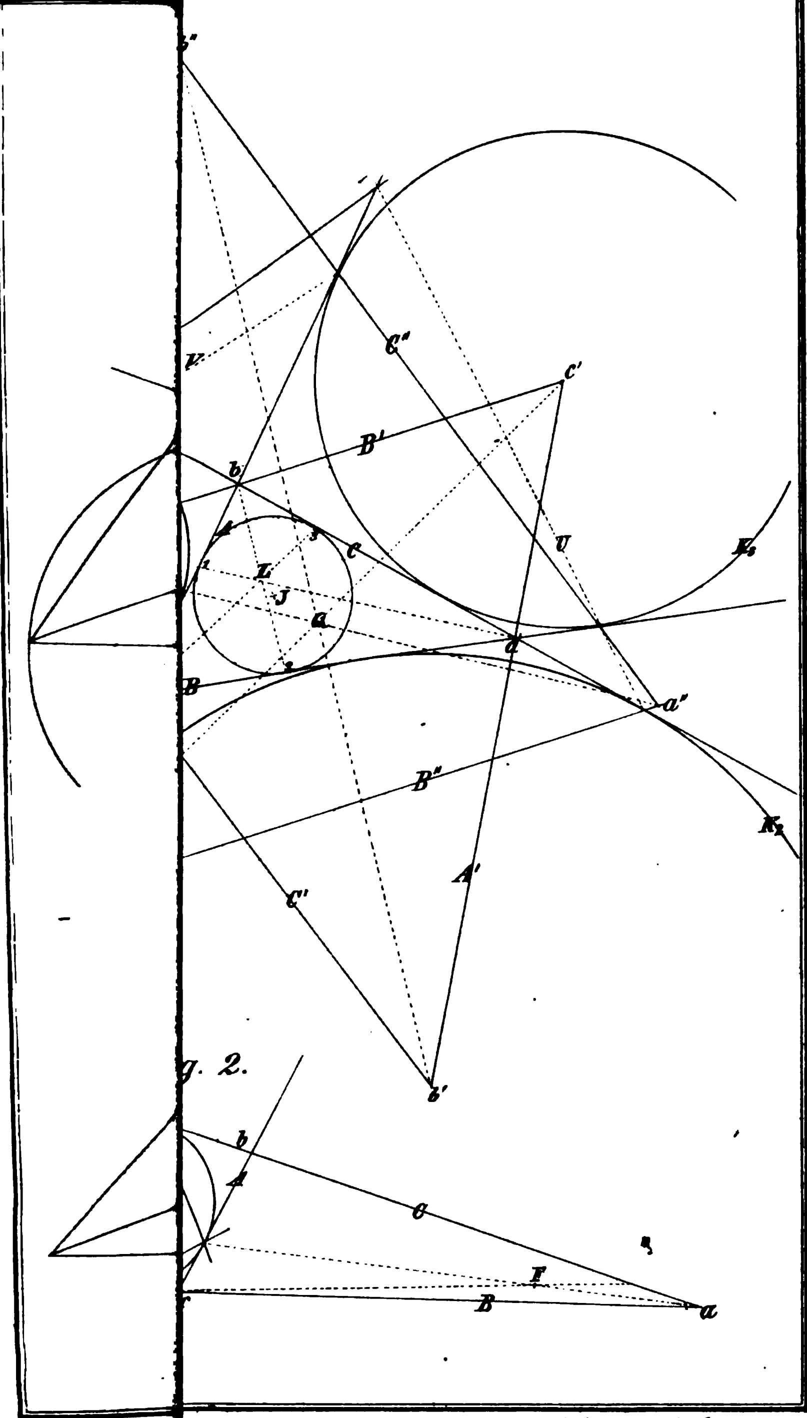
$$\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 4\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 6\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 4\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 203e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^7}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} + 5\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 10\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 10\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} + 5\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 877e$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^8}{n!} = \left[\sum_1^\infty \frac{n^7}{n!} + \left\{\sum_1^\infty \frac{n^7}{n!} + 6\sum_1^\infty \frac{n^6}{n!} + 15\sum_1^\infty \frac{n^5}{n!} + 20\sum_1^\infty \frac{n^4}{n!} + 15\sum_1^\infty \frac{n^3}{n!} \right.\right.$$
$$\left.\left. + 6\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} + \sum_1^\infty \frac{n}{n!}\right\}\right] = 4140e$$

Auf diesem Wege kann man weiter gehen.

Kutno, d. 1. März 1877. G. Dobiński.



Steindruckerei v. F. W. Kunike in Greifswald.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Mar. 1

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Einundsechzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit 5 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1878.

XXII.

Neue Methode zur Auflösung des Dreikants.

Von

Herrn **Karl Klekler,**

Professor an der k. k. Marine-Akademie in Fiume.

Um ein gegebenes Dreikant aufzulösen, bringt man es in eine solche Lage gegen die Projectionsebene, dass dieselbe gegen alle Kanten gleich geneigt erscheint. Die Spur des Dreikants ist dann ein Dreieck ABC (Fig. 1a und 1b), dessen Mittelpunkt S' des umgeschriebenen Kreises die Projection des Scheitels S des Dreikants ist. Ist noch die Höhe des Scheitels über der Projectionsebene gegeben, so ist dadurch das Dreikant vollkommen bestimmt.

Die Seiten (Kantenwinkel) des Dreikants erhält man in der wahren Grösse durch Umlegen der Seitenebenen um ihre Spuren in die Projectionsebene. Bei dieser Umlegung erhält man die Seitenebenen als gleichschenklige Dreiecke AS_3B, AS_2C und BS_1C von gleicher Schenkellänge, deren Winkel an der Spitze die 3 Seiten a, b, c des Dreikants ergeben. Die Länge der Schenkel dieser Seitendreiecke ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten der Radius des dem Spurendreiecke umschriebenen Kreises und die Höhe des Scheitels über der Projectionsebene bilden.

Um die drei Winkel (Keile) des Dreikants zu erhalten, legt man durch den Scheitel S die Neigungswinkelebenen senkrecht auf die Kanten. Die Spuren dieser Ebenen ergeben sich leicht aus den Schnittlinien derselben mit den Seitenebenen, welche auf der betreffenden Kante senkrecht stehen. Um z. B. die Spur der auf der Kante AS senkrechten Ebene zu erhalten, zieht man in den umgelegten

Seitenebenen AS_3B und AS_2C die Geraden S_3M und S_2N senkrecht auf die Umlegungen AS_3 und AS_2 der Kante AS, welche die Spuren AB und AC dieser Seitenebenen in den Punkten M und N treffen. Die Verbindungsgerade MN ist dann die gesuchte Spur der Neigungswinkelebene des Keiles α des Dreikants, und die Verbindungslinien der Punkte M uno N mit dem Scheitel des Dreikants geben den Neigungswinkel α. Die wahre Grösse desselben erhält man durch Umlegung um die Spur MN, und da die wahren Grössen der Schnittlinien MS und NS in den Umlegungen S_3M und S_2N bekannt sind, so gibt das an MN mit den Seiten S_3M und S_2N construirte Dreieck MA_1N die verlangte Umlegung, und bei A_1 den gesuchten Neigungswinkel des Dreikantkeiles α. Die auf gleiche Weise construirten Neigungswinkeldreiecke PB_1Q und RC_1T geben die beiden anderen Winkel β und γ des Dreikants.

Die Verbindungslinien AA_1, BB_1 und CC_1 der Ecken des Spurendreiecks mit den gegenüberliegenden Eckpunkten dieser Neigungswinkeldreiecke gehen durch den Mittelpunkt S' und sind auf den betreffenden Spuren MN, PQ und RT senkrecht. Diese Neigungswinkeldreiecke haben je eine Seite und einen Winkel gemeinsam; die gemeinsamen Seiten a_2, b_2, c_2 derselben sind aus den Kantenwinkeln a, b und c und der Kantenlänge l des Dreikants leicht bestimmbar. Die nicht gemeinsamen Seiten $MN(m)$, $PQ(p)$ und $RT(r)$ dieser Dreiecke bilden mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A, B und C des Spurendreiecks Dreiecke, welche zum Spurendreieck ABC ähnlich sind, und deren andre Seiten a_3, b_3 und c_3 ebenfalls durch die Kantenwinkel des Dreikants bestimmt sind.

Bringt man die Spuren MN, PQ und RT zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, so erhält man die Spur $A_2B_2C_2$ des Polardreikants, dessen Seitenebenen gegen die Projectionsebene gleich geneigt sind; die Projection S' des Dreikantsscheitels erscheint also als der Mittelpunkt des dem Dreiecke $A_2B_2C_2$ eingeschriebenen Kreises. Die Verbindungslinien der Eckpunkte A_2, B_2 und C_2 dieses Dreiecks mit den Scheitelpunkten A_1, B_1 und C_1 der Neigungswinkeldreiecke schliessen die Seiten des Polardreikants ein, und die Winkel QS_1T, NS_2R und MS_3P geben die Winkel desselben, welche zu den Winkeln und Seiten des gegebenen Dreikants supplementär sind.

Soll ein Dreikant aus 3 gegebenen Stücken aufgelöst, d. h. sollen die fehlenden Stücke bestimmt werden, so hat man folgende 6 Fälle zu unterscheiden:

Gegeben:

I. die drei Seiten a, b, c;

II. zwei Seiten a, b, und der eingeschlossene Winkel γ;

III. zwei Seiten a, b, und ein gegenüberliegender Winkel α;
IV. eine Seite a und die anliegenden Winkel β und γ;
V. eine Seite a, ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende Winkel α; und
VI. die drei Winkel α, β und γ.

I. Sind die drei Seiten des Dreikants gegeben, so trägt man auf die Schenkel derselben die willkürlich gewählte Kantenlänge l auf. Die Verbindungslinien der Endpunkte der Schenkel geben die Seiten a_1, b_1 und c_1 des Spurendreiecks, und dieses, sowie die bekannte Kantenlänge bestimmen das Dreikant. Die 3 Winkel erhält man nach der obigen Construction aus den Neigungswinkeldreiecken.

II. Sind zwei Seiten, a und b, und der eingeschlossene Winkel γ gegeben, so kann man aus den gegebenen Kantenwinkeln a und b, und der willkürlich angenommenen Kantenlänge l die Seiten a_2, b_2 des Neigungswinkeldreiecks für den Winkel γ leicht bestimmen. Man trägt nämlich (Fig. 2a) die Kantenlänge auf die Schenkel der gegebenen Winkel a und b auf, und errichtet in dem Scheitel derselben die Senkrechte auf einen Schenkel. Gleichzeitig mit a_2 und b_2 erhält man auch die Seiten a_3 und b_3 des dem Neigungswinkeldreieck anliegenden Dreiecks, welches mit dem Spurendreieck einen Eckpunkt gemeinsam hat, und die Seiten a_1, b_1 des Spurendreiecks. Trägt man nun (Fig. 2b) auf die Schenkel des gegebenen Winkels γ die so gefundenen Seiten a_2 und b_2 auf, so erhält man das Neigungswinkeldreieck RC_1T, und das an die Seite RT desselben mit den Seiten a_3, c_3 construirte Dreieck RCT gibt den Eckpunkt C des Spurendreiecks. Die beiden andern Eckpunkte A und B dieses Dreiecks erhält man, wenn man von C aus auf die Seiten CR und CT die bekannten Seiten b_1 und a_1 des Spurendreiecks aufträgt. Aus dem Spurendreieck lassen sich dann die fehlenden Stücke des Dreikants auf die oben angegebene Weise leicht bestimmen.

III. Sind zwei Seiten a, b und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel α gegeben, so muss zunächst der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel β bestimmt werden. Um diesen Winkel zu erhalten, denkt man sich (Fig. 1a und 1b) die Neigungswinkelebenen der Dreikantswinkel α und β parallel verschoben, bis sie durch den Eckpunkt C des Spurendreiecks gehen. Die einen Schenkel beider Neigungswinkel, die Schnittlinien CG und CH der Neigungswinkelebenen mit den Seitenebenen CSA und CSB des Dreikants, gehen ebenfalls durch den Punkt C und sind auf den Kanten AS und BS senkrecht. Die Schnittlinien GK und HK dieser Ebenen mit der Seitenebene ASB, welche die zweiten Schenkel der Neigungswinkel α und β bilden, gehen durch die beiden Punkte G und H der

Seitenkanten AS und BS und sind ebenfalls auf diesen Kanten senkrecht. Diese beiden Geraden schneiden sich im Punkte K der Seitenebenen ASB, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Eckpunkte C des Spurendreiecks gibt die auf der Seitenebene ASB senkrechte Schnittlinie CK der beiden durch C gehenden Neigungswinkelebenen. Diese beiden Ebenen bestimmen also die beiden bei K rechtwinkligen Dreiecke CGK und CHK, welche die Kathete CK gemeinsam haben und bei G und H die Neigungswinkel α und β der entsprechenden Dreikantskeile oder deren Supplemente enthalten. Mit Hülfe dieser beiden Dreiecke kann nun der Winkel β aus den gegebenen Stücken leicht bestimmt werden. Sind (Fig. 3a) a und b die gegebenen Seiten, so erhält man zunächst durch Auftragen der beliebig gewählten Kantenlänge $AS = BS = CS = l$ die Strecken a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 auf die bekannte Weise. Fällt man dann von C die Senkrechten CG und CH auf die Kanten AS und BS, so erhält man in denselben die Hypotenusen der Neigungswinkeldreiecke CGK und CHK. Construirt man an CG bei G den gegebenen Winkel α, oder, wenn $\alpha > 90^0$, seinen supplementären Winkel, und zieht von C die Senkrechte CK auf den zweiten Schenkel dieses Winkels, so ist CGK das Neigungswinkeldreieck für den Winkel α. Von dem Neigungswinkeldreieck des Winkels β kennt man jetzt die eine mit CGK gemeinsame Kathete CK und die Hypotenuse CH, aus welchen Stücken es construirt werden kann. Durchschneidet man nämlich die Gerade CK im Punkte H_1 durch einen Kreisbogen vom Radius CH und dem Mittelpunkte C, so erhält man in H_1 den dritten Eckpunkt dieses Dreiecks, und in dem Winkel bei H_1 den gesuchten Winkel β.

Bei dieser Bestimmung des Winkels β muss noch entschieden werden, ob der durch diese Construction erhaltene, spitze Winkel des Dreiecks CHK selbst, oder sein supplementärer, stumpfer Winkel, oder vielleicht beide Winkel den gesuchten Dreikantswinkel β ergeben. Zur Entscheidung dieser Frage dienen die bekannten Sätze über das Dreikant, dass für

$$a+b \overset{<}{\underset{>}{=}} 2R \text{ auch } \alpha+\beta \overset{<}{\underset{>}{=}} 2R, \text{ und für } a \gtrless b \text{ auch } \alpha \gtrless \beta$$

sein muss.

Man hat daher folgende 8 mögliche Fälle:

1. für $a+b < 2R$, $a > b$, $\alpha < R$; muss $\beta < R$ sein;
2. „ $a+b < 2R$, $a > b$, $\alpha > R$; „ $\beta < R$ „
3. „ $a+b < 2R$, $a < b$, $\alpha < R$; kann $\beta \lessgtr R$ „
4. „ $a+b < 2R$, $a < b$, $\alpha > R$; ist das Dreikant unmöglich;

5. für $a+b > 2R$, $a < b$, $\alpha > R$; muss $\beta > R$ sein;
6. „ $a+b > 2R$, $a < b$, $\alpha < R$; „ $\beta > R$ „
7. „ $a+b > 2R$, $a > b$, $\alpha > R$; kann $\beta \gtrless R$ „
8. „ $a+b > 2R$, $a > b$, $\alpha < R$; ist das Dreikant unmöglich.

Aus diesem Schema kann nun leicht entnommen werden, welcher der beiden durch die Construction erhaltenen Winkel der gesuchte Dreikantswinkel β ist. Hierbei ist noch zu bemerken, dass in den Fällen 3. und 7., wo beide Winkel der Aufgabe genügen, bei besonderer Annahme der gegebenen Stücke das Dreikant auch unmöglich werden kann; es kann nämlich, da in diesen Fällen $CH < CG$ ist, CH auch kleiner als CK sich ergeben, wo dann das Dreieck CHK, und mit ihm der Winkel β, unmöglich wird.

Um jetzt das Spurendreieck, und aus ihm die fehlenden Stücke des Dreikants zu erhalten, construirt man an eine Gerade A_1M (Fig. 3b) als gemeinsamen Schenkel, die beiden bekannten Winkel $MA_1N = \alpha$ und $MA_1Q = \beta$, und trägt auf die nicht gemeinsamen Schenkel die früher bestimmten Seiten a_2 und b_2 der durch den Scheitel gehenden Neigungswinkeldreiecke auf. Verbindet man die Endpunkte N und Q dieser Strecken und verlängert diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitt M mit dem gemeinsamen Schenkel A_1M der beiden Winkel, so erhält man in MA_1N und MA_1Q die beiden mit der gemeinsamen Seite c_2 und dem gleichen Winkel z auf einander gelegten Neigungswinkeldreiecke der Winkel α und β des Dreikants. Der A_1 gegenüberliegende Eckpunkt A des Spurendreiecks liegt in der von A_1 auf MN gefällten Senkrechten und ist durch die Länge der Seite $AN = b_3$ bestimmt. Die von A auf AN aufgetragene Seite b_1 des Spurendreiecks bestimmt den Eckpunkt C, und die Seitenlänge $BC = a_1$ den dritten Eckpunkt B desselben.

IV. Sind zwei Winkel, α und β, und die zwischenliegende Seite c gegeben, so benützt man wieder die durch den Punkt C gehenden Neigungswinkeldreiecke CGK und CHK zur Construction. Nimmt man die gemeinsame Kathete CK willkürlich an, so kann man (Fig. 4a) in CGK und CHK aus den beiden gegebenen Winkeln α und β, oder deren Supplementen, diese beiden Dreiecke construiren. Die Katheten GK und HK geben die Abstände des in der Ebene der Seite c gelegenen Punktes K von den Kanten AS und BS, welche positiv oder negativ genommen werden müssen, je nachdem die Winkel α und β kleiner oder grösser als 90^0 sind. Ist also (Fig. 4b) AS_3B die gegebene Seite c, und zieht man in den Abständen GK und HK die Parallelen zu den Schenkeln S_3A und S_3B dieses Winkels, (wobei die positive Richtung dieser Abstände gegen die innere Winkelfläche an-

genommen werden muss), so erhält man in dem Durchschnitte derselben den Punkt K. Die Senkrechten von K auf S_3A und S_3B bestimmen die Lage der Punkte G und H in den Kanten SA und SB des Dreikants oder in deren Verlängerungen. Errichtet man daher in G und K (Fig. 4a) die Senkrechten HS_1 und GS_2 auf die Hypotenusen CG und CH der Dreiecke CGK und CHK, und trägt auf dieselben die früher bestimmten Strecken GS_3 und HS_3 in ihrer entsprechenden Richtung auf, so erhält man die Dreiecke CHS_1 und CGS_2, welche bei S_1 und S_2 die Seiten a und b des Dreikants, oder deren Supplemente enthalten. Die Hypotenusen dieser Dreiecke geben die Kantenlänge l, aus welcher die Seitendreiecke AS_2C und BS_1C des Dreikants, mit den Seiten a_1 und b_1 des Spurendreiecks gefunden werden. Trägt man noch die gefundene Kantenlänge auf die Schenkel des Winkels c, so ergibt sich in AB die dritte Seite c_1 des Spurendreiecks, wodurch dasselbe und mit ihm das Dreikant bestimmt erscheint.

V. Sind zwei Winkel α und β, und eine gegenüberliegende Seite a gegeben, so kann die zweite gegenüberliegende Seite b mit Hülfe der durch C gehenden Neigungswinkeldreiecke CGK und CHK leicht bestimmt werden. Ist a (Fig. 5.) die gegebene Seite, so trägt man auf die Schenkel dieses Winkels die beliebige Kantenlänge $l{=}S_1A{=}S_1B$ auf, und fällt von C die Senkrechte CH auf den andern Schenkel desselben. Construirt man dann an CH den gegebenen Dreikantswinkel β oder sein Supplement, und zieht die Senkrechte CK, so ist CHK das Neigungswinkeldreieck des Winkels β. Von dem zweiten dieser rechtwinkligen Dreiecke ist nun die Kathete CK und ein spitzer Winkel (α oder dessen Supplement) gegeben, aus welchen Stücken dasselbe in CKG construirt werden kann. Errichtet man hierauf in H die Senkrechte auf CH und durchschneidet dieselbe in S_2 durch einen Kreisbogen vom Radius l aus dem Mittelpunkte C, so gibt der Winkel HS_2C oder sein Supplement die gesuchte Seite b des Dreikants. Wie im Falle III. muss auch hier noch bestimmt werden, welcher der beiden so erhaltenen Winkel der Aufgabe genügt, was aus dem dort gegebenen Schema, wenn man die Seiten und Winkel gegenseitig vertauscht, leicht entnommen werden kann. Aus den nun bekannten Seiten a und b, und den gegenüberliegenden Winkeln α und β werden das Spurendreieck und die fehlenden Stücke, wie im Falle III., gefunden.

VI. Soll aus den drei Winkeln das Dreikant bestimmt werden, so geht die Construction von einem der drei durch den Scheitel gehenden Neigungswinkeldreiecken z. B. RC_1T aus. Dieses Dreieck enthält den gegebenen Winkel γ des Dreikants, und die beiden andern

Winkel desselben, x und y, sind aus den gegebenen Dreikantswinkeln leicht bestimmbar. Es ist nämlich, wie leicht ersichtlich,

$$x+y=180^0-\gamma;\quad x-y=\alpha-\beta.$$

Ist daher (Fig. 6a) AOB der Winkel γ, und macht man BOC gleich α und COD gleich β, so gibt der zu γ supplementäre Winkel EOB die Summe, und BOD die Differenz der Winkel x und y. Halbirt man also den Winkel EOD durch den Strahl OF, so erhält man in EOF den Winkel x und in FOB den Winkel y. Construirt man mit den Winkeln γ, x und y, und mit willkürlicher Seitenlänge das Dreieck RC_1T (Fig. 6b), so geben RC_1 und TC_1 die Seiten b_2, a_2, und RT die Seite r des Neigungswinkeldreiecks für den Winkel γ. Ebenso kann man an die gemeinsame Seite a_2 mit den Winkeln β und x das Neigungswinkeldreieck des Winkels β construiren, und erhält so die Seiten c_2 und p dieses Dreiecks. Jetzt handelt es sich noch um die Bestimmung der Strecke a_3, da aus a_3 und a_2 die Seite a_1 des Spurendreiecks und die Kantenlänge l gefunden werden kann. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke RCT und PBQ (Fig. 1a und 1b) folgt:

$$r:a_3=a_3:p;$$

d. h. a_3 ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen p und r. Construirt man daher über RT (Fig. 6b) als Durchmesser einen Halbkreis und errichtet im Punkte P die Senkrechte PL, so ist nach einem bekannten Satze:

$$r:TL=PL:p,$$

mithin TL die gesuchte Strecke a_3. Der C_1 gegenüberliegende Eckpunkt C des Spurendreiecks ist dann durch die Senkrechte CC_1 auf RT und durch die Entfernung $CT=a_3$ bestimmt, wobei sich auch die Seite $CR=b_3$ ergibt. Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 6c) mit der Hypotenuse a_3 und einer Kathete a_2, so gibt die zweite Kathete desselben die Kantenlänge l, aus welcher auch die Seite a_1 des Spurendreiecks leicht gefunden werden kann. Auf ganz gleiche Weise findet man aus b_2 und b_3 die entsprechende Seite b_1 des Spurendreiecks. Durch die Seiten a_1 und b_1 und den von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C ist aber das Spurendreieck ABC (Fig. 6b) und mit ihm das Dreikant vollkommen bestimmt.

Fiume, den 15. September 1876.

XXIII.

Zur Theorie des Keiles.

Von

P. Meutzner.

Die folgenden Zeilen wollen zunächst auf gewisse Fehler aufmerksam machen, die sich in verbreiteten physikalischen Lehrbüchern bei der Ableitung des Satzes vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile vorfinden, und beabsichtigen andrerseits, womöglich eine einheitliche Fassung dieses Theoremes anzubahnen. Eine kurze Herleitung des Theoremes sei vorausgeschickt.

Wird in ein widerstehendes Mittel ein materielles, gleichschenkliges Dreieck hineingetrieben vermöge einer in der Richtung der Höhe DC wirkenden Kraft P, so wird ein Zerreissen jenes Mittels in einer zu den Schenkeln des Dreiecks im Allgemeinen senkrechten Richtung die Folge sein. Die Wirkung von P ist sonach äquivalent mit der zweier, unter den gegebenen Verhältnissen einander gleichen Druckkräfte $Q = Q'$, deren Richtungen man erhält, wenn man von einem in der Richtung der Kraft P liegenden Punkte, z. B. α, auf AC und BC Normalen fällt. Ist $\alpha\delta$ das Bild von P, so sind $\alpha\beta$ und $\beta\delta = \alpha\gamma$ die Repräsentanten der P äquivalenten Druckkräfte $Q = Q'$, so dass

$$P : Q : Q' = \alpha\delta : \alpha\beta : \beta\delta$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke endlich:

$$P : Q : Q' = AB : AC : BC$$

d. h.: „Eine senkrecht auf die Basis eines materiellen gleichschenkligen Dreiecks wirkende Kraft P ist äquivalent mit 2 einander

gleichen, senkrecht zu den Schenkeln wirkenden Druckkräften $Q = Q'$, wenn erstere zu je einer der letzteren sich verhält wie die Basis zu einem Schenkel“.

Hieraus folgt durch Umkehrung: Drücken 2 Kräfte $Q = Q'$ senkrecht auf die Schenkel eines materiellen gleichschenkligen Dreiecks, so kann ihnen das Gleichgewicht gehalten werden durch eine zur Basis senkrechte Kraft P, wenn diese zu je einer Druckkraft sich verhält wie die Basis zum Schenkel“.

Betrachten wir schliesslich ABC als Durchschnittsfigur eines gleichschenkligen Keiles, so haben wir den Satz vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile hierdurch gewonnen. — Sehen wir uns jetzt in einigen Lehrbüchern nach der Fassung dieses Lehrsatzes um, wir lesen:

„Beim Keile findet Gleichgewicht statt wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Rücken zur Seite des Keiles“. (Reis.)

„Eine Kraft Q, welche rechtwinklig gegen den Rücken des Keiles wirkt, hält einem rechtwinklig gegen die Seite des Keiles wirkenden Drucke P das Gleichgewicht, wenn sich Q zu P verhält wie die Breite des Keilrückens zur Länge des Keiles“. (Müller.)

„Es verhält sich für jede Hälfte des Keiles Kraft zur Last wie der halbe Rücken zur Höhe des Keiles, oder für die Gesammtwirkung Kraft zur Last, wie der Rücken des Keiles zu seiner Höhe“. (Gerding.)

„Die Kraft verhält sich zum Widerstande wie die halbe Breite des Rückens zur Seitenlinie des Keiles“. (Spiller.)

„Die Kraft verhält sich zu einer der beiden Lasten, wie der Rücken des Keiles zu einer seiner Seiten“. (Fliedner.)

Diese Aufzählung zeigt zur Genüge, dass nach Inhalt wie nach Form das beregte Theorem einen sehr verschiedenen Ausdruck gefunden.

Zuvörderst scheint es wünschenswert, über eine einheitliche Bezeichnung der einzelnen Stücke des Keiles sich zu verständigen. Die der Schneide des Keiles gegenüberliegende Fläche, resp. deren lineare Darstellung in der herkömmlichen Durchschnittsfigur soll kurz der Rücken (r) des Keiles heissen, in den obigen Sätzen findet sich dafür auch noch die Bezeichnung „Breite“. — Die beiden die Schneide des Keiles bildenden Flächen resp. deren lineare Darstellungen mögen die Seiten (s) des Keiles genannt werden; (der Einfachheit wegen setzen wir voraus, der Keil sei gleichschenkelig.) Der dafür auch

noch gebrauchte Ausdruck „Länge“ (z. B. auch bei Poisson, Koppe u. a.) wenn demselben auch eine gewisse Berechtigung nicht abgesprochen werden kann, sofern man ja den Keil auf die schiefe Ebene zurückzubeziehen pflegt, ist doch, zumal wenn dieser Begriff vorher nicht definirt ist, wie Beispielsweise bei Müller, oder das Theorem nicht im Zusammenhange mit seiner Ableitung gelesen wird, nicht frei von Zweideutigkeit: kann man doch bei diesem Worte „Länge“ recht wol auch an den Abstand der Schneide vom Rücken denken In der Tat mag im folgenden unter „Länge“ (l) des Keiles, der eben definirte Abstand verstanden werden im Gegensatze zu der von Gerding dafür angewendeten Bezeichnung „Höhe“. — Für das durch das Eintreiben des Keiles zuüberwindende Hindernis findet sich bald Last, bald Druck, bald Widerstand gebraucht, sollte es sich in Gemässheit der üblichen Bezeichnung bei den anderen einfachen Maschinen nicht empfehlen den Ausdruck „Last“ anzunehmen? Wir wählen dafür das Zeichen Q, wie für die treibende, auf den Rücken senkrecht wirkende Kraft P.

Bei Zugrundelegung dieser Zeichen lassen sich die obigen Sätze kürzlich durch folgende Formeln wiedergeben:

$P:Q = r:s$ Reis, Müller, Fliedner.

oder $\left.\begin{array}{l} P:Q = \frac{1}{2}r:l \\ P:2Q = r:l \end{array}\right\}$ Gerding. s. p. 6.

$P:2Q = \frac{1}{2}r:s$ Spiller.

Wenden wir uns zu einer kritischen Besprechung einiger Ableitungen dieser Sätze.

Reis Physik[2] p. 91. sagt: „Dieses Gesetz geht leicht aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten hervor; denn ist der Keil mit der Kraft P um den Weg dc (s. Fig. 2.) in die zu sprengende Masse eingedrungen, so ist dieselbe um den Weg de auseinander gedrängt; folglich ist $P:dc = Q:de$ oder $P:Q = de:dc$.“

Daraus ergibt sich ihm schliesslich

$$P:Q = ab:ac$$

Augenblicks noch die Richtigkeit der Deduction zugegeben, wäre der Beweis doch einfacher dadurch zu geben, dass man den Keil ganz in den Körper eingedrungen denke. Ohne erst auf ähnliche Dreiecke zurückgreifen zu müssen, ergäbe sich dann

$$P:ac = Q:db \quad \text{und} \quad P:Q = ab:ac$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten musste aber doch



die virtuelle Arbeit der senkrecht zu dem Rücken wirkenden Kraft P durch $P:cf$ ausgedrückt werden, wenn cf den Abstand des Punktes (der Schneide) c von dc bedeutet, da P nur um cf, nicht um dc „in die zusprengende Masse eingedrungen ist.“ Schliesslich würde dies auf folgenden Ausdruck des gesuchten Satzes führen:

$$P:cg = Q:al \quad \text{oder} \quad P:Q = r:l$$

Ganz ähnlich wie Reis hat auch Weinhold in seiner weitverbreiteten „Vorschule der Physik“[1] p. 64. das Gleichgewicht der Kräfte am Keile nachgewiesen. In dem Beispiele — eine knappe Fassung des Lehrsatzes fehlt — welches das Spiel der Kräfte versinnlichen soll, ist ein 25^{cm} langer, 5^{cm} breiter Keil mit einer Kraft von 100 Kgr. „seiner ganzen Länge nach“ in das Holz eingetrieben, daraus wird die Arbeit der Kraft gleich 25 MK. berechnet und hieraus „die auseinander treibende Kraft“ oder umgekehrt der zu überwindende Druck des Holzes gleich 500 Kgr. gefunden. Allerdings sagt W. nicht, was man unter der Länge des Keiles verstehen soll; entweder ist — wie wahrscheinlich — die Seite ac gemeint; dann ist $P:ac$ aber kein streng richtiger Ausdruck für die Arbeit der Kraft P; oder man erhält wie zuvor $P:Q = r:l$ d. h. das in Rede stehende Theorem in einer anderen als der üblichen Gestalt.

In dem Lehrbuche (auch Grundrisse) der Physik von Müller ist die ganze Frage sehr kurz abgetan. Dort heisst es: „Aus der Theorie der schiefen Ebene lässt sich leicht ableiten, dass zwischen der Kraft Q und der Last P — M. hat sonderbarer Weise hier die umgekehrte Bezeichnung für Kraft und Last wie sonst — „am Keile Gleichgewicht stattfindet, wenn $Q = P:\sin\alpha$, vorausgesetzt, dass die Last P rechtwinklig auf die Seitenfläche, die Kraft Q rechtwinklig gegen den Rücken wirkt, und dass mit α der Winkel der Schneide bezeichnet wird.“ Die Umdeutung dieser Formel aber leitet er mit den merkwürdigen Worten ein: „Wenn der Winkel α nicht zu gross ist, lässt sich das Gesetz des Gleichgewichtes am Keile in Worten auch so ausdrücken: (folgt das Gesetz);“ merkwürdig weil der Wortlaut des Gesetzes richtiger ist als die Formel, deren ungenaue Deutung er sein soll. Es folgt doch bei der gewöhnlichen Ableitung — M's. Bezeichnungen seien beibehalten —

$$Q:P = r:s = 2bg:bc$$

$$Q = P.bg:bc \quad \text{d. h.} \quad Q = 2P.\sin\frac{\alpha}{2}$$

Ganz abweichend von den übrigen Lehrbüchern ist in der wol weniger verbreiteten „Schule der Physik“ von Gerding p. 46. die vor-

liegende Frage behandelt. Mit Benutzung der Bezeichnung unserer Figur heisst es dort: „Es sei *abc* ein Keil, der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken (!) *agc* und *bgc* zusammengesetzt betrachtet werden kann. Die Linie *ab* heisst der Rücken des Keiles und *gc* seine Höhe. — Betrachten wir nun das Eindringen des Keiles, so nehmen irgend 2 Teilchen *d* und *e* des zu trennenden Körpers die Lagen *d'* und *e'* an; sie sind von einander entfernt worden, indem sie auf den schiefen Ebenen fortrücken; dieselbe Bewegung haben aber auch alle übrigen Teile des Körpers gemacht, mithin haben wir beim Keile zwei schiefe Ebenen, bei denen der Widerstand des Körpers die Last bildet und, wo die Kraft in der Richtung der Grundlinien derselben wirkt. Es verhält sich demnach für jede Hälfte des Keiles Kraft zur Last, wie der halbe Rücken zur Höhe des Keiles oder für die Gesammtwirkung: Kraft zur Last wie der Rücken des Keiles zu seiner Höhe.“

Formulirt würde das Gleichgewichtsgesetz sonach lauten:

$$P:Q = \tfrac{1}{2}r:l \qquad \text{I.}$$

für die Gesammtwirkung ist es nach dem Wortlaute möglich

$$P:2Q = r:l \quad \text{od.} \quad 2P:2Q = r:l\,^{*)} \qquad \text{II.}$$

zu setzen. Um den offenbaren Widerspruch zwischen I. und II. zu vermeiden, müsste es natürlich heissen

$$2P:Q = r:l\,^{*)}$$

Jedenfalls ist der Wortlaut nicht klar. — Verweilen wir noch einen Augenblick bei I. Da hier *abc* als aus 2 schiefen Ebenen bestehend betrachtet wird, die unter der Wirkung der Kraft P ihren ganzen mechanischen Effect hervorbringen, so verteilt sich P in gleicher Weise auf die beiden schiefen Ebenen. Für jede Hälfte des Keiles erhält man dann

$$\tfrac{1}{2}P:Q = \tfrac{1}{2}r:l$$

und für die Gesammtwirkung:

$$P:2Q = \tfrac{1}{2}r:l$$

wofür auch

$$P:Q = r:l$$

gesetzt werden könnte, d. h. wir erhalten dieselbe Form des Ge-

---

*) Dann wäre unter P nur die halbe wirkende Kraft verstanden.

setzes, auf welche Reis nach einer früheren Bemerkung (p. 4.) hätte geführt werden müssen.

So sehen wir uns hier vor das Dilemma gestellt als Ausdruck des Gesetzes vom Gleichgewichte der Kräfte am Keile entweder

$$P:2Q = \tfrac{1}{2}r:l; \qquad P:Q = r:l$$

oder

$$P:2Q = \tfrac{1}{2}r:s; \qquad P:Q = r:s$$

anzunehmen. In praxi würde es ziemlich auf dasselbe hinauskommen, da bei den wirklich benutzten Keilen s und l von einander nur wenig verschieden sind und diese Differenz ganz in den Hintergrund tritt gegenüber dem Ausfalle in der theoretischen und praktischen Kraftleistung des Keiles, welche durch die starke Reibung beim Gebrauche des Instrumentes verursacht wird. Wie hat man sich aber von theoretischem Gesichtspunkte aus zu entscheiden? Die Mehrzahl unserer Lehrbücher hat der 2ten Form des Gesetzes den Vorzug gegeben; sollten also in den beiden obigen Ableitungen des ersten Ausdruckes noch Fehler versteckt liegen? Allerdings! Was zunächst die Ableitung nach Gerding betrifft, so ist ja richtig, dass bei dieser Auffassung die Kraft P parallel der Grundlinie der schiefen Ebene wirkt. Trotzdem ist der für diesen Fall geltende Gleichgewichtssatz — Kraft zur Last wie die Höhe zur Grundlinie der schiefen Ebene — um des willen nicht anwendbar: bei dem Beweise dieses Satzes würde die auf der schiefen Ebene liegende Last Q in eine Componente parallel der Grundlinie und eine senkrecht zur Länge der schiefen Ebene zerlegt, letztere dann aus der weiteren Betrachtung ganz weggelassen, weil sie durch die Festigkeit der schiefen Ebene aufgehoben wird; anders beim Keile. Hier haben wir auf beiden Seiten solche senkrechte Druckkräfte, die sich mit nichten aufheben, vielmehr zu einer Resultante in der Richtung von der Schneide nach dem Rücken zusammensetzen und eben dieser Resultante hat P das Gleichgewicht zu halten. — Was dann die Ableitung desselben Satzes $P:Q = r:l$ mittels des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten anlangt, so ist der früher hervorgehobene Fehler nochmals begangen, weil nicht beachtet ist, dass die Druckkräfte Q senkrecht zu den Seiten des Keiles wirken sollen, folglich de (Fig. 2.) nicht die virtuelle Verrückung, $Q:de$ nicht das virtuelle Moment der Last sein kann. Man müsste vielmehr sagen: ist der Keil (Fig. 3.) mit der Kraft P um fc in den zu sprengenden Körper eingedrungen, so sind die zu den Seiten senkrecht wirkenden Lasten Q um die Wege fd (senkrecht bc) und fe (senkrecht ac) fortgehoben werden. Daher ist:

$$P.fc = Q.fd + Q.fe = 2Q.fd = Q.2fd$$

folglich

$$P:2Q = fd:fe = \tfrac{1}{2}r:s$$

oder

$$P:Q = 2fd:fc = r:s$$

d. h. „Am Keile findet zwischen einer senkrecht zum Rücken wirkenden Kraft und einer rechtwinklig auf eine der Seiten drückenden Last Gleichgewicht statt, wenn Kraft zur Last sich wie der Rücken zur Seite verhält."

Meissen.

XXIV.

Kegelflächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe.

Von

Emanuel Czuber

in Prag.

Der Kegelschnitt K (Fig. 1.) sei gemeinschaftliche Leitcurve zweier Kegel, deren Scheitel s und s_1 sich nach s' und s_1' auf die Ebene von K orthogonal projiciren. Es handle sich um den noch übrigen Schnitt der beiden Kegelflächen, resp. um dessen Projection auf die bereits erwähnte Ebene. Zu diesem Ende legt man durch die Gerade ss_1 ein Ebenenbüschel; jede Ebene desselben wird im Allgemeinen beide Kegelflächen, und zwar nach je zwei Erzeugenden schneiden; diese vier Erzeugenden bilden ein vollständiges Vierseit, zwei Gegenecken desselben sind die Scheitel ss_1, zwei andere die Punkte auf K, welche die betreffende Ebene ausschneidet, das dritte Gegeneckenpaar gehört der übrigen Durchdringung an. Ist δ der Schnittpunkt der Geraden ss_1 mit der Ebene K, so bilden die Tracen des Ebenenbüschels ein Stralenbüschel in K mit δ als Mittelpunkt; heben wir die Ebene e mit der Trace e' hervor, welche letztere K in den Punkten 1, 2 trifft, so sind a, b die Schnittgeraden des Kegels s, a_1, b_1 jene von s_1, und a, b, a_1, b_1 bilden das genannte vollständige Vierseit, in welchem ss_1, 1, 2, I, II Gegeneckenpaare sind. Die Zeichnung gibt von allem die Projection auf die K-Ebene. Bei einer Aenderung von e' wird die Diagonale I′, II′ einerseits durch den zu δ in Bezug auf ss_1' zugeordneten harmonischen Punkt δ_1' hindurchgehen, um diesen sich also drehen, andererseits aber auch den zu-

geordnet harmonischen Punkt zu δ in Bezug auf die Schnittpunkte 1, 2 enthalten; letztere aber durchläuft bei der Drehung von c' die Polare D von δ in Bezug auf K. — Damit ist bewiesen, dass der Ort der Punkte I′, II′ in central-collinearer Verwandtschaft zu K steht; denn betrachten wir die Punkte 1, 2 und I′, II′, so liegen entweder 1, I′ und ebenso 2, II′ auf einem Strale durch s_1', oder 1, II′ und 2, I′ auf einem Strale durch s', und die Verbindungslinie von 1, 2 einerseits und jene von I′, II′ andererseits schneiden sich in einem Punkte p der festen Geraden D. Mithin ist der Ort der Punkte I′, II′ der zu K collineare Kegelschnitt K_1' in Bezug auf s' oder s_1' als Collineationscentrum, D als Collineationsaxe. Die beiden Kegel haben ausser dem Kegelschnitt K noch einen zweiten K_1 gemein. Die Ebene derselben ist durch D und den Punkt δ_1 auf ss_1, dessen Projection δ_1' ist, bestimmt.

Die Gerade D spielt nun in Bezug auf die beiden Kegel eine eigentümliche Rolle. Als Collineationsaxe hat sie bezüglich beider Kegelschnitte K und K_1' dasselbe Punktsystem. Sind p und π zwei conjugirte Punkte desselben, dann sind e' $(p\delta)$ und e_1' $(p\delta_1')$ die Polaren von π bezogen auf K und K_1'; räumlich gesprochen bestimmen e' und e_1 die gemeinschaftliche Polarebene von π bezüglich beider Kegel. Die Punkte der Geraden D haben also für beide Kegel dieselbe Polarebene.

Das Punktsystem in D wird ein hyperbolisches, elliptisches oder parabolisches werden, jenachdem δ ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitt K selbst liegt (selbstverständlich hat auch δ_1 bezüglich K_1 die gleiche Lage); im ersten Falle treten zwei reelle Doppelpunkte (Asymptotenpunkte) auf, für welche die Polarebenen zu Berührungsebenen werden; es haben also die Kegel in diesem Falle zwei gemeinschaftliche Tangirungsebenen, die Durchdringung besitzt zwei reelle Doppelpunkte d, d_1 mit den Tangentenpaaren δd, $\delta_1 d$ und δd_1 $\delta_1 d_1$. Im zweiten Falle, wo das Punktsystem in D elliptisch ist, werden die Doppelpunkte, mithin auch die gemeinsamen Tangirungsebenen imaginär. Im dritten Falle endlich fallen die Doppelpunkte in einen zusammen, das Gleiche geschieht mit den gemeinsamen Berührungsebenen, so dass sich die beiden Kegel längs einer Erzeugenden berühren; es fällt dann auch der Kegelschnitt K_1 mit K überein. Der letztbesprochene Fall bildet den Uebergang vom ersten zum zweiten.

Fassen wir das Resultat zusammen:

> Haben zwei Kegel einen Kegelschnitt K gemein, so schneiden sie sich noch nach einem zweiten Kegelschnitt K_1; die

> Schnittlinie D der beiden Ebenen K und K_1 geht durch die zwei reellen, getrennten oder zusammenfallenden, oder die zwei imaginären Doppelpunkte der Durchdringung (Schnittpunkte von K und K_1); in diesen haben die Kegelflächen reelle, getrennte oder zusammenfallende*), oder imaginäre gemeinsame Tangirungsebenen.

Die Gerade D hat von Escherich (nach Chasles' Vorschlag) eine Symptosenaxe der beiden Flächen genannt (Grunert's Archiv, 1877, I; allgemeinere Auffassung und für Flächen zweiten Grades überhaupt). Die Ebenen K und K_1, als deren Schnittlinie D erscheint, bezeichnet er als Symptosenebenen. Wählt man in der Ebene K (oder K_1) irgend einen Punkt und bestimmt seine Polare in Bezug auf den darin liegenden Kegelschnitt, so fixirt diese mit s einerseits und mit s_1 andererseits die Polarebenen des gewählten Punktes bezüglich des einen und des andern Kegels. Diess lässt sich nun so aussprechen:

> Die beiden Symptosenebenen (K und K_1) haben die Eigenschaft, dass die Polarebenen irgend eines ihrer Punkte in Bezug auf beide Kegel sich in ihnen selbst schneiden.

Dazu kommt die schon früher von D erwiesene Eigenschaft, die sich in folgende Worte kleiden lässt:

> Die Punkte der Symptosenaxe D haben bezüglich beider Kegel dieselbe Polarebene.

Die beiden letztgenannten Sätze hat v. Escherich als Definition für Symptosenebene und -Axe aufgestellt.

Weil D die Polare von δ bezüglich K und von δ_1 bezüglich K_1 ist, so sind die Ebenen Ds und Ds_1 die Polarebenen der Geraden ss_1 bezüglich der Kegel s und s_1. Wird nun beachtet, dass die Punkte s, s_1 von δ, δ_1 harmonisch getrennt werden, und dass die Ebenen $D\delta$ und $D\delta_1$ gleichbedeutend sind mit den Symptosenebenen, so lässt sich der Satz aussprechen:

> Die beiden Symptosenebenen der Kegel werden von den Polarebenen der Scheitelverbindungsgeraden, in Bezug auf beide Kegel, harmonisch getrennt. Die Axe dieses Systems harmonischer Ebenen ist die Symptosenaxe.

Der erste der bisher aufgestellten Sätze lässt folgende Umkehrung zu:

---

*) Der Kegelschnitt K_1 degenerirt dann in die Berührungserzeugende.



Gehen zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kegelschnitte K und K_1 durch zwei in der Schnittlinie D der Ebenen gelegene — reelle, zusammenfassende *) oder getrennte, oder imaginäre — Punkte hindurch, so können sie als Durchschnitt zweier Kegel aufgefasst werden, für welche dann jene Ebenen Symptosenebenen und deren Schnittlinie Symptosenaxe ist.

Die Scheitel s, s_1 dieser Kegel liegen auf der Verbindungslinie der Pole δ und δ_1 von D in Bezug auf K und K_1 und werden von letzteren Punkten harmonisch getrennt. Um sie zu erhalten, lege man durch die Gerade $\delta\delta_1$ eine Ebene, welche K in 1, 2 und K_1 in I, II schneidet; 1, I und 2, II, ebenso 1, II und 2, I treffen sich auf jener Geraden und geben die Scheitel s und s_1.

Diese Bedingung, unter welcher zwei Kegelschnittslinien (in verschiedenen Ebenen) als Schnittergebnis zweier Kegel angesehen werden können, ist selbstverständlich dieselbe, unter welcher sie als Schnitte eines Kegels gelten können. Wird der eine von ihnen auf die Ebene des andern oder werden beide sammt der Schnittlinie D auf eine Ebene (central oder parallel) projicirt (oder der eine in die Ebene des andern um die Schnittlinie hineingedreht, was mit einer Parallelprojection identisch ist), wodurch man zwei neue Kegelschnitte (K) und (K_1) und eine Linie (D) erhält, so muss letztere eine der Collineationsaxen sein, welche entspringen, wenn man (K) und (K_1) als collinear liegend betrachtet.

Als Beispiel nehmen wir den besonderen Fall, wo die beiden Kegelschnitte K und K_1 Kreise sind (Fig. 2.). Die Schnittlinie D ihrer Ebenen muss dann für sie eine Linie gleicher Potenzen sein, oder die Kreise müssen sich als Schnitte einer Kugel betrachten lassen. Die Verhältnisse sind hier leicht zu überblicken. Wählt man die durch die Kreiscentra gehende zu D normale Ebene als Zeichenebene, so stellt sich D als Punkt dar, und 1, 2, I, II sind Durchmesser, die der Bedingung zufolge als Sehnen eines Kreises sich repräsentiren. Die Pole von D in Bezug auf K und K_1 liegen gleichfalls in der Zeichenfläche, somit wird diese auch die Kegelscheitel enthalten, welche sich durch entsprechende Verbindung der Punkte 1, 2, I, II sofort in s und s_1 ergeben. Die Zeichenebene tritt hier als eine gemeinschaftliche Hauptebene beider Kegel auf; die Halbirungslinien der Winkel bei s und s_1 geben ein Paar Kegelaxen sx und s_1x_1, welche übrigens bei der symmetrischen Lage der cyklischen Schnitte mit den Halbirungslinien h und h_1 der bei D von K und K_1 eingeschlossenen Winkel

*) Der eine der beiden Kegel degenerirt dann in ein Ebenenpaar.

parallel und daher gegen einander senkrecht sind. Das zweite Axenpaar sy und s_1y_1 liegt ebenfalls in der Zeichenebene, das dritte steht zu ihr senkrecht und projicirt sich nach s und s_1.

> Schneiden sich demnach zwei Kegel zweiter Ordnung nach zwei Kreisen, so treffen sich zwei Axenpaare derselben unter rechtem Winkel, während das dritte parallel ist.

In Fig. 2. hat die Durchdringung der beiden Kegel zwei nach D sich projicirende reelle Doppelpunkte, welche mit der Geraden ss_1 die gemeinschaftlichen Tangirungsebenen festlegen.

Die Fig. 3. bringt den Fall zur Darstellung, wo die beiden Kreise mit D imaginäre Punkte gemein haben. Im ersten Falle sind die zu sx und s_1x_1 senkrechten Schnitte Ellipsen, im andern Falle ist einer davon eine Hyperbel.

Wenn es sich um die Lösung der Aufgabe handeln würde, **einen Kreis auf eine Ebene zu projiciren derart, dass die Projection wieder ein Kreis vom gegebenen Durchmesser ist**, so könnte zur Aufsuchung der Projectionscentra in folgender Weise vorgegangen werden.

Es sei K, Fig. 4., der gegebene Kreis, dessen Ebene auf der Zeichenfläche normal steht und von letzterer nach einem Durchmesser 12 geschnitten wird. E sei die Ebene, in welcher die Projection von K bestimmt werden und den Durchmesser d haben soll. Nach dem Vorausgegangenen wird sich die Lösung darauf reduciren, durch 12 einen Kreis zu legen, welcher in E eine Sehne von der Länge d ausschneidet. Construirt man zu diesem Zwecke an einen beliebigen, durch 12 geführten Kreis C eine Tangente Dt aus D, verzeichnet mit dieser und $\frac{d}{2}$ als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck Dtm, so gibt, wie man sich leicht überzeugt, die um $\frac{d}{2}$ verminderte, resp. vermehrte Hypotenuse Dm die Abstände der Punkte I und II von D. Dies gilt, wenn D ausserhalb der Strecke 12 gelegen ist. — Im andern Falle, Fig. 5., wo D auf der Strecke 12 liegt, beschreibt man über 12 als Durchmesser einen Halbkreis C, macht die in D zu 12 bis an diesen errichtete Senkrechte Dt zur Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks Dtm, dessen Hypotenuse $tm = \frac{d}{2}$ ist; die andere Kathete Dm dieses Dreiecks, einmal zu $\frac{d}{2}$ zu addirt, einmal hiervon abgezogen, gibt die Abstände der Punkte I, II von D. Schon aus dem Gange der Construction ersieht man, dass in diesem zweiten Falle

die Aufgabe nicht für jeden Wert von d eine Lösung zulässt; es muss nämlich, soll eine solche möglich sein, $Dt < \frac{d}{2}$ ausfallen.

Da in beiden Fällen das Abtragen der Abstände der Punkte I und II in zweifacher Weise geschehen kann, da sich ferner für jedes Abtragen zwei Kegel, also zwei Projectionscentra ergeben, so lässt die vorliegende Aufgabe im Allgemeinen vier Lösungen zu.

In den Fig. 4. und 5. bedeuten $K_1(\text{I}, \text{II})$ und $K_1'(\text{I}', \text{II}')$ jedesmal die beiden möglichen Projectionen von $K(12)$, s und s_1 die der ersten, s' und s_1' die der zweiten entsprechenden Kegelscheitel, resp. Projectionscentra. Wie bereits im Eingange gezeigt wurde, werden die beiden Symptosenebenen zweier Kegel durch die zu ihrer Scheitelverbindungsgeraden zugehörigen Polarebenen, d. i. durch die Ebenen Ds und Ds_1 harmonisch getrennt. In unserer Darstellung wird also K und K_1 durch Ds und Ds_1, dann K und K_1' durch Ds' und Ds_1' harmonisch geschieden, und da K_1 mit K_1' (in der Zeichnung) dieselbe Gerade ist, so fallen die Stralen Ds und Ds' einerseits, dann Ds_1 und Ds_1' andererseits zusammen, die vier Projectionscentra liegen also auf zwei durch D gehenden Geraden, welche K und E harmonisch trennen.

Es ist leicht einzusehen, dass für den Fall, wo wie in Fig. 4. und 5. die beiden Kreise gleiche Grösse haben, einer der Kegelscheitel in's Unendliche rückt, eine der Kegelflächen in eine Cylinderfläche übergeht, bei unserer Aufgabe verwandeln sich dann zwei Centralprojectionen in Parallelprojectionen.

Wir kehren zu dem allgemeinen Fall Fig. 1. zurück.

Hält man den einen Kegelscheitel, z. B. s, fest, während man den andern s_1 das ihn projicirende Perpendikel durchlaufen lässt, so dass s_1' constant bleibt, dann durchläuft δ die unbegrenzte Gerade $s's_1'$, während sich die Symptosenaxe D um den Pol σ von $s's_1'$ in Bezug auf K dreht. Dabei bilden die zugehörigen Lagen von δ und δ_1' ein hyperbolisches Punktsystem mit den Asymptotenpunkten s' und s_1'. In der Geraden $s's_1'$ befindet sich aber auch das ihr in Bezug auf den Kegelschnitt K zukommende Punktsystem, welches hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ausfallen wird, jenachdem ein reelles oder imaginäres Schneiden oder eine Berührung von $s's_1'$ mit K stattfindet. Es liegen demnach in $s's_1'$ zwei Punktsysteme, und diese haben im Allgemeinen ein Paar conjugirte Punkte, die wir Δ', Δ_1' nennen wollen, gemeinschaftlich. Welche Bedeutung haben dieselben?

Fällt der Durchstosspunkt von ss_1 nach $\varDelta'$, so geht die Symptosenaxe D durch $\varDelta_1'$, die zweite Symptosenebene $D\varDelta_1$ steht auf der ersten senkrecht. Desgleichen, wenn $\varDelta_1'$ den Durchstosspunkt von ss_1 mit der Ebene von K repräsentirt, geht D_1 durch $\varDelta'$ und es stehen wieder die beiden Symptosenebenen auf einander normal.

Was nun die Punkte $\varDelta'$ und $\varDelta_1'$ anlangt, so treten dieselben immer auf, sobald das zweitgenannte Punktsystem in $s's_1'$ elliptisch ist, letztere Gerade K also nicht schneidet; sie treten dagegen nur bedingungsweise auf, wenn das zweite Punktsystem ebenfalls hyperbolisch ist, $s's_1'$ mit K reelle Schnittpunkte (K, K_1) gibt; in diesem Falle dürfen nämlich die Asymptotenpunkte $s's_1'$ des einen Systems durch die des andern, K, K_1, nicht getrennt werden.

Fassen wir Alles zusammen:

> Bei der beschriebenen Bewegung des Punktes s_1 (also bei der entsprechenden Aenderung des Kegels s_1) geschieht es, wenn K von $s's_1'$ nicht geschnitten wird, zweimal, dass die beiden Symptosenebenen zu einander normal stehen; in dem Falle, wo $s's_1'$ den Kegelschnitt K trifft, geschieht dieses nur dann, und ebenfalls zweimal, wenn s' und s_1' gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig ausserhalb K liegen.

Was die Construction der Punkte $\varDelta'$, $\varDelta_1'$ betrifft, so wird man, wenn beide Systeme hyperbolisch sind, Fig. 6., über $s's_1'$ und KK_1 als Durchmesser Kreise beschreiben, ihre Chordale bestimmen, den Schnittpunkt ω derselben mit $s's_1'$ zum Centrum eines Orthogonalkreises O der erstgedachten Kreise machen, welcher die Punkte $\varDelta'$ und $\varDelta_1'$ ausschneidet. — Ist dagegen das zweite Punktsystem elliptisch, Fig. 7., so wird man über zwei Punktepaaren $x\mathfrak{x}$, $y\mathfrak{y}$ desselben Kreise beschreiben, welche reelle Schnittpunkte α, β liefern; durch einen derselben, z. B. α und die Asymptotenpunkte $s's_1'$ legt man nun einen Kreis C und construirt zu diesem im Punkte α jenen Orthogonalkreis O, der sein Centrum ω in $s's_1'$ hat; dieser gibt wieder die gesuchten gemeinschaftlichen Punkte $\varDelta'$ $\varDelta_1'$ an*).

In dem Zwischenfall, wo das Punktsystem in $s's_1'$ in Bezug auf K ein parabolisches ist, geschieht es auch zweimal, dass die zweite Kegelschnittsebene auf der ersten K senkrecht steht, und diese Lagen sind nach Fig. 8. leicht zu construiren; man braucht blos den zu $(KK_1) \equiv \varDelta_1 \equiv \sigma$, dem Mittelpunkt der parabolischen Involution,

*) Jac. Steiner's Vorl. über synth. Geom. II. Th. v. Dr. H. Schröter, pag. 58.

zugeordnet harmonischen Punkt Δ' in Bezug auf s', s_1' zu bestimmen, Die eine dieser besonderen Ebenen, $D_1\Delta$ nämlich, ist gemeinschaftliche Tangirungsebene beider Kegel, wenn Δ_1' der Durchstosspunkt der Scheitelverbindungslinie ist; die Kegel selbst berühren sich dann längs einer Erzeugenden, welche, doppelt gezählt, mit K die Durchdringung ausmacht.

Ein eigentümlicher Fall tritt ein, wenn die Punkte s', s_1' auf K selbst liegen; dann fallen die beiden in ihrer Verbindungslinie liegenden Punktsysteme zusammen, jedes Paar conjugirter Punkte ist ihnen gemeinschaftlich, daher stehen auch alle bei der beschriebenen Aenderung des Kegels s_1 auftretenden Symptosenebenenpaare auf einander senkrecht; die zweiten Symptosenebenen bilden ein Ebenenbüschel, dessen Axe sich in den Pol σ von $s's_1'$ projicirt.

XXV.

Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane.

Par

Paul Appell.

Soit une conique C et une droite D coupant cette conique en deux points imaginaires M_1 et M_2; prenons sur la droite un point fixe O et désignons par ϱ la distance OM de ce point fixe à un point quelconque M de la droite. Les distances OM_1, OM_2 seront données par une équation du second degré en ϱ ayant ses racines imaginaires; soient

$$\varrho_1 = a + bi, \quad \varrho_2 = a - bi$$

ces deux racines. Pour figurer les deux points M_1 et M_2, portons à partir de O sur la droite D une longueur $OA = a$; puis prenons sur la perpendiculaire en A au plan de la figure de part et d'autre du point A des longueurs $AM_1 = AM_2 = b$: nous obtenons ainsi deux points M_1 et M_2 dont la position dans l'espace est indépendante du choix de l'origine O sur la droite D et qui peuvent par conséquent être considérés comme représentant les deux points imaginaires d'intersection de la droite et de la conique.

Ces deux points étant déterminés quand la conique et la droite sont connues possèdent des propriétés géométriques qui remplacent celles dont l'énoncé exige l'emploi des imaginaires. C'est ainsi que les points M_1 et M_2 sont des points d'où l'on voit sous un angle droit les couples de points situés sur la droite et conjugués par rapport à la conique.

Si la droite D se meut parallèlement à elle-même, le lieu des points M_1 et M_2 est une autre conique C' qu'on peut appeler conjuguée de la conique C relativement à la direction D.

Cette représentation des points imaginaires s'étend d'elle-même au cas des courbes algébriques d'ordre supérieur.

Remarque. Soit un point imaginaire ayant pour coordonnées par rapport à des axes rectangulaires

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$y = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

le point de l'espace représentant ce point aura pour coordonnées

$$x = \alpha, \quad y = \gamma, \quad z = +\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$$

Strassbourg 16 Aout.

XXVI.

Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren.

Von

Herrn **Leopold Klug,**
Realschullehrer in Pressburg.

Es giebt im Allgemeinen acht Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren.

Bezeichnen wir die Flächen und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte mit 1, 2, 3, 4 und nehmen diejenigen Seiten der Flächen, auf welchen das Tetraeder ruht, als positiv an, die andere aber negativ, so wird eine Kugel alle Flächen auf den positiven, vier Kugeln werden drei Flächen auf den positiven, eine auf der negativen, endlich werden drei Kugeln zwei Flächen auf den positiven, zwei auf den negativen Seiten berühren.

Bezeichnet man ferner den Radius der Kugel, welche alle Flächen auf den positiven Seiten berührt, mit r, die Radien, welche die resp. 1, 2, 3, 4 Fläche auf der negativen, die übrigen drei aber auf den positiven Seiten berühren, mit r_1, r_2, r_3, r_4, die Flächeninhalte der Dreiecke mit f_1, f_2, f_3, f_4, endlich das dreifache Volumen des Tetraeders mit V, so bestehen zwischen diesen Grössen folgende Relationen

1) $\frac{1}{r} = \frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{V}$; 2) $\frac{1}{r_1} = \frac{-f_1+f_2+f_3+f_4}{V}$;

3) $\frac{1}{r_2} = \frac{f_1-f_2+f_3+f_4}{V}$; 4) $\frac{1}{r_3} = \frac{f_1+f_2-f_3+f_4}{V}$;

5) $\frac{1}{r_4} = \frac{f_1+f_2+f_3-f_4}{V}$

Die erwähnten drei Kugeln berühren eine gewisse Fläche (z. B. 1 Fläche) entweder auf der positiven oder negativen Seite, aber alle drei übrigen Flächen kann dieselbe Kugel weder auf den positiven, noch auf den negativen Seiten berühren.

Berühren die drei Kugeln die 1 Fläche auf der positiven Seite und man bezeichnet mit ϱ_i den Radius der Kugel, welche noch die i Fläche auf der positiven Seite berührt, so ist leicht ersichtlich, dass

$$6)\quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{f_1+f_2-f_3-f_4}{V}; \qquad 7)\quad \frac{1}{\varrho_3} = \frac{f_1-f_2+f_3-f_4}{V};$$

$$8)\quad \frac{1}{\varrho_4} = \frac{f_1-f_2-f_3+f_4}{V};$$

berühren sie aber die 1 Fläche auf der negativen Seite und man bezeichnet mit ϱ_i' den Radius der Kugel, welche noch die 1 Fläche auf der negativen Seite berührt, dann ist

$$9)\quad \frac{1}{\varrho_2'} = \frac{f_3+f_4-f_2-f_1}{V}; \qquad 10)\quad \frac{1}{\varrho_3'} = \frac{f_2+f_4-f_3-f_1}{V};$$

$$11)\quad \frac{1}{\varrho_4'} = \frac{f_2+f_3-f_4-f_1}{V}.$$

Die Lage der drei Kugeln wird von der Grösse der Flächen bestimmt.

Wenn wir voraussetzen, dass

$$a)\quad f_1 > f_2 > f_3 > f_4$$

dann sind $\frac{1}{\varrho_2}$ und $\frac{1}{\varrho_3}$ positiv, aber $\frac{1}{\varrho_4}$ nur dann positiv, wenn $f_1-f_2 > f_3-f_4$ und $\frac{1}{\varrho_2'}$ negativ; die Kugeln müssen also in dem Falle die 1 Fläche auf der positiven Seite berühren.

$$b)\quad f_2 > f_3 > f_4 > f_1$$

dann sind $\frac{1}{\varrho_3'}$ und $\frac{1}{\varrho_4'}$ positiv, aber $\frac{1}{\varrho_3'}$ nur dann positiv, wenn $f_2-f_3 < f_4-f_1$, während $\frac{1}{\varrho_4}$ negativ; in dem Falle können nicht alle drei Wurzeln die 1 Fläche auf der positiven Seite berühren.

$$c)\quad f_2 > f_1 > f_3 > f_4$$

dann sind $\frac{1}{\varrho_2}$ positiv, $\frac{1}{\varrho_4}$ und $\frac{1}{\varrho_2'}$ negativ; alle drei Kugeln berühren

also die 1 Fläche weder auf der positiven noch auf der negativen Seite.

Aus diesem folgt:

1) Die drei Kugeln berühren entweder die kleinste oder grösste Fläche auf (dem Zeichen nach) derselben Seite.

2) Sie berühren die grösste Fläche (und zwar immer auf der positiven Seite) nur dann, wenn die Differenz der zwei grössten Flächen grösser ist als die Differenz der zwei kleineren.

3) Sie berühren die kleinste Fläche (und zwar immer auf der negativen Seite) nur dann, wenn die Differenz der zwei grössten Flächen kleiner ist als die Differenz der beiden übrigen.

Aus den Gleichungen von 6) bis 11) ergibt sich, dass

12) wenn $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$, dann sind
$\varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \infty$,
„ $f_1 + f_k = f_i + f_l$, dann sind
$\varrho_k = \infty$; $\varrho_i \gtrless \varrho_l$ aber nicht unendlich gross;
„ $f_1 = f_k$; $f_i = f_l$, dann sind
$\varrho_i = \varrho_l = \infty$; ϱ_k „ „ „
„ $(f_1 > f_k) = f_i = f_l$, dann sind
$\varrho_k = \varrho_i = \varrho_l$ „ „ „

Die Mittelpunkte der Kugeln werden durch die gemeinsamen Punkte derjenigen Ebenen bestimmt, welche die Flächenwinkel halbiren.

Bezeichnet man mit J_{li} und A_{li} diejenigen Ebenen, welche den inneren resp. äusseren Winkel der Flächen l, i halbiren, die Mittelpunkte der Kugeln, deren Radien r, r_i, ϱ_l sind, mit m, m_i, ϱ_l, dann liegen

13)
$m m_3 m_4 \mu_2$	in der	Ebene	J_{12};	$m_1 m_2 \mu_3 \mu_4$	in der	Ebene	A_{12};
$m m_4 m_2 \mu_3$	„	„	J_{13};	$m_1 m_3 \mu_4 \mu_2$	„	„	A_{13};
$m m_2 m_3 \mu_4$	„	„	J_{14};	$m_1 m_4 \mu_2 \mu_3$	„	„	A_{14};
$m m_1 m_4 \mu_4$	„	„	J_{23};	$m_2 m_3 \mu_2 \mu_3$	„	„	A_{23};
$m m_1 m_3 \mu_3$	„	„	J_{24};	$m_2 m_4 \mu_2 \mu_4$	„	„	A_{24};
$m m_1 m_2 \mu_2$	„	„	J_{34};	$m_3 m_4 \mu_3 \mu_4$	„	„	A_{34};

ferner gehen die Geraden

$$14)\begin{cases} mm_1,\ m_2\mu_2,\ m_3\mu_3,\ m_4\mu_4 & \text{durch den Eckpunkt } 1; \\ mm_2,\ m_1\mu_2,\ m_3\mu_4,\ m_4\mu_3 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad 2; \\ mm_3,\ m_1\mu_3,\ m_2\mu_4,\ m_4\mu_2 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad 3; \\ mm_4,\ m_1\mu_4,\ m_2\mu_3,\ m_3\mu_2 & \text{,,} \quad \text{,,} \quad 4. \end{cases}$$

Nach dieser Zusammenstellung ist leicht ersichtlich, dass die Centralprojectionen der Mittelpunkte aus einem Eckpunkte als Centrum auf die gegenüberliegende Fläche ein Viereck bestimmen, dessen Diagonalpunkte die anderen drei Eckpunkte des Tetraeders sind.

Um die Lagen der Berührungspunkte der Kugeln auf den Flächen z. B. 1 Fläche zu bestimmen, bezeichnen wir mit p_1 die orthogonale Projection des 1 Eckpunktes auf die 1 Fläche, die Centralprojectionen der Mittelpunkte aus dem 1 Eckpunkt mit m', m_1', μ_2'... die Berührungspunkte der Kugeln auf der 1 Fläche mit a, a_1, α_2...

Aus der Reihe 14) folgt nach den Gesetzen der Perspective, dass die Punkte

$$15)\quad p_1 a a_1 m';\quad p_1 a_2 m_2' \alpha_2;\quad p_1 a_3 m_3' \alpha_3;\quad p_1 a_4 m_4' \alpha_4$$

sowie

$$16)\begin{cases} 2a_1a_2;\quad 3a_1a_3;\quad 4a_1a_4; \\ 2a\ \alpha_2;\quad 3a\ \alpha_3;\quad 4a\ \alpha_4; \\ 2a_3\alpha_4;\quad 3a_2\alpha_4;\quad 4a_2\alpha_3; \\ 2a_4\alpha_3;\quad 3a_4\alpha_2;\quad 4a_3\alpha_2 \end{cases}$$

in einer Geraden liegen.

Die acht Berührungspunkte, die drei Eckpunkte (2, 3, 4) und die orthogonale Projection (p_1) des vierten Eckpunktes sind derart situirt auf 16 Geraden, dass durch jeden Punkt vier Gerade gehen, und auf jeder Geraden drei Punkte liegen*).

Es ist leicht zu beweisen, dass auf den unter 15) angeführten Geraden die benannten Punkte von einander harmonisch getrennt sind.

Bilden wir zu dem Ende aus den Gleichungen 1) bis 11) folgende andere:

$$\frac{1}{r_k}+\frac{1}{\varrho_k}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}=\frac{2f_1}{V}=\frac{2f_1}{h_1 f_1}=\frac{2}{h_1};\qquad \frac{1}{r_k}-\frac{1}{\varrho_k'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}=\frac{2}{h_1}$$

und nehmen wir noch in Betracht die Proportion

*) Durège, Curven 3ter Ordnung p. 214.

$$r_k : \varrho_k : h_1 = a_k m_k' : \alpha_k m_k' : p_1 m_k'$$

welche sich aus den im Raume vorkommenden ähnlichen Dreiecken ergibt, so erhalten wir:

$$\frac{1}{r_k} + \frac{1}{\varrho_k} = \frac{2}{h_1} = \frac{p_1 m_k'}{h_1} \left[\frac{1}{a_k m_k'} + \frac{1}{\alpha_k m_k'} \right]$$

und davon ist:

$$\frac{2}{p_1 m_k'} = \frac{1}{a_k m_k'} + \frac{1}{\alpha_k m_k'}.$$

Die Gleichung beweist, dass die Punkte p_1, m_k' von a_k, α_k harmonisch getrennt sind.

Pressburg, den 4. Juni.

XXVII.

Eclaircissements sur une Note relative à la fonction $\log \Gamma x$.

Par

Monsieur **Genocchi**,
Professeur à l'Université de Turin.

Deux Notes, que j'ai présentées en 1873 à l'Académie Royale de Belgique, ont été l'objet d'un compte rendu dans le Litterarischer Bericht, No. CCXXVII, pag. 22 et 25 (Archiv, tom. 57.). Comme en certains points ces Notes n'ont pas été comprises et interprétées suivant leur véritable sens, j'ai cru convenable de donner quelques explications, ainsi que le savant Rédacteur avait bien voulu m'y engager. Sur l'une d'elles, qui se rapportait à la Géométrie abstraite, je me suis déjà expliqué dans un travail étendu qui vient de paraître et qui est intitulé: Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes (Turin, 1877). Ainsi je me bornerai ici à l'autre Note, sur laquelle j'entrerai dans tous les détails et je donnerai tous les développements qui sont nécessaires pour comprendre ces explications sans recourir à d'autres écrits sur la question. Je répondrai en même temps à certaines observations publiées dans les années 1873—74 par MM. De Tilly, de Bruxelles, et Ph. Gilbert, de Louvain.

I. Formule de Nicole.

On a l'identité

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+v_n} + \frac{b+v_n}{(a+v_n)(a-b)};$$

et remplaçant successivement v_n par $v_0, v_1, v_2, \ldots v_n$, multipliant respectivement par les quantités

$$1, \quad \frac{b+v_0}{a+v_0}, \quad \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)}, \quad \text{etc.}$$

et ajoutant les produits, on obtient, après des réductions faciles,

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+v_0} + \frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)} + \frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)} + \cdots$$
$$+ \frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)} + \frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)}.$$

C'est la formule donnée par Nicole dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour 1727, sauf une légère différence. J'ai montré en 1867 (Nouvelles Annales de Mathématiques), qu'on peut en tirer une règle de convergence des séries assez remarquable. En effet, si l'on désigne par R_n le dernier terme de cette formule, par w_n l'avant-dernier, qui fournira les autres en mettant pour n les nombres 0, 1, 2, ..., on pourra écrire

$$\frac{1}{a-b} = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots w_n + R_n,$$

et on aura

$$\frac{1}{R_n} = (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+v_1}\right) \cdot \left(1+\frac{a-b}{b+v_n}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{R_n} > (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}+\frac{a-b}{b+v_1}+\ldots+\frac{1}{b+v_n}\right)$$

en supposant positives toutes les quantités a, b, $a-b$, $v_0, v_1, \ldots v_n$. Donc si la série dont le terme général est $\frac{1}{b+v_n}$ sera divergente, $\frac{1}{R_n}$ pourra croître indéfiniment avec n, et R_n sera indéfiniment décroissant, en manière que la série $w_0+w_1+w_2+\ldots$ sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{a-b}$. Ainsi nous aurons deux séries, l'une divergente ayant pour terme général $v'_n = \frac{1}{b+v_n}$, l'autre convergente ayant pour terme général w_n, et le rapport de deux termes consécutifs dans ces séries sera

$$\frac{v'_{n+1}}{v'_n} = \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}}, \qquad \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}}.$$

Soit u_n le terme général d'une autre série à termes positifs: d'après un principe connu, elle sera divergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v'_{n+1}}{v'_n}, \text{ c'est-à-dire } \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}},$$

et convergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ c'est-à-dire } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}}.$$

cela pour n quelconque ou à partir d'une valeur donnée de n.

On voit qu'on peut d'une infinité de manières attribuer des valeurs convenables à v_n, a et b.

La formule de Nicole peut se réduire à la suivante

$$(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n) = 1+u_0+(1+u_0)u_1+(1+u_0)(1+u_1)u_2+\dots \\ +(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{n-1})u_n,$$

équation presque évidente due à Euler. Dans un article postérieur (rédigé en septembre 1868), j'ai fondé sur la même formule une théorie élémentaire des produits infinis. Voyez Nouvelles Annales de Mathématiques, 1869.

II. Formule de Lagrange et formule de Binet.

Faisons dans la formule de Nicole $a = x$, $b = -\alpha$; multiplions par $d\alpha$ et intégrons de $\alpha = 0$ à $\alpha = 1$. En posant

$$\alpha_i = \int_0^1 \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha)\dots(v_{i-1}-\alpha)}{1.2\dots i} d\alpha,$$

$$X_i = \frac{1.2\dots i}{(x+v_0)(x+v_1)\dots(x+v_i)},$$

et

$$X_0 = \frac{1}{x+v_0},$$

nous aurons

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = X_0+\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\dots \\ +\alpha_n X_n + \int_0^1 \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha)\dots(v_n-\alpha)\,d\alpha}{(x+v_0)(x+v_1)\dots(x+v_n)(x+\alpha)}.$$

développement de $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ avec un reste qu'on peut représenter

par $\int\limits_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x+\alpha}$. Pour juger de la convergence de ce développement, nous supposerons $x > 0$, v_0 nul ou positif, v_1, v_2, v_3, ... tous positifs et non inférieurs à l'unité, et nommerons ω la plus grande valeur numérique de $\frac{v_0-\alpha}{x+v_0}$ entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. On aura, en valeur numérique,

$$R_n < \omega \frac{v_1}{x+v_1} \frac{v_2}{x+v_2} \cdots \frac{v_n}{x+v_n},$$

ou

$$\frac{1}{R_n} > \frac{1}{\omega}\left(1+\frac{x}{v_1}\right)\left(1+\frac{x}{v_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{v_n}\right).$$

et par suite

$$\frac{1}{R_n} > \frac{1}{\omega}\left(1+\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}+\frac{x}{v_3}+\dots+\frac{x}{v_n}\right).$$

Donc, si la série $\frac{1}{v_1}$, $\frac{1}{v_2}$, $\frac{1}{v_3}$. ... est divergente, $\frac{1}{R_n}$ augmentera indéfiniment avec n, et R_n décroîtra indéfiniment en valeur numérique; donc l'intégrale

$$\int\limits_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x+\alpha},$$

qui a une valeur inférieure à $\frac{M}{x}$, si M est la valeur maximum de R_n, ira aussi indéfiniment décroissant. Ainsi la série indiquée sera convergente. Elle a été donnée par Lagrange, sans l'expression du reste, dans le cas particulier de $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, etc.

Soit maintenant la fonction

$$u = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x$$

sa différence pour $\Delta x = 1$ sera

$$\Delta u = \log x + (x+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1.$$

Mais pour $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ on a l'expression précédente, et comme

$$(x+\tfrac{1}{2})X_0 = 1 + \frac{\frac{1}{2}-v_0}{x+\cdot_0}, \qquad (x+\tfrac{1}{2})X_i = iX_{i-1} - (v_i - \tfrac{1}{2})X_i,$$

il s'ensuivra

$$\Delta u = \log x + \frac{\frac{1}{2}-v_0}{x+v_0} + \alpha_1 X_0 + \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \ldots + \beta_{n-2} X_{n-1}$$
$$- \alpha_n (v_n - \tfrac{1}{2}) X_n + (x+\tfrac{1}{2}) \int_0^1 R_n \frac{d\alpha}{x+\alpha},$$

où l'on a fait

$$\beta_0 = (\tfrac{1}{2} - v_1)\alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \beta_1 = (\tfrac{1}{2} - v_2)\alpha_2 + 3\alpha_3, \ \ldots$$

et en général

$$\beta_i = (\tfrac{1}{2} - v_{i+1})\alpha_{i+1} + (i+2)\alpha_{i+2}.$$

Or $\alpha_1 = v_0 - \frac{1}{2}$, et

$$\int_0^1 R_n \frac{x+\frac{1}{2}}{x+\alpha} d\alpha - \alpha_n (v_n - \tfrac{1}{2}) X_n = \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+\alpha} d\alpha;$$

on a en même temps

$$\beta_i = \int_0^1 \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha)\ldots(v_i-\alpha)(\frac{1}{2}-\alpha)}{1.2\ldots(i+1)} d\alpha.$$

Donc, avec ces conventions, il viendra

$$\Delta u = \log x + \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \ldots + \beta_{n-2} X_{n-1} + \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+\alpha} d\alpha,$$

et le développement qui est ici compris sera convergent puisque R_{n-1} devenant infiniment petit pour n infini, il en est de même de l'intégrale qui forme le terme complémentaire. On suppose toujours que la série $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_2}$, etc. soit divergente, et x positif.

Intégrons enfin par rapport à x et suivant les règles du calcul des différences les deux membres de cette équation sous la condition ci-dessus indiquée de $\Delta x = 1$: une intégrale particulière du premier membre sera u et ne pourra différer d'une intégrale particulière du second que d'une quantité constante ou périodique laquelle sera désignée par C. Ainsi, en représentant par le signe Σ des intégrales particulières, remettant la valeur de u, faisant $\Sigma X_i = Y_i$, et transposant, on aura

$$\Sigma \log x = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + C - \beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \ldots - \beta_{n-2} Y_{n-1}$$
$$- \Sigma \int_0^1 R_{n-1} \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+\alpha} d\ .$$

Dans le cas particulier de $v_i = i$, on peut prendre $Y_i = -X_{i-1}$, ce qui donne, en remplaçant n par $n+1$,

$$\Sigma\log x = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + C + \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_{n-1}X_{n-1} - \Sigma\int_0^1 R_n \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+\alpha}\,d\alpha.$$

Cette formule se trouve dans ma première Note de 1853 dont elle était l'objet principal, et ne suppose aucunement que x soit un nombre entier. Les arguments, par lesquels M. Ph. Gilbert, en novembre 1873, a voulu prouver le contraire, ne sont pas sérieux *). La quantité C permet de déterminer comme on voudra les intégrales **particulières** désignées par Σ: j'insiste sur cette qualification, car je ne comprends pas comment M. De Tilly a pu, dans son Rapport, affirmer que d'après mon explication les Σ **sont uniquement des intégrales générales** **).

Dans la formule de Binet on réduit $\Sigma\log x$ à $\log\Gamma x$, C à $\frac{1}{2}\log 2\pi$, et l'on prolonge indéfiniment et sans terme complémentaire la série

$$\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots,$$

que j'appellerai **série de Binet**.

III. Convergence de la série de Binet. Évanouissement pour x infini.

La question de la convergence ne pouvait pas produire la moindre difficulté. Binet s'en était occupé d'une manière très profonde et très détaillée, et avait indiqué des moyens simples et directs pour démontrer la convergence: moyens auxquels j'aurai pu renvoyer sans autres explications. Ayant trouvé une expression du reste de la série, je n'ai fait qu'invoquer en deux mots un principe énoncé par Euler et Lacroix, pour déduire de cette expression la convergence. J'ai donné une démonstration plus développée dans ma dernière Note: M. Hoppe l'a jugée trop ***) prolixe, mais celle qu'il propose me paraît beaucoup plus prolixe car elle emploie une formule du **Lehrbuch** dont la démonstration est aussi un peu longue. J'ai fait usage de considérations plus simples dans ma Note pag. 8—9, et j'ai obtenu, au fond, le même résultat que cherchait M. Hoppe, savoir une limite supérieure de $\sum_x^\infty R_{n+1}$ (suivant la notation que j'avais adoptée).

*) Voyez les **Bulletins** de l'Acad. roy. de Belgique pour 1853 et 1873.

) **Ibid. 1873.

***) Ce mot ne se trouve pas là; le vrai contenu de la remarque est omis ici: il s'y agit de ce que l'auteur ne fait nul usage de son expression du reste, qui en s'évanouissant montre la convergence de la série. (Réd.)

Je remarquerai encore que M. Hoppe semble avoir négligé *) dans la fonction à intégrer les variations de facteur $x+\alpha$ qui entre au dénominateur et qui devient $x+1+\alpha$, $x+2+\alpha$, etc.; et qu'en finissant il se borne à une affirmation qui pour moi n'est pas très claire, car il dit seulement, que la convergence de la série U_n (série de Binet) s'ensuit de là sans difficulté.

Quoi qu'il en soit, voici une démonstration très simple à laquelle se réduit la démonstration de Binet lorsqu'on la débarrasse de tout ce qui n'est pas nécessaire pour établir la convergence.

On a ici

$$\beta_i = -\int_0^1 \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(i-\alpha)}{1.2\dots(i+1)}\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)d\alpha$$

le produit $\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(i-\alpha)$ est inférieur à $1.2\dots i$, et la valeur numérique de $\frac{1}{2}-\alpha$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}$; donc celle de β_i sera inférieure à $\frac{1}{2(i+1)}$, et celle de $\beta_i X_i$ sera inférieure à $\frac{1}{2(i+1)}\,\frac{1.2\dots i}{x(x+1)\dots(x+i)}$, et par suite à $\frac{1}{2x}\,\frac{1.2\dots(i-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+i)}$.

Mais $\frac{1.2\dots(i-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+i)}$ est le terme général d'une série convergente à termes positifs dont la somme est $\frac{1}{x}$: on peut reconnaître cela par la formule de Nicole, puisque, en y faisant $a=x+1$, $b=1$, $v_i=i$, on trouve

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1.2}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\text{ etc.}$$

Donc la série ayant pour terme général $\beta_i X_i$ sera aussi convergente et aura une somme inférieure à $\frac{1}{2x^2}$

Il faudra partir du terme $\beta_1 X_1$ pour faire la comparaison: ajoutant le terme $\beta_0 X_0$ qui est égal à $\frac{1}{12x}$, on conclura que la série de Binet est convergente et a une somme inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{12x}+\frac{1}{2x^2}$

Cette limite est peu approchée, mais elle suffit pour montrer que la somme de la série de Binet doit s'évanouir si x devient infini.

---

*) Ces variations diminuent seulement la quantité qui doit s'évanouir. (Réd.)

Cette propriété est d'ailleurs évidente dès qu'on admet la convergence, tous les termes de la série s'annulent avec $\frac{1}{x}$: la définition de la convergence et celle de la somme d'une série doivent lever tous les doutes. Le reste de la série devra aussi s'annuler avec $\frac{1}{x}$.

Il est encore visible que ce reste sera une valeur particulière de l'intégrale aux différences $\Sigma\int_0^1 R_n \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x+\alpha}d\alpha$. En effet, comme je l'ai remarqué dans ma dernière Note, si une série de fonctions de x

$$u_0+u_1+u_2+\dots$$

est convergente, et a pour somme s, pour reste r_n après n termes, et si cela a lieu pour deux valeurs x et $x+\Delta x$, l'autre série

$$\Delta u_0+\Delta u_1+\Delta u_2+\dots$$

sera aussi convergente, aura pour somme Δs et pour reste Δr_n. Ayant fait $\Delta r_n = r'_n$, on aura $r_n = \Sigma r'_n$, et ainsi le reste r_n de la première série sera une intégrale particulière du reste r'_n de la dernière. Or, dans notre cas, le reste de la série des différences est bien $\int_0^1 R_n \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x+\alpha}d\alpha$: donc le reste de la série de Binet sera une intégrale particulière de cette fonction, celle qui s'annule avec $\frac{1}{x}$.

Ces propriétés sont une conséquence bien facile de la convergence qui avait été démontrée par Binet.

M. De Tilly a publié en 1873 une Note pour éclaircir les points que je viens d'indiquer, dans le cas particulier de x entier, et M. Ph. Gilbert assure que son travail a rendu un service réel aux géomètres. On voit que toutes les questions se réduisent à la démonstration de la convergence et que cette démonstration était donnée depuis longtemps.

M. Ph. Gilbert a voulu faire l'histoire des recherches sur la fonction $\log\Gamma(x)$. Il a nommé un grand nombre d'ouvrages et de Mémoires, mais sans les avoir lus. On peut en juger par le passage suivant (Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique, janvier 1873, pag. 9):

„Binet ne s'était pas arrêté à démontrer la convergence de cette „série (la série dont nous venons de parler), mais Cauchy, dans le „mémoire déjà cité, donna de cette formule de Binet une démonstra-

„tion rigoureuse, d'une beauté analytique exceptionnelle, et qui en-„traînait en même temps la convergence de la série."

Si M. Ph. Gilbert avait lu, je ne dis pas le Mémoire de Binet, mais au moins celui de Cauchy, il aurait su que cette démonstration rigoureuse, d'une beauté analytique exceptionnelle, était de Binet, car Cauchy le déclare lui-même très expressément. J'ai réfuté dans ma Note ces étranges assertions en citant des extraits des Mémoires de Binet et de Cauchy, et j'ai conclu en ces termes: „On voit donc que Binet, non-seulement n'a pas négligé la question „de convergence, mais l'a, au contraire, approfondie avec un grand „soin, et que, rélativement à la convergence, Cauchy n'a fait que „réproduire une des démonstrations de Binet."

J'ai cité dans la même Note une autre série de factorielles négatives étudiée longuement par Binet dans son grand Mémoire, qui néanmoins était restée inconnue au savant belge, tant inconnue, que l'ayant depuis retrouvée dans ses Recherches sur le développement de la fonction Γ (Bruxelles, 1873), il la crut nouvelle et lui appartenant et la déclare série analogue à celle de Binet et que l'on pourrait aussi obtenir par d'autres procédés (pag. 25). J'ai mentionné aussi une infinité de séries semblables à celle de Binet, que j'avais données en 1855. J'ai revendiqué à Binet un autre développement qu'on attribuait à Féaux et qu'on trouve dans les Comptes rendus de 1839. M. Ph. Gilbert pense rectifier sa première assertion en attribuant cette série à Cauchy (Recherches etc. pag. 14), mais le Mémoire de Cauchy est de 1843 (M. Gilbert se trompait en le faisant rémonter à 1841). J'ai rétabli en outre les droits d'Euler, de Plana, de M. Weierstrass, qui me paraissaient oubliés. En finissant, M. Gilbert annonçait cet important résultat: „que l'on peut obtenir l'expression du reste de „la série de Binet sous la forme d'une intégrale définie triple". J'ai répondu qu'en 1859 j'avais obtenu et publié l'expression de ce reste sous la forme d'une intégrale définie simple.

IV. Factorielle de Gauss. Détermination de la quantité C.

Je définis avec Gauss la fonction Γx comme la limite pour $k=\infty$ de la factorielle

$$\Gamma(x, k) = \frac{1.2.3\ldots k.k^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)},$$

qui donne

$$\Gamma(x+1, k) = \frac{k}{x+k} x\Gamma(x, k),$$

et à la limite

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma x,$$

d'où

$$\log\Gamma(x+1) - \log\Gamma x = \log x.$$

Ainsi $\log\Gamma x$ est une valeur particulière de l'intégrale aux différences $\Sigma\log x$, et en le substituant dans une formule précédente nous aurons

$$\log\Gamma x = C + (x - \tfrac{1}{2})\log x - x + \mu(x),$$

si $\mu(x)$ représente la somme de la série de Binet

$$\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \text{etc.}$$

qu'on a démontré être convergente. Prenant les différences des deux pour $\Delta x = 1$, on trouve

$$\mu(x) - \mu(x+1) = (x+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1;$$

et remplaçant successivement x par $x+1$, $x+2$, ... $x+k-1$, et ajoutant, on déduit

$$\mu(x) - \mu(x+k) = \sum_{m=0}^{m=k-1}\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - 1\right].$$

Or

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}\left[(x+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)\right] = (x+\tfrac{1}{2})\log\left[\frac{x+1}{x}\,\frac{x+2}{x+1}\cdots\frac{x+k}{x+k-1}\right]$$

$$= (x+\tfrac{1}{2})\log\left(\frac{x+k}{x}\right);$$

et en outre

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}\left[m\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)\right] = \log\left[\frac{x+2}{x+1}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^3\cdots\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right)^{k-1}\right]$$

$$= (k-1)\log(x+k) - \log[(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)].$$

Donc

$$\mu(x) - \mu(x+k) =$$
$$(x+k-\tfrac{1}{2})\log(x+k) - (x+\tfrac{1}{2})\log x - \log[(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)] - k.$$

D'un autre côté, l'expression de $\Gamma(x, k)$ donne

$$\log\Gamma(x,k) = \log(1.2.3\ldots k) + (x-1)\log k - \log[x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)].$$

Combinant ces deux équations et faisant pour abréger

$$\varphi(k) = \log(1.2.3\ldots k) - (k+\tfrac{1}{2})\log k + k,$$

on obtient

$$-\mu(x)+\mu(x+k)+\log\Gamma(x,k) = (x-\tfrac{1}{2})\log x - (x+k-\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right)+\varphi(k),$$

dans laquelle il faut prendre les limites pour $k = \infty$. Mais comme

$$(x+k-\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right) = (x-\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right)+x-\frac{x^2}{2k}+\frac{x^3}{3k^2}-\cdots,$$

k étant supposé $> x$, et par suite $(x+k-\frac{1}{2})\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$ se réduit à x lorsque k devient infini. D'ailleurs on sait que la somme $\mu(x)$ de la série de Binet s'évanouit pour x infini, en sorte que la limite de $\mu(x+k)$ sera nulle. On conclura

$$\log\Gamma x - \mu(x) = (x-\tfrac{1}{2})\log x + x + \lim\varphi(k),$$

ce qui revient à $C = \lim\varphi(k)$. Il résulte donc que la quantité C est indépendante de x comme $\varphi(k)$, et qu'ainsi C n'est pas une fonction périodique mais une simple constante.

Cette démonstration est extraite presque textuellement des Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique, fevrier 1854, pag. 85—88.

J'ai dit au même endroit que la valeur de C s'obtient aisément par la formule de Wallis. M. De Tilly affirme au contraire „qu'on „ne peut employer pour cela la formule de Wallis que dans le cas „particulier où x est entier". *) Mais cette formule donne

$$\frac{\pi}{2} = \lim\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k-2}{2k-3}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k-1}\right) \text{ pour } k=\infty,$$

ou

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim\left(\frac{2.4.5\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k-1)}\,\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \text{ pour } k=\infty;$$

et comme

$$2.4.6\ldots 2k = 2^k.1.2.3\ldots k,$$
$$1.2.3\ldots 2k = 1.3.5\ldots(2k-1).2.4.6\ldots 2k,$$

on peut écrire aussi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim\left[\frac{(2^k.1.2.3\ldots k)^2}{1.2.3\ldots 2k}\,\frac{1}{\sqrt{2k}}\right];$$

il s'ensuit que $\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}$ sera la limite de

$$2\log(1.2.3\ldots k) - \log(1.2.3\ldots 2k) + 2k\log 2 - \tfrac{1}{2}\log(2k) = K.$$

*) Bulletins etc. novembre 1873, pag. 460.

On trouve d'ailleurs

$$2\varphi(k)-\varphi(2k) = 2\log(1.2.3\ldots k)-\log(1.2.3\ldots 2k)-(2k+1)\log k + (2k+\tfrac{1}{2})\log(2k);$$

de là nous tirons

$$2\varphi(k)-\varphi(2k) = K+(2k+1)\log 2+2k\log 2 = K+\log 2,$$

et la limite de $2\varphi(k)-\varphi(2k)$ sera ainsi

$$\lim K+\log 2 = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}+\log 2 = \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Or $C=\lim\varphi(k)$, et de même $C=\lim\varphi(2k)$: donc la limite de $2\varphi(k)-\varphi(2k)$ est $2C-C=C$. On conclut la valeur cherchée $C=\frac{1}{2}\log 2\pi$, soit x entier ou non entier; ce qui complète la formule de Binet.

En faisant $k=\infty$ dans l'équation

$$\mu(x)-\mu(x+k) = \sum_{m=0}^{m=k-1}\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right]$$

on a la formule de Gudermann

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right],$$

qu'on peut, avec M. Ph. Gilbert, mettre sous la forme

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+m+\alpha}\,d\alpha,$$

puisque cette intégrale définie, rélative à α, a pour valeur

$$(x+m+\tfrac{1}{2})\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1.$$

V. Observation sur les valeurs infinies de la variable.

J'ai fait une observation fort simple dans ma dernière Note, qui ne m'a pas semblé manquer d'importance. M. Hoppe, l'ayant rapportée inexactement, l'a jugée inexacte.

L'étude de la série de Binet avait conduit à prendre pour x des valeurs infinies, et l'on avait trouvé que pour ces valeurs, quelle que fût leur forme, la somme de la série s'annulait. Plus généralement, j'avais considéré une série convergente $\varphi(x)+\varphi(x+1)+\varphi(x+2)+$

etc., et en supposant $\varphi(x) = 0$ pour toute valeur infinie de x, j'avait conclu que la somme de cette série serait une valeur particulière de l'intégrale $\Sigma\varphi(x)$, s'annulant pour $x = \infty$.

J'énonçais ensuite ce principe que je regardais comme presque évident. „Lorsqu'on a obtenu, en intégrant par Σ, une intégrale particulière $f(x)$, et qu'on détermine la quantité C de l'intégrale générale $f(x) + C$ en faisant $x = \infty$ et en supposant C constante; si l'on trouve pour C une quantité finie et déterminée, on pourra conclure qu'on n'aurait pas une autre valeur de C en la supposant variable (c'est-à-dire périodique)." La démonstration était très simple: en désignant par c une valeur finie quelconque de x, je remarquais que la quantité C étant périodique doit prendre pour $x = c+1$, $x = c+2$, $x = c+3$, ... la même valeur qu'elle prend pour $x = c$, qu' ainsi elle prendra cette valeur pour $x = c+m$, m étant un nombre entier aussi grand qu'on voudra, et par conséquent elle la prendra pour x infini. Il résultait de là, que dans ce cas l'arbitraire C se réduisait à une constante.

J'ajoutais cette explication: „On voit que la valeur infinie, pouvant revêtir une infinité de formes différentes $c+m$ où c peut varier d'une manière continue, joue le rôle d'une infinité de valeurs, même continues, et peut ainsi suffire pour déterminer la fonction périodique arbitraire."

Il est clair, que dans cette partie de ma Note j'ai toujours parlé de valeurs infinies d'une forme quelconque, et que si pour ces valeurs C prend une valeur unique, naturellement constante, je démontrais que C doit recevoir la même valeur pour les valeurs finies de x. M. Hoppe me fait dire que si C résulte constant pour certaines valeurs infinies de x, il doit être constant en général pour $x = \infty$. * (p. 384.)

Je finissais en disant: „Le principe je viens de démontrer sera utile en plusieurs cas, pour l'application du calcul des différences finies; il peut servir à confirmer la détermination de la constante dans la formule logarithmique de Binet; il explique le succès de la méthode suivie par M. Weierstrass dans la théorie des facultés analytiques et des factorielles, et peut fournir une base rigoureuse à la théorie des fonctions inexplicables d'Euler."

Ainsi pour démontrer que C est constant dans la formule

$$\log \Gamma x = C + (x - \tfrac{1}{2}) \log x - x + \mu(x),$$

il aurait suffi de prouver que la quantité

$$\log \Gamma x - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x$$



a pour $x=\infty$ une limite finie et déterminée. La démonstration, que j'ai donnée ci-dessus, et que j'ai extraite des **Bulletins** de 1854, est indépendante de ce principe.

J'indiquerai plutôt, comment le même principe sert à mettre hors de doute qu' une intégrale aux différences est parfaitement déterminée si elle est sujette à la condition de s'évanouir pour x infinie. Car, si une intégrale particulière $f(x) = \Sigma\varphi(x)$ s'évanouit pour $x=\infty$, une autre intégrale sera $f(x)+C$, avec C quantité constante ou périodique, et pour que cette intégrale s'évanouisse aussi lorsque $x=\infty$, il faudra que cette valeur donne $C=0$, et que par suite on ait toujours $C=0$.

Cette réflexion montre qu' il n'y avait aucune indétermination dans l'expression du reste de la série de Binet sous la forme d'une intégrale aux différences, puisque, les termes et la somme de la serie s'annulant pour $x=\infty$, le reste devait s'annuler pour la même valeur. Une telle prétendue indétermination a été le premier et principal reproche qu' on m'a fait, et on l'a relevée tantôt comme une erreur, tantôt comme une lacune.

VI. Généralisation dé la série de Binet.

En laissant aux quantités β_i, X_i, Y_i leur signification plus générale, on a la formule dont celle de Binet est un cas particulier

$$\Sigma\log x = (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + C - \beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \dots - \beta_{n-2} Y_{n-1} - \Sigma\int_0^1 R_{n-1}\frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x-\alpha}\,d\alpha.$$

Mais on a aussi

$$\log\Gamma x = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + \mu(x):$$

en posant donc $\Sigma\log x = \log\Gamma x$, $C=\frac{1}{2}\log 2\pi$, il viendra

$$\mu(x) = -\beta_0 Y_1 - \beta_1 Y_2 - \dots - \beta_{n-2} Y_{n-1} - \Sigma\int_0^1 R_{n-1}\frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x-\alpha}\,d\alpha,$$

qui donne une transformation de la série de Binet.

Prenant les différences et changeant n en $n+1$, on obtient

$$\mu(x)-\mu(x+1) = \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \dots + \beta_{n-1} X_n + \int_0^1 R_n\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x-\alpha}\,d\alpha.$$

Remplaçons x successivement par $x+1$, $x+2$, ... $x+m$, et ajoutons: le premier membre deviendra $\mu(x)-\mu(x+m+1)$, et se réduira à $\mu(x)$ si m est supposé infini, alors, en indiquant les sommes dans le second membre, on aura

$$\mu(x)=\beta_0\sum_x^\infty X_1+\beta_1\sum_x^\infty X_2+\dots+\beta_{n-1}\sum_x^\infty X_n+\sum_x^\infty\int_0^1 R_n\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x-\alpha}d\alpha.$$

Ici la notation $\sum_x^\infty\varphi(x)$ désigne la somme

$$\varphi(x)+\varphi(x+1)+\varphi(x+2)+\text{ etc.},$$

et il faut s'assurer que cette série sera convergente. Or cela est facile à démontrer pour les sommes $\sum_x^\infty X_i$, en supposant, comme ci-dessus, x positif, v_0 nul ou positif, v_1, v_2, v_3, ... tous positifs et non inférieurs à l'unité. En effet, X_i sera toujours positif, on aura

$$\sum_x^\infty X_i=X_i+\sum_{x+1}^\infty X_i$$

et $\sum_{x+1}^\infty X_i<\sum_1^\infty X_i$; de plus, X_1 étant $=\frac{1}{(x+v_0)(x+v_1)}$ sera $\overline{\leq}\frac{1}{x(x+1)}$, et comme on sait que $\sum_1^\infty\frac{1}{x(x+1)}=1$, il s'ensuivra que la série $\sum_1^\infty X_1$ est convergente; mais X_i ne peut surpasser $\frac{1.2\dots i}{(x+1)^{i-1}}X_i$: donc $\sum_1^\infty X_i$ ne pourra surpasser $\frac{1.2\dots i}{(x+1)^{i-1}}\sum_1^\infty X_i$ et formera aussi une série convergente. Les séries $\sum_x^\infty X_i$ seront donc également convergentes.

Quant au terme complémentaire $\sum_x^\infty\int R_n\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x+\alpha}d\alpha$, on a trouvé

$$\frac{1}{R_n}>\frac{1}{\omega}\left(1+\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}+\dots+\frac{x}{v_n}\right)$$

et l'on peut prendre $\omega=\frac{1}{x}$; d'où $\frac{1}{R_n}>x(1+s_n)$, $R_n<\frac{1}{x(1+xs_n)}$, en posant $s_n=\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\dots+\frac{1}{v_n}$. Nous partagerons l'intégrale en deux parties, l'une de $\alpha=0$ à $\alpha=\frac{1}{2}$, l'autre de $\alpha=\frac{1}{2}$ à $\alpha=1$: la valeur numérique du terme complémentaire sera moindre que la somme des valeurs numériques des deux parties, c'est-à-dire que

$$\sum_x^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} R_n \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+\alpha}d\alpha + \sum_x^{\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} R_n \frac{\alpha-\frac{1}{2}}{x+\alpha}dx.$$

Mais

$$\frac{1}{x+\alpha} < \frac{1}{x}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{2}-\alpha)d\alpha = \tfrac{1}{8}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\alpha-\tfrac{1}{2})d\alpha = \tfrac{1}{8}:$$

donc cette somme sera inférieure à

$$\tfrac{1}{8}\sum_x^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{2}} R_n\,d\alpha + \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{2}}^{1} R_n\,d\alpha\right) < \tfrac{1}{8}\sum_x^{\infty}\frac{1}{x^2(1+xs_n)}$$

inférieure aussi à

$$\tfrac{1}{8}\,\frac{1}{1+xs_n}\sum_x^{\infty}\frac{1}{x^2} < \tfrac{1}{8}\,\frac{1}{1+xs_n}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\pi^2}{6}\right),$$

puisque

$$\sum_x^{\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{x+1}^{\infty}\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2} + \sum_1^{\infty}\frac{1}{x^2}, \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On voit donc que si la série $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \ldots$ est divergente, comme s_n pourra dépasser toute limite, le terme complémentaire dont il s'agit ira en décroissant au delà de toute limite, et la série très-générale exprimant $\mu(x)$ sera convergente.

Cette série est d'une forme plus générale que toutes celles auxquelles est parvenu M. Ph. Gilbert dans le §. IV de son Mémoire (pag. 18—26). En faisant $v_0 = a$, $v_1 = a+1$, $v_2 = a+2$, etc., et remarquant que dans ce cas

$$\sum_x^{\infty} X_i = \frac{1.2.3\ldots(i-1)}{(a+x)(a+x+1)\ldots(a+x+i-1)} = X_{i-1},$$

on aura les séries semblables à celles de Binet que j'avais données en 1855 et 1859: les deux séries de Binet répondent aux valeurs $a = 0$ et $a = 1$.

On obtient les séries de M. Gilbert en prenant $v_0 = \beta$, $v_1 = \beta + p$, $v_2 = \beta + 2p$, ... et généralement $v_i = \beta + ip$, et supposant p un nombre entier et positif: alors les sommes $\sum_x^{\infty} X_i$ se réduisent à un nombre fini de termes, car on a

$$X_i = \frac{1}{p} \frac{1.2 \ldots (i-1)}{(x+\beta)(x+\beta+p)\ldots(x+\beta+\overline{i-1}p)} - \frac{1}{p} \frac{1.2 \ldots (i-1)}{(x+\beta+p)(x+\beta+2p)\ldots(x+\beta+ip)},$$

et les valeurs que prend le premier terme lorsqu'on remplace x par $x+p$, $x+p+1$, etc. sont détruites par celles du second; d'où il résulte

$$\sum_x^{\infty} X_i = \frac{1}{p} \sum_x^{x+p-1} X_{i-1}.$$

Mais ces séries dans les quelles chaque terme se compose par la somme de p termes et qui ne procèdent pas suivant des factorielles négatives ne paraissent pas devoir être regardées comme semblables à celles de Binet. M. Ph. Gilbert lui-même a qualifié analogue à la série de Binet celle de la formule (6), pag. 25. (la seconde série de Binet), mais non toutes les séries comprises dans sa formule (5).

J'ai adressé une réclamation de priorité à l'Academie royale de Belgique pour les séries semblables à celle de Binet données dans le §. IV du Mémoire de M. Gilbert, et cette réclamation fut insérée dans les Bulletins (mars 1874. pag. 351—352) sur le rapport de M. Ernest Quetelet. M. De Tilly, qui d'abord avait été nommé commissaire, demande d'être remplacé, parceque (je pense) je m'étais plaint qu'on me donnât pour juges mes adversaires (Voyez ib. p. 270); mais il fit néanmoins son rapport, en raison de la circonstance d'avoir été l'un des commissaires pour le Mémoire de M. Gilbert (Bulletins, juillet 1874. pag. 67—70). En ajoutant pour les séries du dit §. IV que je revendiquais le mot toutes et ne tenant pas compte de la qualification de semblables, il jugea que ma réclamation n'était fondée qu' en partie, et que la formule (5) déjà mentionnée devait lui échapper *).

Quoi qu' il en soit d'une question de mots, j'observe qu'on reconnait mes droits de priorité pour une généralisation plus ou moins importante de la série de Binet, et qu' ainsi M. De Tilly n'a pas mis entièrement à couvert sa responsabilité de commissaire pour le Memoire de M. Gilbert. Sa responsabilité dans cette qualité serait engagée au même titre pour n'avoir pas constaté que l'une des séries que M. Gilbert s'attribuait était de Binet lui-même, et que dans la démonstration de la formule de Gudermann et dans l'expression du reste de la série de Binet j'avais la priorité sur M. Gilbert, comme celui-ci l' a déclaré (Bulletins, novembre 1873. pag. 545).

---

*) M. De Tilly dit l'une au moins des séries, mais il n'y en a qu'une absolument.



La formule de Binet a été généralisée à un autre point de vue, dont M. De Tilly ne s'est pas occupé du tout, mais que j'ai rappelé dans ma dernière Note en citant la formule symbolique

$$\int u dx = \Sigma u + \tfrac{1}{2}u + \frac{1}{(1+\Delta)^n \log(1+\Delta)}\left[\frac{1}{\log(1+\Delta)} - \frac{1}{\Delta} - \tfrac{1}{2}\right] v_n,$$

dans laquelle u désigne une fonction de x, et v_n ce que devient $v = \frac{du}{dx}$ lorsqu'on change x en $x+n$. Dans le dévoloppement, les puissances de Δ représenteront des différences pour $\Delta x = 1$. On obtient la série de Binet et les séries semblables en prenant $u = \log x$. Je renvoie aux Annales de Tortolini, 1855, pag. 71—74.

Voici une autre généralisation. Dans la formule de Nicole, telle que nous l'avons donnée, faisons comme ci-dessus $a = x$, $b = -\alpha$, et puis multiplions les deux membres par $\varphi(\alpha)d\alpha$, et integrons entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, en désignant par $\varphi(\alpha)$ une fonction de la variablo α qui conserve entre ces limites une valeur finie et ne change de signe qu' un nombre fini de fois, et telle de plus que l'intégrale $\int_0^1 \varphi(\alpha)d\alpha$ se réduise à zéro. Si l'on fait

$$X_i = \frac{1.2\ldots i}{(x+v_0)(x+v_1)\ldots(x+v_i)},$$

$$\beta_i = \int_0^1 \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha)\ldots(v_i-\alpha)}{1.2\ldots(i+1)}\varphi(\alpha)d\alpha,$$

$$R_n = \frac{(v_0-\alpha)(v_1-\alpha)\ldots(v_n-\alpha)}{(x+v_0)(x+v_1)\ldots(x+v_n)},$$

on aura

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha} = \beta_0 X_1 + \beta_1 X_2 + \ldots + \beta_{n-1}X_n + \int R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}.$$

Qu' on remplace x successivement par $x+1$, $x+2$, $x+3$, etc. à l'infini, et qu' on ajoute tous les résultats: il viendra

$$\sum_x^\infty \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha} = \beta_0 \sum_x^\infty X_1 + \beta_1 \sum_x^\infty X_2 + \ldots + \beta_{n-1}\sum_x^\infty X_n + \sum_x^\infty \int_0^1 R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}.$$

Nous supposerons toujours que x soit positif, que v_0 soit nul ou positif, que tous les nombres v_1, v_2, v_3, ... soient positifs et non in-

férieurs à l'unité, et que la série $\frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \ldots$ soit divergente. Alors on prouvera comme nous l'avons expliqué, que toutes les sommes $\overset{\infty}{\Sigma} X_i$ ont des valeurs finies; et à l'égard du terme complémentaire $\int_0^1 R_n \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}$, on pourra décomposer l'intervalle $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ en plusieurs parties dans chacune desquelles la fonction $\varphi(\alpha)$ conserve le même signe, et en nommant M la plus grande valeur numérique que la fonction $\varphi(\alpha)$ puisse acquérir dans tout l'intervalle, on trouvera sans peine que la valeur numérique du terme complémentaire sera inférieure à

$$\frac{v_0 v_1 \ldots v_n}{(x+v_0)(x+v_1)\ldots(x+v_n)} \frac{M}{x}$$

et par conséquent sera infiniment petite pour n infini, M étant une valeur finie.

Ainsi la fonction $\overset{\infty}{\underset{x}{\Sigma}} \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{x+\alpha}$ sera exprimée par une série convergente, avec les coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$. Cette fonction devient la même $\mu(x)$ qui est représentée par la série de Binet, si l'on prend $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$.

En terminant ici ma polémique avec M. De Tilly, je dois rendre justice à la forme extrêmement courtoise de ses Notes et Rapports.

---

* (p. 378.) M. Genocchi m'accuse d'une substitution. Ma remarque se rapportait à ses mots (v. p. 378. l. 7.) „en faisant $x = \infty$". On peut faire $x = \infty$ en le faisant parcourir une série de valeurs. Donc le principe d'après l'énoncé ne suppose pas varier x continuement. Si M. Genocchi dit maintenant qu'il a toujours parlé de valeurs infinies d'une forme quelconque, cet usage ne peut pas être porté dans un principe général et indépendant. J'ai dit que, la critique ayant révoqué en doute la justesse de déduction, il y avait assez de raison d'aviser le lecteur. Hoppe.

XXVIII.

Ueber die Krümmungskreise der Parabel.

Neue Grundlage für die Theorie derselben und entsprechende Ausführungen.

Von

Herrn Prof. Dr. **Mack**

zu Ludwigsburg.

Wenn man den Winkel zwischen zwei Normalen einer Parabel mit demjenigen zwischen den Brennstrahlen der zugehörigen Peripheriepunkte vergleicht, so ergibt sich ein Lehrsatz, welcher — in seiner Einfachheit — schon an und für sich bemerkenswert erscheint. Derselbe macht es möglich, die Lage des Krümmungsmittelpunkts für jede Stelle der Curve auf eine viel leichtere Weise zu ermitteln, als bisher geschehen sein dürfte. Daran knüpft sich ganz von selbst eine völlig elementare Darlegung aller Hauptsätze über die Krümmungsverhältnisse der Parabel, zu welchen einige vielleicht neue und nicht unerhebliche Nebensätze (Vgl. namentlich § 4, III und § 5, I) hinzutreten. Man braucht hiebei nichts Weiteres vorauszusetzen als diejenigen allbekannten Theoreme, welche überall schon bei einem ersten Studium der Lehre von den Kegelschnitten sich darbieten. — Das hiemit Angedeutete soll hier des genaueren ausgeführt, und mögen entsprechende Bemerkungen für die übrigen Kegelschnitte hinzugefügt werden.

§ 1.

Entwicklung des Fundamentalsatzes über den Winkel zwischen zwei Normalen einer Parabel. (Fig. 1.).

Auf einer gegebenen Parabel mit Scheitel S und Brennpunkt F sei irgend ein von S verschiedener Peripheriepunkt P genommen. Die

zu P gehörige Tangente gibt mit der Axe den Durchschnitt T. Das Dreieck PFT hat bei P und T gleiche Winkel. — Heisst FU die über F hinausgehende Verlängerung von SF, so zeigt sich

1) $$\text{Wkl. } UFP = 2\, FTP$$

Wird ein zweiter Pheriepheriepunkt P_1 in Betracht gezogen, welcher mit P auf derselben Seite der Axe liegt, ist ferner T_1 der Durchschnitt der Axe mit der zu P_1 gehörigen Tangente, so hat man aus gleichen Gründen wie vorhin

2) $$\text{Wkl. } UFP_1 = 2\, FT_1P_1.$$

Setzt man ferner fest, dass P_1 weiter als P von F entfernt sei, wornach Wkl. $UFP > UFP_1$ ist, so erhält man durch Verbindung der Angaben 1) und 2)

3) $$\text{Wkl. } UFP - UFP_1 = 2(FTP - FT_1P_1).$$

Die hier links stehende Differenz ist dargestellt durch den hohlen Winkel P_1FP; was die rechts stehende betrifft, so erkennt man sie gleich dem spitzigen Winkel, welchen die zu P uud P_1 gehörigen Tangenten mit einander machen.

Hiernach ist vermöge der Gleichung 3) zunächst zu sagen: der spitzige Winkel zwischen den Tangenten der Punkte P, P_1 ist halb so gross als der hohle Winkel zwischen den Brennstrahlen FP, FP_1. Da aber dem spitzigen Winkel zwischen zwei Tangenten gewiss gleich ist der spitzige zwischen den zugehörigen Normalen, so sagen wir vielmehr:

Wenn zwei Peripheriepunkte einer Parabel auf einerlei Seite von ihrer Axe sich befinden: so ist der spitzige Winkel zwischen den zugehörigen Normalen halb so gross als der hohle Winkel zwischen den zugehörigen Brennstrahlen.

Der Satz ist auch dann festzuhalten (und dann besonders leicht zu beweisen), wenn der eine der genannten Punkte in die Axe selbst fällt (in die Lage des Scheitels kommt).

Anmerkung. Für den Fall, dass P, P_1 auf verschiedenen Seiten der Axe sind, ist ein dem obigen entsprechender Satz leicht zu finden. Auch könnte man immerhin beide Sätze unter einer gemeinschaftlichen Fassung vereinigen, die übrigens bei vollkommener Genauigkeit schwerfällig werden möchte. — Ueber den Winkel zwischen zwei Tangenten ist der entsprechende Satz zu finden in „Steiner, Theorie der Kegelschnitte", bearbeitet von Geiser, 2te Aufl., Seite 111.

§ 2.

Entwicklung des Hauptsatzes über den zu einer Stelle der Parabel gehörigen Krümmungskreis. Dazu genauere Bestimmungen. (Fig. 2.).

Während die Peripheriepunkte P, P_1 der Parabel auf Einer Seite von der Axe gedacht sind, sei mit N_1 der Durchschnitt ihrer Normalen bezeichnet; man hat also (nach § 1.)

$$\text{Wkl. } P_1FP = 2\,P_1N_1P,$$

wo wieder F den Brennpunkt bezeichnet. Nun werde an die P_1N_1, auf derjenigen Seite von ihr wo P sich befindet, die Gerade P_1Q so angelegt, dass sie — den Durchschnitt Q mit der PN_1 gebend — den

$$\text{Wkl. } QP_1N_1 = QN_1P_1$$

darbietet. Das hierdurch entstandene Dreieck P_1N_1Q hat dann

$$QN_1 = QP_1,$$

und sein Aussenwinkel PQP_1 ist doppelt so gross als der innere bei N_1, oder es ist

$$\text{Wkl. } PQP_1 = 2\,PN_1P_1.$$

Nach dem vorhin Bemerkten heisst dies aber auch:

$$\text{Wkl. } P_1QP = P_1FP;$$

es liegen also die vier Punkte P, P_1, Q, F auf Einem Punkte.

Denken wir jetzt auf der gegebenen Parabel zwar den Punkt in fester Lage, dagegen P_1 gegen P hin auf der Curve sich bewegend. Mit P bleibt fest der Punkt F und der jetzt auch einzuführende, auf die Normale von P fallende Krümmungsmittelpunkt N; dagegen bewegt sich auf der festen Geraden PN sowohl der Punkt N_1 als der Punkt Q, während übrigens immer

$$QP_1 = QN_1$$

bleibt. Wenn P_1 eben in die Lage P übergeht, so geht N_1 über in N, und Q geht über in den (festen) Halbirungspunkt M der (festen) Strecke PN. Da aber der vorhin gedachte Kreis PP_1QF offenbar mit übergeht in denjenigen festen Kreis, der durch den Brennpunkt F gehend, die Parabel (oder die Tangente PT derselben) in P berührt, so ist die von Q zuletzt zu erreichende Lage M auch zu bestimmen als Durchschnitt dieses festen Kreises mit der Normale des Punkts P. Wenn also N nicht zum voraus bekannt ist, so lässt sich M vor N finden als Durchschnitt eines bekannten Kreises (F, P, P)

mit einer bekannten Geraden (Normale von P); und dann ist N zu erhalten, indem die Strecke PM über M hinaus um das ihr gleiche Stück MN verlängert wird.

Die vorstehende Betrachtung gilt für jeden Peripheriepunkt der Parabel, auch für den Scheitel; es ist daher ganz allgemein der Satz auszusprechen:

I) Der Krümmungskreis zu einem Punkte P einer Parabel wird erhalten mittels eines Hilfskreises, der durch den Brennpunkt F der Curve so geführt wird, dass er die zu P gehörige Tangente derselben in P berührt. Wird der in die Normale von P fallende Durchmesser PM des Hilfskreises über M hinaus um das ihm selbst gleiche Stück verlängert, so hat man in dem Punkte N den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Parabel; und der zugehörige Krümmungshalbmesser (PM) zeigt sich sofort doppelt so gross als der Durchmesser des Hilfskreises.

Für den in obiger Betrachtung vorkommenden Punkt M ist es wesentlich, seine Lage auf der Normale des Punkts P ins Auge zu fassen — eben weil von ihr die Lage des N abhängt.

Heisst A der Durchschnitt jener Normale mit der Axe, so ist zunächst klar, dass gar wol M mit A zusammenfallen kann; es muss dies offenbar geschehen, wenn P auf der Curve so liegt, dass Winkel $PFS = 90^0$. Ist freilich $PFS > 90^0$, so muss M auf die über A hinaus gehende Verlängerung von PA fallen. Ist aber W. $PFS < 90^0$, so fällt M zwischen P und A. In den zwei ersteren Fällen ist es selbstverständlich, dass N auf die über A hinaus gehende Verlängerung der PA falle, weil immer

$$PN = 2PM.$$

Was aber den dritten Fall (Winkel $PFS < 90^0$) betrifft, so fällt nun zwar FM innerhalb des nun stumpfen Winkels PFA; weil jedoch immer Winkel $PFM = 90^0$, so hat man die entsprechende Lage von FM genauer zwischen FA und der Halbirungslinie des Winkels PFA. Hieraus ist leicht zu entnehmen, dass nun die Strecke PM zwar $< PA$ aber $> \frac{1}{2}PA$ ausfällt. Folglich ist auch dann

$$2PM > PA, \quad \text{d. h.} \quad PN > PA;$$

es fällt also unter allen Umständen der Punkt N auf die andere Seite von der Parabelaxe als auf welcher der zugehörige P sich befindet.

Wenn P vom Scheitel S mehr und mehr sich entfernt, so ist für das Dreieck PFM (rechtwinklig bei F) nicht blos das fortwährende Wachsen der Kathete FP zu bemerken, sondern auch das Wachsen des spitzigen Winkels bei P. Dieser Winkel erscheint nämlich unmittelbar als Complement des spitzigen Winkels, welchen der Brennstrahl FP mit der Tangente PT des Punkts P macht. Da aber der letztere Winkel bekanntlich ebenso gross ist als die Abweichung dieser Tangente von der Axe, und da diese Abweichung (zwischen 0 und 90^0 zu denken) immer kleiner wird, je mehr P vom Scheitel S sich entfernt; so ist allerdings das angedeutete Wachsen des Winkels FPM bestätigt.

Vermöge vorstehender Betrachtung hat man zu dem Hauptsatze I) folgende genauere Bestimmung:

II) Der Krümmungsmittelpunkt zur Stelle P einer Parabel fällt auf die Axe selbst dann und nur dann, wenn P im Scheitel S der Curve sich befindet, wobei der Krümmungshalbmesser gleich der doppelten Länge von FS, gleich dem halben Parameter sich zeigt. Zu jedem vom Scheitel verschiedenen Peripheriepunkt P findet sich der Krümmungsmittelpunkt N auf der andern Seite der Axe als auf welcher P selbst liegt, und der Krümmungshalbmesser PN wächst zugleich mit dem Brennstrahl FP. Dieses Wachsen geht von der dem halben Parameter gleichen Anfangsgrösse bis in's Unendliche.

Anmerkung. Der Satz I) gestattet ohne weiteres folgende Umformung:

Der zum Periepheriepunkt P einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt N liegt auf der Normale von P dermassen, dass die Punkte P und N, als einander zugeordnete, eine harmonische Gruppe bilden mit dem unendlich entfernten Punkt der Normale und mit demjenigen Punkte M, welcher sich ergibt, indem man aus dem Brennpunkte F die zum Brennstrahl FP senkrechte Gerade bis zum Durchschnitt (M) mit jener Normale zieht.

Diese Umformung kann zwar hier den Eindruck von etwas Gezwungenem machen; sie ist aber doch schon an dieser Stelle hervorzuheben, weil sie das bei der Parabel Vorkommende als besonderen Fall eines für alle Kegelschnitte giltigen Theorems erkennen lässt. — Dieses von Herrn Gugler längst durch Rechnung gefundene und mir gütigst mitgeteilte wird am Schlusse dieser Abhandlung besonders berücksichtigt werden. Einstweilen genüge es noch darauf hinzu-

weisen, dass der unendlich entfernte Punkt unserer Normale PN gewiss auch anzusehen ist als Durchschnitt dieser Geraden mit einer Linie, die auf Grund der Annahme eines zweiten — unendlich entfernten — Brennpunkts U der Parabel einzuführen ist; diese Linie nämlich in U senkrecht auf dem Brennstrahl UP.

§ 3.

Fünf weitere Regeln der Construction des Krümmungsmittelpunkts an den Hauptsatz I) des § 2. angeknüpft. (Fig. 3.).

Wenn wir das Ergebniss der bisherigen Betrachtung (und die bisherigen Bezeichnungen) festhalten, so ist sofort Folgendes zu bemerken.

Da der Krümmungshalbmesser PN das doppelte ist von der Hypotenuse PM des rechtwinkligen Dreiecks PFM, so gibt das von N auf die Kathetenlinie PF gefällte Lot NB seinen Fusspunkt B in solcher Lage, dass

$$PB = 2PF.$$

Hiernach ist N von dem einfach zu bestimmenden B aus zu gewinnen; es gilt der Satz:

I) Der Krümmungsmittelpunkt N zu Punkt P einer Parabel ist dadurch zu erhalten, dass der zugehörige Brennstrahl PF über F hinaus um das ihm gleiche Stück FB verlängert, dann aus B die zu PB senkrechte Gerade gezogen wird. Wo diese die Normale von P erreicht, ergibt sich der Punkt N.

Für den Axenschnitt A der Normale des Punkts P gilt bekanntlich die Angabe

$$FA = FP.$$

Da nun hier auch

$$FB = FP,$$

so ist das jetzt einzuführende Dreieck PAB rechtwinklig bei A. Hiernach ist weiter zu behaupten:

II) Der Krümmungsmittelpunkt N zum Punkt P einer Parabel ist dadurch zu erhalten, dass aus dem Axenschnitt A der zugehörigen Normale die zu ihr senkrechte Gerade bis zum Durchschnitte B mit der Linie des Brennstrahls FP gezogen, dann in B die zu FB

senkrechte Gerade errichtet wird. Wo diese die Normale von P erreicht, ist der Krümmungsmittelpunkt N.

Mit der Geraden PF (oder PB) gegen die Normale PA symmetrisch liegt die Linie PC, welche mit der Parabelaxe parallel ist. Hiernach wäre einfach zu sagen, dass die PC mit ihr angehörigen Punkten zu denselben Constructionen zu benutzen sei, wie sie in den obigen Sätzen I), II) dieses § gelehrt sind. Macht man aber die Länge PC selbst $= PB$, und zieht man noch die weitere CN, welche mit der Axe den Durchschnitt D gibt, so bietet sich zunächst die Congruenz der Dreiecke PBN, PCN dar, und es wird hieraus

$$\text{Wkl. } PCN = PBN = 90^0$$

erkannt. Hiernach ist schnell zu übersehen, dass man den Punkt N von jedem der Punkte C und D als einfach mittels einer zu der Parabelaxe senkrechten Geraden construiren könne, und es empfiehlt sich also, die Lage der Punkte C und D selbst auf passende Art zu charakterisiren. Dazu dient die Einführung der weiteren Linie PE, welche in E auf der Axe senkrecht steht.

Was nun den Punkt C betrifft, so liegt er auf dem aus P gehenden Durchmesser der Parabel; der Weg PC aber, ursprünglich $= PB = FP + FB$ genommen, ist eben hiermit auch $= FA + FT$ $= AE + EF =$ Summe aus Subnormale und Subtangente von $P =$ Summe des halben Parameters $+ 2SE =$ Summe des halben Parameters und des doppelten Abstandes des Punkts P von der Scheiteltangente.

Was den Punkt D anlangt, so liegt er auf der Axe der Parabel, und es lohnt sich, seine Abstände von den beiden Punkten S und A der Axe zu betrachten. Da ist für SD sofort zu sagen: $SD = SE + ED = SE + PC = SE + 2SE +$ Parameterhälfte $= 3SE +$ Parameterhälfte. Und für AD ist anzugeben:

$$AD = ED - EA = PC - EA = (2SE + EA) - EA = 2SE;$$

letzteres auch durch Einführung der Linie CA leicht zu beweisen, welche als Verlängerung der BA, somit als parallel mit PT erkannt wird und auf Erkenntniss der Congruenz der Dreiecke CDA, PET hinleitet.

Die eben ausgeführten Betrachtungen liefern die folgenden weiteren Sätze:

III) Der zu Punkt P einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunt N lässt sich construiren, indem man von P aus, innerhalb der Curve, auf dem zu P gehörigen

Durchmesser, ein Stück PC gleich der Summe aus dem halben Parameter und doppelten Abstand des Punkts P von der Scheiteltangente abträgt, dann durch C die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von P den Punkt N.

IV) Der zu Punkt P einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt N lässt sich construiren, indem man vom Scheitel S aus auf der Axe selbst, innerhalb der Curve, ein Stück SD gleich der Summe aus dem halben Parameter und dem dreifachen Abstand des Punkts P von der Scheiteltangente abträgt, dann durch D die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von P den Punkt N.

V) Der zu Punkt P einer Parabel gehörige Krümmungsmittelpunkt N lässt sich construiren, indem man, von dem Axenschnitt A der Normale des Punkts P ausgehend, auf der Axe selbst eine Strecke AD (gleichläufig mit SF) gleich dem doppelten Abstande des Punkts P von der Scheiteltangente abträgt, dann durch D die zu der Axe senkrechte Gerade zieht. Sie gibt auf der Normale von P den Punkt N.

Mit Ausnahme der V) lassen sich alle obigen Regeln auch dann festhalten, wenn der Punkt P in den Scheitel fällt. Für die III), V) kann gegenüber der I) und II) ihre Unabhängigkeit von vorangehender Zeichnung des Brennpunkts hervorgehoben werden.

Anmerkung 1. Der in Satz I) unsres § auftretende Punkt B kann (wegen $FP = FA = FB = FT$) auch dadurch erhalten werden, dass einesteils durch den Axenschnitt T der zu P gehörigen Tangente die Parallele zu seiner Normale PA gezogen wird, andernteils durch den Axenschnitt A dieser Normale die Parallele zu jener Tangente. Nun lässt sich der unendlich entfernte Punkt der Parabel als ihr Mittelpunkt ansehen, und die senkrecht zu der eigentlichen — ersten — Axe durch diesen Mittelpunkt gehende Gerade als zweite Axe. Ferner lässt sich dann sowohl für die Tangente als für die Normale von P sagen, dass der unendlich entfernte Punkt derselben eben ihr Durchschnitt mit der zweiten Axe sei. Dieses vorausgeschickt, kann man dem Satze I) unsres § die folgende Fassung geben, welche deswegen wichtig ist, weil sie (nach dem von Steiner für Ellipse und Hyperbel Gelehrten) wörtlich für alle Kegelschnitte gilt:

Um den Krümmungsmittelpunkt N zu dem Punkt P

einer Parabel zu finden, kann man die beiden Axenschnitte der Tangente von P und die beiden der Normale von P in der so zu beschreibenden Weise benutzen. Durch den Schnitt T der Tangente mit der ersten Axe zieht man die Gerade nach dem Schnitt der Normale mit der zweiten Axe; ebenso durch den Schnitt A der Normale mit der ersten Axe zieht man die Gerade nach dem Schnitt der Tangente mit der zweiten Axe. Der Schnittpunkt B der zwei so gewonnenen Geraden selbst wird mit dem Punkt P verbunden, durch B die zu der BP senkrechte bis zum Durchschnitt mit der Normale gezogen. Dieser letztere Durchschnitt ist der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt N.

Was unsern Satz II) betrifft, so hat er bereits die für alle Kegelschnitte giltige Fassung.

Der Satz IV) unsres § lässt zunächst sehen, dass der Punkt N um so mehr von der Scheiteltangente der Parabel sich entfernt, je mehr der zugehörige Punkt P dies tut; beide Punkte immer auf einerlei Seite von dieser Tangente liegend. Man kann aber leicht in aller Strenge auch davon sich überzeugen, dass N mit P zugleich von der Axe sich entfernt. Dazu dient uns die leicht sich darbietende Proportion

$$ND : PE = AD : AE,$$

welche vermöge des vor III) Bewiesenen übergeht in

$$ND : PE = 2SE : EA.$$

Ihre zwei mittleren Glieder wachsen beide zumal, wenn die Entfernung des Punkts P von der Axe wächst. Da nun das vierte Glied EA constant ist, so sieht man allerdings, dass auch ND (wie SD) zugleich mit PE und SE wachse.

In diesem Zusammenhange erscheint es am allerleichtesten, für den geometrischen Ort des Krümmungsmittelpunkts der Parabel oder für die Evolute derselben die Gleichung zu finden.

Es seien nämlich als Coordinatenaxen für eine gegebene Parabel wie auch für ihre Evolute genommen die Axe der Parabel und ihre Scheiteltangente, jene als Abscissenaxe, diese als Ordinatenaxe; der positive Zweig der Abscissenaxe habe vom Scheitel S die Richtung nach F. Ist nun der Parameter der Parabel $2p$, so ist

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

die Gleichung der Parabel. Sofern diese Relation besteht zwischen den Coordinatenwerten x, y eines beliebigen Punkts P dieser Curve, und sofern mit X, Y die Coordinatenwerte für den zu diesem P gehörigen Punkt N bezeichnet werden, so ist aus Satz IV) unsres § sofort zu entnehmen

$$X = 3x + p, \tag{2}$$

während die eben vorhin aufgestellte Proportion liefert

$$Y^2 : y^2 = (2x)^2 : p^2$$

oder

$$Y^2 = \frac{4x^2y^2}{p^2}. \tag{3}$$

Um jetzt x, y aus den Gleichungen 1), 2), 3) zu eleminiren, verbindet man zunächst die 1) mit 3), wodurch sich ergibt

$$Y^2 = \frac{8x^3}{p}. \tag{4}$$

In diese aus 2) den Wert $\frac{1}{3}(X-p)$ für x einführend, erhält man die gesuchte Evolutengleichung

$$Y^2 = \frac{8}{27}(X-p)^3.$$

§ 4.

Fünf Sätze zur Construction der Länge des Krümmungshalbmessers ohne vorangehende Construction des Krümmungsmittelpunkts. (Fig. 3.).

Schon im § 2. unsrer Darstellung zeigt sich, dass die Länge des zu Punkt P gehörigen Krümmungshalbmessers wesentlich abhänge von der Beschaffenheit des dort sich darbietenden rechtwinkligen Dreiecks PFM; jener Krümmungshalbmesser ist eben das Doppelte seiner Hypotenuse. Nun ist aber dieses Dreieck einfach dadurch bestimmt, dass es eine Kathete habe gleich dem Brennstrahl FP und dieser Kathete gegenüber einen Winkel gleich demjenigen PTE, um welchen die Tangente des Punkts P von der Axe abweicht. Sofort begreift man auch die Richtigkeit der Angabe:

I) **Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel ist zu construiren als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, als dessen eine Kathete zu nehmen ist die doppelte Länge des zu P gehörigen Brennstrahls, und welches dieser Kathete gegenüber einen**



Winkel hat gleich der Abweichung der zu P gehörigen Tangente von der Axe.

Zu dem eben erwähnten Dreieck PFM ergibt sich sofort ein ihm congruentes, wenn man sowohl die Normale PA als die mit der Axe parallel gezogene PC beide bis zur Directrix verlängert, welche sie beziehungsweise in Punkten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ treffen. Denn $P\mathfrak{F}$ (senkrecht zur Directrix) ist bekanntlich gleich der (zu FM senkrechten) PF; auch bilden die beiden Linien PF, $P\mathfrak{F}$ auf einerlei Seite von der Normale liegend, mit dieser gleiche Winkel. Hiernach ist

$$P\mathfrak{M} = PM,$$

also $2P\mathfrak{M} = 2PM =$ Krümmungshalbmesser zu P, und es ist zu sagen:

II) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel findet sich doppelt so gross als dasjenige Stück der zugehörigen Normale, welches zwischen P selbst und der Directrix begriffen ist.

Auch zu dem Dreieck PBN (des § 3.) erhalten wir ein ihm congruentes, wenn wir schon eingeführte Linien weiter benutzen. Da der Winkel FPN oder

$$FPA = FAP,$$

und da

$$TA = BP$$

ist, so genügt es, durch T noch die zur Axe senkrechte Gerade zu ziehen und bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{N}$ mit der Normale AP zu verfolgen, um sofort die Congruenz von Dreieck $AT\mathfrak{N}$ und BPN zu erkennen. Hiernach findet sich

$$A\mathfrak{N} = PN,$$

und es ist zu sagen:

III) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel findet sich gleich demjenigen Stück der zugehörigen Normale, welches begriffen ist zwischen der Axe und einer zu der Axe senkrechten Geraden, die man durch den Axenschnitt T der zu P gehörigen Tangente zu ziehen hat.

Will man zu dem Dreieck PTM ein ihm ähnliches beiziehen, so bietet sich zu allernächst dar das Dreieck PET. Die Vergleichung beider gibt sofort

$$PE : PT = PF : PM = 2PT : 2PM,$$

also (wegen $2PF = TA$) auch

$$PE : PT = TA : 2PM.$$

Hiernach ist zu behaupten:

IV) Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel ist vierte Proportionale zu dem Abstande dieses Punkts von der Axe, zu seiner Entfernung von dem Axenschnitte der ihm zugehörigen Tangente, und zu demjenigen Axenstücke, welches zwischen Tangente und Normale von P begriffen ist.

Das vorhin benutzte, dem Dreieck PBN congruente Dreieck $AT\mathfrak{N}$, dessen Hypotenuse $A\mathfrak{N}$ gleich dem Krümmungshalbmesser zu P gefunden worden ist, gewährt den Vorteil zwei ihm ähnliche Teildreiecke APT und AEP darzubieten, welche auch besonders günstig liegen. Ihre Betrachtung gibt sofort

$$\overline{A\mathfrak{N}}^2 : \overline{AT}^2 = A\mathfrak{N} : AP,$$
$$= AT : AE.$$

Hiernach ist zu sagen:

V) Das Quadrat des zu Punkt P einer Parabel gehörigen Krümmungshalbmessers verhält sich zu dem Quadrat des zwischen Tangente und Normale begriffenen Axenstückes wie dieses Axenstück selbst sich verhält zu dem halben Parameter.

Die vorstehenden Sätze sind alle auch für den Grenzfall festzuhalten, wo P in den Scheitel S zu liegen kommt. Doch sind in diesem Fall alle ausser II) nicht zur Ausführung einer Construction zu verwenden, deren Bedürfniss übrigens (nach § 2., II) auch selbstverständlich wegfällt, wenn man den Parameter der Parabel kennt.

Anmerkung 1. Zu dem Satze I) unsres § kann man hervorheben, dass das Doppelte des Brennstrahls FP genau halb so gross ist als diejenige durch F zu ziehende Parabelsehne, welche mit der Tangente von P parallel ist, d. h. jenes Doppelte ist gleich der Hälfte desjenigen Nebenparameters, welcher dem durch P gehenden Durchmesser conjugirt ist.

Diese Bemerkung genügt, um den betreffenden Satz als Analogon desjenigen für Ellipse und Hyperbel giltigen Satzes zu erkennen, den ich nur andeuten will durch die Formel

$$\varrho = \frac{b^2}{a} : \sin\alpha;$$

hierbei ϱ der Krümmungshalbmesser zu Punkt P, a der nach P zu ziehende Halbmesser, b der ihm conjugirte, α der Winkel zwischen beiden, während $\frac{b^2}{a}$ die Rolle eines gewissen Nebenparameters spielt.

Was den Satz II) betrifft, so ist er sofort auch auf die Form zu bringen:

Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel ist gleich dem Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in P berührt und seinen Mittelpunkt auf der Directrix hat.

Nun ist aber bekanntlich die Directrix auch zu bezeichnen als der geometrische Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel die Parabel berühren; und ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat, schneidet diese rechtwinklig. Hiernach ist die vorige Fassung zu ersetzen durch die so lautende:

Der Krümmungshalbmesser zu Punkt P einer Parabel ist gleich dem Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in P berührt, und der rechtwinklig schneidet die Ortslinie des Scheitels eines rechten Winkels, dessen beide Schenkel die Parabel berühren.

Diese Fassung ist es, welche nach Steiner für alle Kegelschnitte zutrifft.

Anmerkung 2. Der Satz V) unsres § macht es möglich, sofort den zu Punkt P der Parabel gehörigen Krümmungshalbmesser ϱ auszudrücken in dem Parameter $2p$ der Curve und in dem Abstand x des Punkts P von der Scheiteltangente. Die Proportion

$$\overline{A\mathfrak{N}}^2 : \overline{AT}^2 = AT : AE$$

geht vermöge der angegebenen Bezeichnungen über in

$$\varrho^2 : (2x+p)^2 = (2x+p) : p,$$

was aus

$$AT = 2FP = 2\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

zu verstehen ist. Man findet also

$$\varrho^2 = (2x+p)^3 : p.$$

§ 5.

Genauere Betrachtung des Hilfskreises, an welchen die Auffindung des Krümmungskreises sich geknüpft hat. (Fig. 3.)

Wenn wir für einen beliebigen Punkt P der Parabel die Lage des zugehörigen Krümmnngskreises gegen die Curve selbst in jeder Beziehung genau untersuchen wollen, so werden wir beachten müssen, dass dieser Krümmungskreis mit dem zu seiner Auffindung benutzten Hilfskreise PFM ähnlich liegt, so zwar dass der Punkt P selbst für beide Kreise, welche die Parabel an dieser Stelle berühren, der äussere Aehnlichkeitspunkt ist. Hierdurch findet sich angezeigt, dass wir zunächst für den Hilfskreis alle diejenigen weiteren Bestimmungen aufsuchen, welche die bisherigen Betrachtungen und Constructionen uns darbieten können.

Da das bei F rechtwinklige Dreieck PFM bei M denselben Winkel hat, welcher in dem schiefwinkligen PFT bei T sich findet, so ist leicht die Angabe zu begründen, dass der Kreis PFM gleich ist dem Kreise PFT. Man kann daher auch (mit Beiziehung von § 2, I) den Satz aussprechen:

I) Der zum Peripheriepunkt P einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der durch den Punkt P selbst, durch den Axenschnitt T der zu P gehörigen Tangente und durch den Brennpunkt F geht.

Unser Hilfskreis hat ferner mit dem aus P gehenden Parabeldurchmesser PC (§ 3.) ausser dem Punkte P noch einen zweiten G gemein. Da nun

$$\text{Winkel } GPA = \text{Winkel } FPA,$$

während PA den Mittelpunkt des Hilfskreises enthält, so ist sofort zu ersehen

$$PG = PF.$$

Daran knüpft sich die weitere Angabe, dass FG parallel sei mit der zu P gehörigen Tangente. Hiernach kann unter anderem gesagt werden:

II) Der zu Punkt P einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in P berührt und durch denjenigen Punkt G des zu P gehörigen Parabeldurchmessers geht, in welchem dieser geschnitten

wird von der ihm conjugirten, durch den Brennpunkt gehenden Sehne.

Unser Hilfskreis hat endlich mit der Axe der Parabel ausser dem Punkte F einen zweiten Punkt H gemein. Da nun nach Einführung der Sehne PH sofort

$$\text{Winkel } PHF = PMF = PTF$$

sich zeigt, so ist für das Dreieck PTH mit seiner Höhenlinie PE zu bemerken:

$$\text{Winkel } HPE = TPE, \quad PH = PT, \quad EH = ET.$$

Da zugleich

$$ET = 2SE,$$

so ist auch

$$EH = 2SE,$$

und

$$SH \text{ ist } = 3SE,$$

gleich dem dreifachen Abstand des Punkts P von der Scheiteltangente. Hiernach ist zu sagen:

III) **Der zu Punkt P einer Parabel gehörige Krümmungshalbmesser ist doppelt so gross als der Durchmesser desjenigen Kreises, der die Parabel in P berührt und durch einen Punkt H ihrer Axe geht, dessen Lage durch jede der folgenden Angaben bestimmt wird. Die Gerade PH liegt mit der zu P gehörigen Tangente PT symmetrisch gegen das von P auf die Axe fallende Lot PE. Der Abstand des Punkts H vom Punkte E ist doppelt so gross als der Abstand des Punkts P von der Scheiteltangente. Der Abstand des Punkts H vom Scheitel S ist dreimal so gross als der Abstand des Punkts P von der Scheiteltangente.**

Gerade die zwei letzteren Bestimmungen sind es, welche für die weitere Untersuchung von grösster Bedeutung werden.

§ 6.

Das Verhalten eines Krümmungskreises der Parabel gegen die Curve selbst genauer bestimmt. (Fig. 3.).

Ist P irgend ein vom Scheitel S verschiedener Punkt der Parabel, und sind P_1, P_{11} dicht bei P befindliche Punkte der Curve zu verschiedenen Seiten von P, ist namentlich P_{11} näher am Scheitel als P selbst, so ist (§ 2., II) der zu P gehörige Krümmungshalbmesser

kleiner als der zu P_1 gehörige, grösser als der zu P_{11} gehörige. Hiernach ist die Krümmung der Curve bei P stärker als bei P_1, schwächer als bei P_{11}; der von P ausgehende Parabelzweig PP_1 muss also bei P mehr an die zugehörige Tangente sich anschmiegen als der dortige Krümmungskreis dies tut, bei P_{11} weniger. Hieraus ist klar, dass das Parabelstückchen PP_1 zwischen jene Tangente und den Krümmungskreis fällt, das Stückchen PP_{11} aber innerhalb des letzteren, es ist also klar, dass die Parabel von ihrem zu P gehörigen Krümmungskreis an dieser Stelle sowohl geschnitten als berührt wird. Da es indess zwei nächst aufeinanderfolgende Elemente sind, welche die beiden Linien gemein haben, da also drei Punkte, als ihnen beiden gemeinschaftliche, daselbst sich zusammendrängen: so ist zu erwarten, dass ausser dem Durchschnitt bei P noch ein weiterer von ihm völlig getrennter, gemeinschaftlicher Punkt sich ergebe. Solcher wird in der Tat gefunden mittels folgender, wesentlich an § 5., III) sich anknüpfenden Betrachtung.

Der zu P gehörige Krümmungskreis hat (§ 2., I) einen viermal so grossen Durchmesser als der Hilfskreis FPM. Da nun P äusserer Aehnlichkeitspunkt für beide Kreise ist, so muss jede aus P gezogene Sehne des Krümmungskreises viermal so lang sein als die in dieselbe Gerade fallende Sehne des Hilfskreises. Wenden wir dies an auf die in § 5. hervorgetretene Sehne PH des letzteren, deren Endpunkt H auf der Parabelaxe liegt. Sie gibt, über H hinaus verlängert, für den Krümmungskreis die Sehne PJ, deren Länge also $= 4PH$, und deren Endpunkt J auf der andern Seite der Parabelaxe ist als auf welcher P liegt. Für den Punkt J des Krümmungskreises ist hiernach sofort klar: das von J auf die Parabelaxe fallende Lot JK ist dreimal so gross als das von P auf dieselbe fallende PE, und desgleichen findet sich

$$HK = 3HE.$$

Da aber HE selbst (nach § 5.) $= 2SE$, so ist

$$HK = 6SE,$$

somit

$$SK = 9SE.$$

So gut nun für den Parabelpunkt P die Angabe besteht

$$\overline{PE}^2 = \text{Parameter mal } SE,$$

so gut besteht auch die Angabe

$$\overline{3PE}^2 = \text{Parameter mal } (9SE),$$

d. h.

$$\overline{JK}^2 = \text{Parameter mal } SK.$$

Der auf dem Krümmungskreis befindliche Punkt J genügt hiermit derjenigen Forderung, welche allein zu erfüllen ist, damit er auch auf der Parabel sich befinde; es ist also J ein durch messbare Entfernung von P getrennter Punkt, welchen beide Linien gemein haben. Ausser ihm und den drei bei P selbst vereinigt zu denkenden Punkten haben sie aber gewiss keinen fünften gemein, und auch der Punkt J selbst kann nicht ein Berührungspunkt, sondern nur ein einfacher Durchschnittspunkt sein; beides deshalb, weil zwei mit fünf gemeinschaftlichen Punkten behaftete Linien zweiter Ordnung gar nicht von einander verschieden sein könnten. Sonach ergibt sich auch die bestimmtere Anschauung, dass der Parabelbogen $PP_{11}J$ (von P über den Scheitel S nach J laufend) ganz innerhalb des Krümmungskreises sich befinde, während seine über P und J hinausgehenden Verlängerungen ganz ausserhalb desselben verlaufen.

Vorstehende Betrachtungen (verbunden mit dem in § 5. über die Lage des Punkts H Gesagten) begründen vollständig den so lautenden Hauptsatz:

I) Ist P ein vom Scheitel S verschiedener Punkt einer Parabel, so hat der zu P gehörige Krümmungskreis die Eigentümlichkeit, sowohl an der Stelle P, wo er drei Punkte mit der Parabel gemein hat, diese zu schneiden, als auch einen von P getrennten (einfachen) Durchschnitt J mit ihr zu geben. Dieser Punkt J liegt auf der andern Seite der Axe als P; er findet sich auf derjenigen Secante PH, welche aus P gegen die Parabelaxe hin unter demselben Winkel wie die Tangente jenes Punkts zu ziehen ist. Von den zwei durch Sehne PJ getrennten Bogenstücken des Krümmungskreises muss das eine den Parabelbogen PSJ umschliessen, das andere völlig innerhalb der Parabel sich befinden.

Lässt man den Punkt P der obigen Darstellung mehr und mehr gegen S hinrücken, so muss auch der zugehörige J dies tun; es ergibt sich solches aus dem Umstande, dass (bei der gemachten Annahme) die zu P gehörige Tangente ihre Abweichung von dem auf die Axe fallenden Lote PE stetig verkleinert bis zu der Grenze Null, und dass der dem Winkel TPE gleiche JPE das entsprechende Schicksal hat. Wenn P in S eintrifft, so ergibt sich dasselbe für J, welcher Punkt von anderer Seite her als P der Vereinigung mit S zustrebt. Hiernach gewinnt man von dem am Scheitel S befindlichen Krümmungskreis der Parabel die Anschauung, dass er an dieser Stelle vier Punkte mit der Parabel gemein habe und nirgends einen durch

messbare Entfernung von S getrennten. Dasselbe zeigt sich, wenn man erwägt, dass nach § 2. II) der zum Scheitel S gehörige Krümmungshalbmesser ein Minimum ist; ganz besonders deutlich aber wird es durch Betrachtung eines Kreises, welcher die Parabel in zwei solchen Punkten P, O berührt, welche zur Axe symmetrisch liegen. Solcher Kreis ist anzusehen als einer, der an jeder der Stellen P und O zwei Punkte mit der Parabel gemein habe; und wenn solche Punkte bis zur Vereinigung mit S geführt werden, so geht der gedachte Kreis in den Krümmungskreis der Stelle S über. Hiernach kann man zu I) den Satz fügen:

II) Der zum Scheitel einer Parabel gehörige Krümmungskreis ist so anzusehen, dass vier den beiden Curven gemeinschaftliche Punkte an jener Stelle vereinigt seien, und liegt solcher Kreis — abgesehen von der am Scheitel statthabenden Berührung — ganz frei innerhalb der Parabel.

Aus dem Satze I) ergibt sich endlich leicht die einer Umkehrung desselben entsprechende Angabe:

III) Um den Krümmungskreis zu einer vom Scheitel abliegenden Stelle P einer Parabel zu zeichnen, kann man zu der Tangente PT des Punkts T diejenige aus P zu ziehende Secante nehmen, welche unter demselben Winkel wie jene Tangente gegen die Axe geneigt ist. Ist J als zweiter Durchschnitt dieser Secante mit der Parabel gewonnen, so kommt die Construction darauf hinaus, denjenigen Kreis zu beschreiben, welcher durch J geht und die Gerade PT in P berührt.

Obige Sätze I) bis III) sind wörtlich ebenso für die anderen Kegelschnitte giltig.

§ 7.

Merkwürdige Umgestaltung der Lehren des vorangehenden §; Herleitung einer weiteren Construction. (Fig. 3.)

Wird die in III) des vorigen § angedeutete Construction wirklich ausgeführt, so ist der Halbirungspunkt $\mathfrak{B}$ der Parabelsehne PJ zu benutzen; es ist durch ihn die zu PJ senkrechte Gerade zu ziehen, welche dann auf der Normale von P den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt N liefert. Da nun

$$PJ = 4PH,$$

so ist

$$PL = 2PH;$$

es ist hiernach von PH aus gerade so zu construiren, wie es nach § 3. II) von PF aus geschieht, wo man zu PF die Verdoppelung PB genommen hat wie hier zu PH die Verdoppelung PL. — Fasst man, wie jetzt nahe gelegt ist, die Gerade BL ins Auge, so zeigt sie sich mit der FH d. h. mit der Parabelaxe parallel; das von P auf die BL fallende Lot PO fällt in die Richtung PE, PO ist in E halbirt, und O selbst ist derjenige Parabelpunkt, welcher mit P symmetrisch gegen die Axe liegt. Auch mit der Normale PA gibt der nun eingeführte Durchmesser OL einen bemerkenswerten Durchschnitt R, wobei

$$PR = 2PA, \quad OR = 2EA,$$

d. h. OR gleich dem Parameter der Parabel sich zeigt. — Wird nun zu OR die ihr gleiche Rückverlängerung OV genommen, und wird PV gezogen, so bieten sich die zwei gleichschenkligen Dreiecke PTH, PVR in so übersichtlicher Lage dar, dass man sofort

$$\text{Winkel } TPV = RPL,$$

also auch

$$\text{Winkel } VPL = TPR = 90^0,$$

also VP als parallel mit NL, also Dreieck RPV als ähnlich mit RNL erkennt. — Wird vollends durch V die mit PL (PH) parallele Gerade VW gezogen, so ergibt sich folgende Betrachtung. Eine um den festen Punkt R sich drehende Gerade gibt in jeder ihrer Lagen mit PL und VW zwei zusammengehörige Durchschnitte L_1 und V_1, wie von Anfang an L und V als solche erscheinen; auch sind dann immer die zwei Dreiecke RPV_1 und RNL_1 einander ähnlich, wie die vorhin bemerkten RPV und RNL es sind. Daraus folgt, dass immer PV_1, NL_1 parallel sind. Statt also den Punkt N von L aus zu construiren mittels der durch L senkrecht zu PL zu ziehenden Geraden, so kann man jenen auch erhalten, indem man auf der VW einen Punkt V_1 beliebig nimmt, von diesem aus sowohl V_1P als V_1R zieht, den Durchschnitt L_1 der letzteren mit PH bestimmt, endlich durch L_1 die Parallele zu V_1P zieht. Diese zuletzt gezogene giebt mit der Normale von P den gesuchten Punkt N.

Die hier eingeführte Gerade VW ist nichts anderes als die Polare des Punkts R mit Bezug auf die Parabel: denn die Punkte V, O, R und der unendlich entfernte Punkt dieser Curve bilden auf dem Durchmesser OR eine harmonische Gruppe, wobei V und R einander zugeordnet sind; und die durch R nach dem unendlich entfernten Punkt der Geraden VW gehende Secante der Curve bietet eben so als eine harmonische Gruppe dar diesen unendlich entfernten Punkt,

den ihm zugeordneten R und die Endpunkte der zugehörigen (in R selbst halbirten) Sehne. — Wird nun diese Auffassung der VW verbunden mit der obigen, so einfachen Bestimmung des Punkts R, so ergibt sich — in gleichem Range mit Satz III) des vorigen § — der so lautende:

Um den Krümmungsmittelpunkt N zum Peripheriepunkt P einer Parabel zu finden, ist auf folgende Art zu verfahren. Man nimmt auf der Normale von P denjenigen Punkt R, welcher von ihrem Axenschnitte ebenso weit entfernt ist als P selbst; zu R als Pol die zugehörige Polare VW, zu dieser die durch P parallel mit ihr zu ziehende Gerade PL. Diese zwei letzteren Geraden schneidet man mittels einer durch R beliebig zu führenden, welche somit auf der VW einen Punkt V_1, auf der PL einen Punkt L_1 gibt. Endlich noch die V_1P einführend zieht man durch L_1 die mit ihr parallele Gerade, welche dann auf der Normale von P den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt N liefert.

Anmerkung. So vorgetragen, wie es eben geschehen ist, versagt die Constructionsregel unseres § (ebenso wie die III) des § 6.) in dem besonderen Falle, wo P in den Scheitel der Parabel zu liegen kommt; denn dann ist der Axenschnitt der Normale von P nicht zur Verfügung, um von ihm aus den Punkt R und dann den Punkt N zu construiren, welcher letztere ja selbst als solcher Axenschnitt aufzufassen wäre. Allein die der Aufstellung unserer Regel vorangehende Betrachtung gestattet uns den Punkt R darnach zu definiren, dass er zu dem Parabelpunkt P erhalten wird, indem man zu P den mit ihm gegen die Axe symmetrisch liegenden O nimmt, dann von O aus innerhalb der Curve, auf dem zugehörigen Durchmesser das Stück OR gleich dem Parameter abträgt. Solches kann auch dann geschehen, wenn O und P im Scheitel S sich vereinigen; somit lässt sich auch auch dann R vor N construiren, und man kommt, im Uebrigen nach dem Wortlaute der Regel verfahrend, zu einem Resultat, welches mit dem schon in § 2. Gelehrten übereinstimmt.

Der nach Obigem für alle Fälle der Lage des Parabelpunkts P zu erhaltende, ihm zugehörige Punkt R zeigt sich nun aber auch identisch mit demjenigen Punkte, durch welchen die Hypotenuse jedes rechtwinkligen Dreiecks geht, welches, der Parabel eingezeichnet, den Scheitel seines rechten Winkels in P hat. Die Erkenntniss dieser Identität ergibt sich wol am schnellsten, wenn man für gedachtes Dreieck die zwei Grenzgestalten ins Auge fasst: die eine, welche sich ergibt, sofern von den Kathetenlinien die erste mit der Axe parallel

genommen wird, wobei die zweite durch den mit P symmetrisch liegenden Curvenpunkt O geht, also die Hypotenusenlinie als der durch O gehende Durchmesser sich darbietet; die andere Grenzgestalt, welche sich ergibt, sofern die erste Kathete in die Normale von P einrückt, die zweite Null wird, die Hypotenuse also mit der Normale sich vereinigt.

Ferner ist für jeden Kegelschnitt und für jeden ihm angehörigen Punkt P zu behaupten, dass alle dem Kegelschnitt eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke, welche den festen Scheitel P für ihre rechten Winkel gemein haben, ihre Hypotenusen durch Einen Punkt R gehen lassen. — Diesen allgemeinen Satz hat Staudt in der „Geometrie der Lage“ nach seiner eigentümlichen Methode bewiesen und daraus eine Regel für die Construction des Krümmungsmittelpunkts zu jeder Stelle eines jeden Kegelschnitts hergeleitet (S. 207). Diese Regel ist aber wörtlich übereinstimmend mit der in unserem § gegebenen, wenn nur in der letzteren statt Parabel gesagt wird Kegelschnitt, und wenn die Lage des Punkts R in dem Staudt'schen Sinne, mit Bezugnahme auf die eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke, definirt wird.

Somit ist der Lehrsatz unseres § als besonderer Fall eines für alle Kegelschnitte giltigen zu erkennen.

§ 8.

Rückblick auf die Parabel und Ausblick auf Ellipse und Hyperbel.

In den vorstehenden §§ wird man wol alle Hauptsätze finden, welche für die Krümmungskreise der Parabel bekannt sind; und zwar haben sie alle in Einem Zusammenhange sich ergeben, welcher von dem in § 2. gewonnenen Standpunkte aus vollkommen beherrscht wird. — Es liegt nahe, mit Bezug auf Ellipse und Hyperbel für die ähnliche Untersuchung die ähnliche Grundlage und die ähnliche Entwicklung zu suchen. Diese Arbeit hat bereits Herr Professor C. W. Baur zu Stuttgart (am K. Polytechnikum) mit schönstem Erfolge in Angriff genommen. Nachdem ich das Wesentliche der hier dargelegten Ergebnisse und Methode ihm mitgeteilt hatte, gelang es ihm — was ich freudig anerkenne — sofort für die Ellipse den mir noch nicht bekannt gewesenen Satz zu finden:

Wenn zwei Peripheriepunkte einer Ellipse auf Einer Seite von ihrer grossen Axe sich befinden, so zeigt sich der Winkel zwischen den zugehörigen Nor-

malen gleich der halben Summe der zwei Winkel, deren jeder sich ergibt zwischen den aus Einem Brennpunkte nach jenen zwei Peripheriepunkten gezogenen Brennstrahlen.

Aus diesem Satze — ähnlich schliessend, wie es hier in § 2. geschehen ist — entwickelte er den von Herrn Gugler (vergl. § 2. Anmkg.) schon längst auf anderem Wege gefundenen und so ausgesprochenen:

Der Krümmungsmittelpunkt N zu Punkt P einer Ellipse liegt auf der Normale von P dermassen, dass die Punkte P und N — als einander zugeordnete — eine harmonische Gruppe bilden mit den zwei Punkten, deren jeder erhalten wird, indem man aus einem Brennpunkt F den Brennstrahl FP zieht, dann aus F die zu FP senkrechte Gerade bis an jene Normale.

Diese beiden Sätze (der letztere auch von mir selbst fast gleichzeitig mit Herrn Baur an den ersteren angeknüpft) lassen sich sofort auf die Hyperbel ausdehnen. Von ihnen aus wird verhältnissmässig leicht (durch rein geometrisches Verfahren) auch für Ellipse und Hyperbel noch derjenige gewonnen, welcher durch die Formel $\varrho = n : \cos^2 \varphi$ kurz anzudeuten ist, und welcher unserem Satze § 3. II) über die Parabel entspricht. Dagegen scheint der weitere Fortgang auf der betretenen Bahn etwas grössere Schwierigkeiten zu haben; wobei freilich die Hoffnung besteht, dass dieselben — gegenüber den etwa fortgesetzten Bemühungen der genannten Gelehrten — in nicht langer Zeit verschwinden werden.

Ludwigsburg, im Juli 1877.

XXIX.

Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre.

Par

Georges Dostor.

Nous avons prouvé, dans ce Journal (Tome LIX, page 385) que

La surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé, qui est inscrit dans le même cercle.

Cette relation remarquable n'existe pas seulement entre les surfaces de ces deux polygones: elle est une conséquence d'un théorème général, qui a lieu pour les surfaces de certains couples de polygones réguliers, inscrits dans le même cercle et ayant l'un deux fois autant de côtés que l'autre.

Considérons, en effet, deux polygones réguliers inscrits dans le même cercle, et ayant l'un n et l'autre $2n$ côtés. Supposons que le premier polygone, qui a n côtés, soit de l'espèce p, et que le second, de $2n$ côtés, soit de l'espèce q.

Les surfaces de ces deux polygones réguliers seront respectivement (Tome LIX, page 380)

$$S_{n,p} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi},$$

$$S_{2n,p} = 2nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{q}{2n}\pi}{\cos\frac{q-1}{2n}},$$

où R désigne le rayon du cercle commun circonscrit.

Pour que la seconde surfaces $S_{2n,q}$ soit double de la première $S_{n,p}$, il faut et il suffit que l'on puisse trouver pour p et q des valeurs entières telles que les deux fractions

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}, \quad \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{q}{2n}\pi}{\cos\frac{q-1}{2n}\pi}$$

soient identiquement égales, quel que soit le nombre entier n.

Cette égalité parfaite aura certainement lieu, si l'on a, pour toute valeur entière de n

$$\sin\frac{\pi}{n} = \cos\frac{q}{2n}\pi, \quad \cos\frac{p}{n}\pi = \sin\frac{\pi}{2n},$$

$$\cos\frac{p-1}{n}\pi = \cos\frac{q-1}{2n}\pi,$$

ou si les trois équations

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{q}{2n}\pi, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{p}{n}\pi = \frac{\pi}{2n},$$

$$\frac{p-1}{n}\pi = \frac{q-1}{2n}\pi,$$

sans être incompatibles, admettent des valeurs entières pour p et q, respectivement inférieures à n et à $2n$.

Or les deux premières de ces équations donnent les valeurs

$$q = n - 2, \quad p = \frac{n-1}{2},$$

qui, par l'élimination de n, fournissent précisément notre troisième équation de condition

$$q + 2 = 2p + 1, \quad \text{ou} \quad q - 1 = 2p - 2.$$

Ainsi, si n est impair et que l'on ait $q = n - 2$, $p = \frac{n-1}{2}$, le premier polygone régulier sera double du second. Nous pouvons donc dire que:

Théorème. La surface d'un polygone régulier, d'un

nombre simplement pair $2n$ de côtés et de l'espèce $n-2$, est double de la surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce $\frac{n-1}{2}$, qui est inscrit dans le même cercle; ou d'une manière plus précise

La surface d'un polygone régulier, d'un nombre impair de côtés et de son espèce la plus élevée, est la moitié de la surface du polygone régulier, d'un nombre double de côtés et aussi de son espèce la plus élevée, qui se trouve inscrit dans le même cercle.

Pour nous borner aux polygones réguliers, inscriptibles par la règle et le compas, donnons à n successivement les valeurs 3, 5, 15, 17, etc.;

pour $n = 3$, nous aurons $2n = 6$, $p = 1$, $q = 1$;
„ $n = 5$, „ $2n = 10$, $p = 2$, $q = 3$;
„ $n = 15$, „ $2n = 30$, $p = 7$, $q = 13$;
„ $n = 17$, „ $2n = 34$, $p = 8$, $q = 15$; etc.

Ainsi l'hexagone régulier est double du triangle équitatéral inscrit dans la même cercle; la surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé; le polygone régulier de 30 côtés et de la treizième espèce est double du polygone régulier de 15 côtés et de la septième espèce; etc.

XXX.

Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe.

Von

R. Hoppe.

Einige Hülfssätze.

Um Unterbrechung zu vermeiden, will ich vor Stellung der Aufgabe 3 allgemeine Sätze vorausschicken.

Satz 1. Ist $w(a)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Variabele x grösser als eine Constante a sei, so ist die Wahrscheinlichkeit eines x zwischen a und $a+\partial a$

$$= -\partial w(a)$$

Denn die Chancen für $x > a+\partial a$, d. i. $w(a+\partial a)$, sind um die fragliche Grösse kleiner als die Chancen für $x > a$, d, i. $w(a)$.

Satz 2. Ist v_h die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Combination von h Fällen unter k möglichen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer der k Fälle stattfinde,

$$V = \Sigma v_1 - \Sigma v_2 + \Sigma v_3 - \Sigma v_4 + \dots \Sigma v_k \tag{1}$$

wo sich die Summen auf alle möglichen Combinationen beziehen.

Beweis. Sei v_h' die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe Combination von h Fällen wie in v_h statthabe, aber kein andrer der k Fälle ausserdem. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit V, dass irgend einer von allen Fällen stattfinde, die Summe aller v'. Um nun zu beweisen, dass letztere gleich dem Ausdruck (1) ist, brauchen wir die Combinationen jeder Classe nur ohne Unterschied zu zählen, weil stets alle

Permutationen in ihnen enthalten sein müssen. Entwickeln wir die v_h in die v_k', so sind die Anzahlen der darin enthaltenen v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ... die der Combinationen der $k-h$ übrigen Fälle, dass ist

$$1, \quad \frac{k-h}{1}, \quad \frac{k-h}{1}\frac{k-h-1}{2}, \ldots$$

allgemein ist die Anzahl der v'_{h+g}, als Binomialcoefficient bezeichnet,

$$= (k-h)_g$$

oder die der v_g'

$$= (k-h)_{g-h}$$

Ferner ist die Anzahl der v_h

$$= (k)_h$$

folglich die aller derjenigen v_g', welche Σv_h enthält,

$$= (k)_h (k-h)_{g-h} = (k)_g (g)_h$$

Hiervon ist für constantes g und k bei abwechselnden Vorzeichen gemäss (1) die Summe nach h von 1 an bis zum Abbrechen der Reihe bei $h = g$ zu nehmen. Nach dem binomischen Satze ist nun

$$\sum_{h=0}^{h=g} (g)_h (-1)^h = (1-1)^g = 0$$

mithin die Summe von $h = 1$ an $= -1$, folglich

$$\sum_{h=1}^{h=g} (-1)^{h-1} (k)_g (g)_h = (k)_g$$

und die Anzahlen der im Ausdruck (1) enthaltenen v_1', v_2', v_3', ... werden

$$(k)_1, \quad (k)_2, \quad (k)_3, \ldots$$

das ist gleich den Anzahlen aller verschiedenen v_h' jeder Classe, was allein noch zu beweisen war.

Satz 3. Sind die Wahrscheinlichkeiten von n Fällen w_1, w_2, ... w_n unendlich klein, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer von ihnen stattfinde,

$$= w_1 + w_2 + \ldots w_n$$

Sind insbesondere alle n Fälle gleich wahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt einer stattfinde, n mal so gross als die des einzelnen.

Dass die Behauptung, schon für beliebig grosse Wahrscheinlichkeiten, richtig ist, wenn keine Fälle combinirt vorkommen können,

erhellt von selbst. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit jeder Combination das Product der Wahrscheinlichkeiten der darin combinirten Fälle, verschwindet also gegen letztere, folglich auch gegen die Summe aller, da sie ja positiv sind, und es bleibt die reine Summe übrig.

Aufgabe.

Auf einer begrenzten Linie liegen n Punkte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stück der Linie von gegebener Länge frei von Punkten ist?

Es ist leicht zu sehen, dass diese Aufgabe Anwendung in sehr mannichfaltiger Form zulässt. Die Linien können gerade oder krumm sein; man kann statt ihrer Rechtecke, Winkel und andere einfach variirende Raumgrössen, statt der Punkte geeignete Linien nehmen; die Linien können Zeitintervalle, die Punkte Ereignisse repräsentiren u. s. w. Erweiterungen des Problems sind in vieler Weise möglich.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass das leere Intervall nicht kleiner als die Hälfte der ganzen Linie sei, und die Aufgabe so nach 3 Methoden lösen.

Erste Methode.

Die ganze Linie AB sei $=1$, der grösste Abstand zweier successiven Punkte $=p$. Es wird die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ gesucht, dass

$$p \geqq 1-x$$

sei, wo $x \leqq \frac{1}{2}$ gegeben ist.

Wir nehmen zu den n Punkten einen $(n+1)$ten Punkt P hinzu und fragen: Wenn für die n Punkte dass leere Intervall $CD = 1-x$ ist, wie gross ist nach Zutritt von P die Wahrscheinlichkeit eines leeren Intervalls $\geqq 1-y$, wo $y \geqq x$?

Offenbar existirt dasselbe, wenn entweder die Strecke CP oder die Strecke $PD < y-x$ ist. Da nun $AC+DB = x$, so beträgt die Summe der 2 Weglängen, die P durchlaufen kann, das ist die Chancen des gedachten Falles,

$$x+2(y-x) = 2y-x$$

Dieser Wert, wofern er als Factor gebraucht wird, bleibt gültig, wenn CD, statt genau $=1-x$ zu sein, zwischen $1-x$ und $1-x-\partial x$

enthalten ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass letzteres stattfindet, ist nach Satz 1.

$$= \partial w_n(x)$$

Combinirt man beide Fälle, so drückt das Product

$$(2y - x)\,\partial w_n(x)$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass für die n Punkte

$$1 - x \geqq p \geqq 1 - x - \partial x$$

und für die $n+1$ Punkte das leere Intervall $\geqq 1 - y$ ist. Lässt man x alle möglichen Werte durchlaufen, während y constant bleibt, und addirt die gesammten Chancen für $p \geqq 1 - y$, so ergiebt sich:

$$w_{n+1}(y) = \int_0^y (2y - x)\partial w_n(x) \tag{2}$$

Durch diese recurrirende Gleichung wird die gesuchte Function bestimmt, wenn sie für irgend ein n bekannt ist.

Nun genügt offenbar derselben die Form

$$w_n(x) = c_n x^{n+\alpha} \tag{3}$$

und zwar ist, da für 0 Punkte die Wahrscheinlichkeit in Gewissheit übergeht,

$$w_0(x) = 1$$

also $\alpha = 0$; $c_0 = 1$. Führt man den Wert (3) in (2) ein, so findet man:

$$c_{n+1} y^{n+1} = \frac{n+2}{n+1} c_n y^{n+1}$$

woraus:

$$c_n = \frac{n+1}{n} c_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} c_{n-2} = \ldots \frac{n+1}{1} c_0 = n+1$$

Demnach ist

$$w_n(x) = (n+1)x^n \tag{4}$$

Zweite Methode.

Wir betrachten auf AB eine bestimmte Strecke $CD = 1 - x$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt ausser derselben liegt, gleich dem Reste x, also die, dass n Punkte ausserhalb liegen, $= x^n$.

Wir verrücken nun C und D bei constantem CD k mal um ε, so dass eine Reihe von $k+1$ gleichen Strecken

$$CD = C_1D_1 = C_2D_2 = \ldots C_kD_k$$

entsteht. Bezeichnet dann v_h die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Combination von h solchen Strecken leer ist, so ist nach Satz 2. die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt eine solche Strecke leer ist,

$$V = \Sigma v_1 - \Sigma v_2 + \Sigma v_3 - \Sigma v_4 + \ldots \Sigma v_{k+1} \tag{5}$$

wo sich die Summenzeichen auf alle möglichen Combinationen der Strecken beziehen. Jedes v_h hängt aber allein vom Gesammtumfang der combinirten Strecken, also von der Differenz des kleinsten und grössten Index ab. Enthält die Combination irgend welche Strecken von der $a$ten bis zur $(a+b)$ten, so beträgt der Gesammtumfang

$$1 - x + b\varepsilon$$

und man hat:

$$v_h = (x - b\varepsilon)^n$$

Dies ist der gemeinsame Wert von sovielen Termen der Summe Σv_h, als die zwischenliegenden Reihenglieder mit den Indices

$$a+1, \quad a+2, \ldots a+b-1$$

zu $h-2$ Elementen combinirt werden können; als Binominalcofficient ausgedrükt ist die Anzahl

$$= (b-1)_{h-2}$$

multiplicirt mit der Anzahl der möglichen a, das ist

$$k - b + 1$$

Hiernach ist zunächst

$$\Sigma v_1 = (k+1)v_1 = (k+1)x^n$$

indem bei einem einzigen Reihenglied b nur $=0$ sein kann. Die übrigen Teile des Ausdruks (5) können wir so addiren, dass wir erst b constant setzen; dann ist

$$(k-b+1)(x-b\varepsilon)^n$$

gemeinsamer Factor, und dessen Coefficienten

$$-(b-1)_0 + (b-1)_1 - (b-1)_2 + \ldots (b-1)_{b-1}$$

geben für $b > 1$ die Summe 0, während für $b = 1$ bloss der erste Term -1 bleibt. Folglich ist

$$V = (k+1)x^n - k(x-\varepsilon)^n$$

das ist für unendlich kleines ε

$$V = x^n + nk\varepsilon x^{n-1} \qquad (6)$$

Lässt man nun C bei constantem CD die ganze übrige Strecke $= x$ durch successives Fortrücken durchlaufen, so wird

$$k\varepsilon = x$$

und die Grösse (6) geht über in

$$V = (n+1)x^n$$

Dies ist zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass eine der unendlich vielen gleichen Strecken leer ist. Da sie aber von der Teilungszahl nicht abhängt, so stellt sie auch die Wahrscheinlichkeit irgend einer ebenso langen leeren Strecke überhaupt dar, in Uebereinstimmung mit dem ersten Ergebniss (4).

Dritte Methode.

Wie im Vorigen gehen wir auch hier von der Bemerkung aus, dass die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten leeren Strecke $CD = 1 - x$

$$= x^n$$

ist. Die vorhergehende Strecke AC möge von 0 bis y variiren können. Dann wächst die Wahrscheinlichkeit der leeren Strecke $= 1 - x$ stetig mit y; es ist das Verhältniss der unendlich kleinen Incremente zu finden.

Die Wahrscheinlichkeit sei $= w(x, y)$. Wächst y um ∂y, und rückt C nach C', so kommen als Chancen diejenigen Fälle hinzu, wo auf CC' irgend welche (wir wollen sagen m) Punkte liegen, während die Bedingung einer nachfolgenden leeren Strecke $= 1 - x$ dieselbe bleibt. Da diese Bedingung nur auf $n - m$ Punkte Bezug hat, so ist die Wahrscheinlichkeit ihrer Erfüllung

$$= x^{n-m}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Punktes auf CC' ist $= \partial y$, die der nachfolgenden leeren Strecke alsdann

$$= x^{n-1}$$

also die der Combination beider Fälle

$$= x^{n-1}\partial y$$

daher nach Satz 3., da alle n Punkte in gleichem Falle sind, die Zunahme der Chancen der verlangten leeren Strecke

$$\partial w(x, y) = nx^{n-1}\partial y$$

und, da y überhaupt von 0 bis x zu variiren hat,

$$w(x, x) - w(x, 0) = \int_0^x nx^{n-1}\partial y = nx^n$$

Nun sind $w(x, 0)$ und $w(x, x)$ die Wahrscheinlichkeiten einer leeren Strecke $CD = 1 - x$ bei festem und beliebigem C. Erstere ist bekanntermassen $= x^n$, letztere die gesuchte Grösse, folglich

$$w_n(x) = (n + 1)x^n$$

wie wir hier zum drittenmal finden.

Ergänzung.

Die beiden ersten Methoden bauen wiederholt auf die Voraussetzung, dass nicht mehrere leere Strecken $= 1 - x$ ausser einander existiren. Es ist deshalb $x \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ angenommen worden. Die dritte Methode ist von dieser Annahme unabhängig; doch bringt sie die Chancen für m aussereinander liegende leere Strecken $n$fach in Anrechnung; nur mit dieser Deutung gilt dann noch die Formel. Die Berechnung der Chancen für die Combinationen von Strecken, welche zu subtrahiren sein würden, damit das Resultat der Aufgabe nach ihrem Wortlaut entspricht, würde äusserst complicirt sein.

XXXI.

Untersuchungen über das Dreieck.

Von

Emil Hain.

I.

Beziehungen des Umkreises.

1. Bezeichnet x_a die Normale eines Punktes X des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises auf die Seite $BC = a$, so gilt die Relation:

$$a x_b x_c + b x_c x_a + c x_a x_b = 0$$

Ist nun P ein Punkt in der Ebene des Dreiecks mit den Seitennormalen (trimetrischen Punktcoordinaten) $p_a p_b p_c$, und verlängert man AP, bis der Umkreis zum zweitenmale in $\mathfrak{P}_a$ getroffen wird; so müssen die Coordinaten von $\mathfrak{P}_a$ folgenden Gleichungen genügen:

$$a x_b x_c + b x_c x_a + c x_a x_b = 0$$

$$\frac{x_b}{p_b} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

Hieraus erhalten wir die Coordinaten von $\mathfrak{P}_a$:

$$\mathfrak{P}_a \equiv - a p_b p_c \quad p_b(b p_c + c p_b) \quad p_c(b p_c + c p_b)$$

und für einen Punkt $Q \equiv q_a$:

$$\mathfrak{Q}_a \equiv - a q_b q_c \quad q_b(b q_c + c q_b) \quad q_c(b q_c + c q_b)$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte ξ_a, ξ_a' hat die Gleichung:

$$\Sigma \begin{vmatrix} \xi_b & \xi_b' \\ \xi_c & \xi_c' \end{vmatrix} x_a = 0$$

Darnach ist:

$$\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a \equiv (bp_c + cp_b)(bq_c + cq_b) \quad abp_cq_c \quad acp_bq_b$$

Ist $\mathfrak{A}$ der Schnittpunkt der BC mit $\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a$, so ergibt sich wegen $BC \equiv 1 \quad 0 \quad 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\equiv 0 \quad acp_bq_b \qquad -abp_cq_c \\ &\equiv 0 \quad cp_bq_b \qquad -bp_cq_c \\ &\equiv 0 \quad cp_bq_b . p_aq_a \qquad -bp_cq_c . p_aq_a \end{aligned}$$

Die $\mathfrak{A}$ liegen in der Geraden $ap_bp_cq_bq_c$, ihr harmonischer Pol in Bezug auf das Urdreieck ist $Z \equiv bcp_aq_a$. Dieser Punkt wird sonach auf folgende Weise construirt:

Gegeben das Dreieck ABC, $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$. AP, AQ treffen den Umkreis des gegebenen Dreiecks in $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{Q}_a$. Die $\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a$ schneiden die BC in $\mathfrak{A}$. Der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{A}$ bezüglich BC sei Z_a. Die AZ_a treffen sich in $Z \equiv bcp_aq_a$.

Es ergeben sich nun einige Specialfälle.

Ist Q der Grebe'sche Punkt G des Urdreiecks, ist also $q_a = a$; so wird $Z \equiv bcp_a . a \equiv p_a$ d. h.:

Verzeichnet man über den Seiten eines Dreiecks Quadrate, so bilden die verlängerten äusseren Quadratseiten ein dem ursprünglichen ähnliches Dreieck; der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke ist der Grebe'sche Punkt. Man verbinde denselben mit den Ecken des Urdreiecks und verlängere diese Ecktransversalen, bis sie den Umkreis zum zweitenmale in $\mathfrak{G}_a$ schneiden.

P sei ein anderer Punkt des Urdreiecks und AP treffe den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$. Die $\mathfrak{P}_a\mathfrak{G}_a$ schneiden die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von P in Bezug auf das Urdreick.

Im Falle $p_a = q_a$ fallen P und Q zusammen, die Sehne $\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a$ wird Tangente im Punkte $\mathfrak{P}_a$ und wir haben folgenden Satz:

Ist $P \equiv p_a$ ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC und trifft AP den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$, so schneiden die Tangenten in $\mathfrak{P}_a$ an den Umkreis die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Punktes $Z \equiv bcp_a^2$. Ist $P \equiv G$, so wird auch $Z \equiv G$.

Ist $Q \equiv p_bp_c$, der reciproke Punkt von P; so wird $Z \equiv bc$. Ist J das Inkreiscentrum des Dreiecks ABC, P ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben; trifft AP den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$ und construirt man auf der andern Seite von AJ den Winkel $\mathfrak{P}_aAJ$, so dass der neue Schenkel den Umkreis in $\mathfrak{Q}_a$ trifft: dann schneiden sich die

$A\mathfrak{Q}_a$ in einem Punkte Q, dessen Coordinaten denen von P reciprok sind, also im Punkte $Q \equiv p_b p_c$. In diesem Falle sind die $\mathfrak{P}_a \mathfrak{Q}_a$, wie auch unmittelbar die Figur zeigt, den BC parallel.

2. Es ist:

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{P}_b & \equiv p_a(cp_a + ap_c) & -bp_c p_a & p_c(cp_a + ap_c) \\ \mathfrak{P}_c & \equiv p_a(ap_b + bp_a) & p_b(ap_b + bp_a) & -cp_a p_b \\ \mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c & \equiv -ap_b p_c & p_a(ap_c + cp_a) & p_a(ap_b + bp_a) \end{array}$$

AP treffe BC in P_a, dann ist:

$$\begin{array}{rlll} P_a & \equiv 0 & p_b & p_c \\ P_b & \equiv p_a & 0 & p_c \\ P_c & \equiv p_a & p_b & 0 \\ P_b P_c & \equiv -p_b p_c & p_c p_a & p_a p_b \end{array}$$

Die $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$ treffen die $P_b P_c$ in $\mathfrak{A}'$. Man findet:

$$\begin{vmatrix} p_a p_c & p_a p_b \\ p_a(ap_c + cp_a) & p_a(ap_b + bp_a) \end{vmatrix} = p_a^3(bp_c - cp_b)$$

$$\begin{vmatrix} p_a p_b & -p_b p_c \\ p_a(ap_b + bp_a) & -ap_b p_c \end{vmatrix} = bp_a^2 p_b p_c$$

$$\begin{vmatrix} -p_b p_c & p_a p_c \\ -ap_b p_c & p_a(ap_c + cp_a) \end{vmatrix} = -cp_a^2 p_b p_c$$

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{A}' & \equiv p_a(bp_c - cp_b) & bp_b p_c & -cp_b p_c \\ A\mathfrak{A}' & \equiv 0 & c & b \end{array}$$

Diese Gerade trifft die BC im Punkte: $0 \quad b \quad -c$. Diese Punkte liegen in der Geraden bc, der Harmonikalen des Grebe'schen Punktes. Wir haben also den Satz:

Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, trifft AP die BC in P_a, den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$ und schneiden die $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$ die $P_b P_c$ in $\mathfrak{A}'$; so liegen die Schnittpunkte der $A\mathfrak{A}'$ mit den BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Grebe'schen Punktes.

3. AP treffe BC in P_a, Π_a trenne BC harmonisch von P_a. Dann ist:

$$\Pi_a \equiv 0 \quad p_b \quad -p_c$$

$A\Pi_a$ schneide den Umkreis zum zweitenmale in $\mathfrak{P}_a'$. Die Coordinaten dieses Punktes sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\Sigma a x_b x_c = 0, \quad p_c x_b + p_b x_c = 0$$

Wir bekommen:

$$\mathfrak{P}_a' \equiv a p_b p_c \quad -p_b(b p_c - c p_b) \quad p_c(b p_c - c p_b)$$
$$\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a' \equiv \Delta_a \qquad \Delta_b \qquad \Delta_c$$

Die Δ_a sind der Reihe nach:

$$\begin{vmatrix} p_b(b p_c + c p_b) & p_c(b p_c + c p_b) \\ -p_b(b p_c - c p_b) & p_c(b p_c - c p_b) \end{vmatrix} = 2 p_b p_c (b^2 p_c^2 - c^2 p_b^2)$$

$$\begin{vmatrix} p_c(b p_c + c p_b) & -a p_b p_c \\ p_c(b p_c - c p_b) & +a p_b p_c \end{vmatrix} = 2 a b p_b p_c^3$$

$$\begin{vmatrix} -a p_b p_c & p_b(b p_c + c p_b) \\ +a p_b p_c & -p_b(b p_c - c p_b) \end{vmatrix} = -2 a c p_b^3 p_c$$

Somit ist:

$$\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a' \equiv b^2 p_c^2 - c^2 p_b^2 \quad a b p_c^2 \quad -a c p_b^2$$

Die $\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a'$ treffen BC in:

$$\mathfrak{A}'' \equiv 0 \quad a c p_b^2 \quad a b p_c^2$$

Die $A\mathfrak{A}''$ schneiden sich im Punkte $b c p_a^2$. Die Construction dieses Punktes ist also folgende:

AP $(P \equiv p_a)$ treffe den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$. $\mathfrak{P}_a'$ sei ein solcher Punkt des Kreisumfanges, dass $A\mathfrak{P}_a'$ den Winkel BAC mit $A\mathfrak{P}_a$ harmonisch teilt. Die $\mathfrak{P}_a \mathfrak{P}_a'$ treffen die BC in $\mathfrak{A}''$ und die $A\mathfrak{A}''$ begegnen sich im Punkte $b c p_a^2$.

4. Es ist:

$$P_a \mathfrak{P}_a' \equiv 2(b p_c - c p_b) \quad a p_c \quad -a p_b$$
$$\Pi_a \mathfrak{P}_a \equiv 2(b p_c + c p_b) \quad a p_c \quad a p_b$$

Man findet, dass sich diese beiden Geraden im Punkte

$$\mathfrak{A}''' \equiv -a \quad 2b \quad 2c$$

treffen. Nun ist: $A\mathfrak{A}''' \equiv 0 \quad c \quad -b$. Die $A\mathfrak{A}'''$ schneiden sich also im Grebe'schen Punkte. Der so erhaltene Satz lautet:

Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, trifft AP die BC in P_a, trennt Π_a die BC harmonisch von P_a und schneiden AP_a, $A\Pi_a$ den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_a'$; so begegnen sich die $P_a \mathfrak{P}_a'$, $\Pi_a \mathfrak{P}_a$ in $\mathfrak{A}'''$ und die $A\mathfrak{A}'''$ im Grebe'schen Punkt.

5. Die $\mathfrak{P}_b \mathfrak{P}_c$ schneiden die BC in Punkten einer Geraden, welche die Form $b p_c + c p_b$ hat, also mit der Umkreispolare des Punktes $P \equiv p_a$ zusammenfällt. Wir wollen nun die Schnittpunkte der $\mathfrak{P}_b' \mathfrak{P}_c'$ mit BC bestimmen. Es ist:

$$\mathfrak{P}_b' \equiv \quad p_a(cp_a - ap_c) \quad bp_cp_a \qquad -p_c(cp_a - ap_c)$$
$$\mathfrak{P}_c' \equiv -p_a(ap_b - bp_a) \quad p_b(ap_b - bp_a) \quad cp_ap_b$$
$$\mathfrak{P}_b'\mathfrak{P}_c' \equiv \quad \Delta_a \qquad \Delta_b \qquad \Delta_c$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} bp_cp_a & -p_c(cp_a - ap_c) \\ p_b(ap_b - bp_a) & cp_ap_b \end{vmatrix}$$
$$= ap_bp_c(cp_ap_b + bp_cp_a - ap_bp_c)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} -p_c(cp_a - ap_c) & p_a(cp_a - ap_c) \\ cp_ap_b & -p_a(ap_b - bp_a) \end{vmatrix}$$
$$= -p_a(cp_a - ap_c)(cp_ap_b + bp_cp_a - ap_bp_c)$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} p_a(cp_a - ap_c) & bp_cp_a \\ -p_a(ap_b - bp_a) & p_b(ap_b - bp_a) \end{vmatrix}$$
$$= p_a(ap_b - bp_a)(cp_ap_b + bp_cp_a - ap_bp_c)$$

Also ist:

$$\mathfrak{P}_b'\mathfrak{P}_c' \equiv ap_bp_c \quad -p_a(cp_a - ap_c) \quad p_a(ap_b - bp_a)$$

Die $\mathfrak{P}_b'\mathfrak{P}_c'$ trifft die BC in:

$$\mathfrak{A}_1 \equiv 0 \quad ap_b - bp_a \qquad cp_a - ap_c$$
$$\equiv 0 \quad (bp_c - cp_b)(bp_a - ap_b) \quad (cp_a - ap_c)(cp_b - bp_c)$$

Die $A\mathfrak{A}_1$ schneiden sich im Punkte $(ap_b - bp_a)(ap_c - cp_a)$, dem harmonischen Pol der Geraden, welche den Grebe'schen Punkt mit P verbindet.

6. Es ist:

$$B\mathfrak{P}_c \equiv cp_ap_b \quad 0 \qquad p_a(ap_b + bp_a)$$
$$C\mathfrak{P}_b \equiv bp_cp_a \quad p_a(cp_a + ap_c) \quad 0$$

Diese beiden Geraden treffen sich in:

$$\mathfrak{A}_2 \equiv -(ap_b + bp_a)(cp_a + ap_c) \quad bp_c(ap_b + bp_a) \quad cp_b(cp_a + ap_c)$$

Hieraus folgt:

$$A\mathfrak{A}_2 \equiv 0 \quad cp_b(cp_a + ap_c) \quad -bp_c(ap_b + bp_a)$$

Die $A\mathfrak{A}_2$ treffen sich im Punkte $R \equiv ap_bp_c(ap_b + bp_a)(ap_c + cp_a)$. Derselbe wird somit auf folgende Weise construirt:

AP ($P \equiv p_a$) trifft den Umkreis des Urdreiecks noch in $\mathfrak{P}_a$. Die $B\mathfrak{P}_c$, $C\mathfrak{P}_b$ schneiden sich in $\mathfrak{A}_2$, die $A\mathfrak{A}_2$ in R.

Ferner ist:

$$B\mathfrak{P}_c' \equiv cp_ap_b \quad 0 \quad p_a(ap_b - bp_a)$$
$$C\mathfrak{P}_b' \equiv bp_cp_a \quad -p_a(cp_a - ap_c) \quad 0$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist:

$$\mathfrak{A}_3 \equiv (cp_a - ap_c)(ap_b - bp_a) \quad bp_c(ap_b - bp_a) \quad -cp_b(cp_a - ap_c)$$

Es ist dann:

$$A\mathfrak{A}_3 \equiv 0 \quad cp_b(cp_a - ap_c) \quad bp_c(ap_b - bp_a)$$
$$\equiv 0 \quad q_c \quad q_b$$
$$q_a = ap_bp_c(ap_b - bp_a)(ap_c - cp_a)$$

Die $A\mathfrak{A}_3$ treffen die BC in den Punkten: $0 \quad q_b \quad -q_c$, welche in der Geraden q_bq_c, der Harmonikalen des Punktes q_a, liegen. Der Punkt $Q \equiv q_a$ wird also auf folgende Weise construirt:

Die Harmonikale von $P \equiv p_a$ treffe BC in Π_a. $A\Pi_a$ schneide den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a'$. Die $B\mathfrak{P}_c'$, $C\mathfrak{P}_b'$ ergeben den Schnittpunkt $\mathfrak{A}_3$. Die $A\mathfrak{A}_3$ treffen die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von Q.

7. Trifft der zum Strahl AQ ($Q \equiv q_a$) bezüglich AB, AC vierte harmonische Strahl den Umkreis in $\mathfrak{Q}_a'$, so ist:

$$\mathfrak{Q}_a' \equiv aq_bq_c \quad -q_b(bq_c - cq_b) \quad q_c(bq_c - cq_b)$$
$$\mathfrak{P}_a'\mathfrak{Q}_a' \equiv (bp_c - cp_b)(bq_c - cq_b) \quad abp_cq_c \quad acp_bq_b$$

Nun ist:

$$\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a \equiv (bp_c + cp_b)(bq_c + cq_b) \quad abp_cq_c \quad acp_bq_b$$

Hieraus folgt, dass $\mathfrak{P}_a'\mathfrak{Q}_a'$ und $\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a$ die BC in demselben Punkte treffen.

Sind also P, Q zwei beliebige Punkte und treffen AP, AQ den Umkreis noch in $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{Q}_a$; schneiden ferner die zu AP, AQ bezüglich AB, AC vierten harmonischen Strahlen den Umkreis in $\mathfrak{P}_a'$, $\mathfrak{Q}_a'$: so begegnen sich die $\mathfrak{P}_a\mathfrak{Q}_a$, $\mathfrak{P}_a'\mathfrak{Q}_a'$, BC in denselben Punkten und zwar in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen des Punktes bcp_aq_a.

II.

Der Steiner'sche Kegelschnitt zweier Punkte.

Sind P, Q Punkte in der Ebene eines Dreiecks ABC; treffen die Geraden PA, QA die BC in P_a, Q_a: so liegen nach Steiner die Punkte P_a, Q_a auf einem Kegelschnitt. Er hat die Gleichung:

$$\Sigma p_bq_bp_cq_cx_a^2 - \Sigma p_aq_a(p_bq_c + p_cq_b)x_bx_c = 0$$

wie die Einsetzung der Coordinatenwerte

$$P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c$$
$$Q_a \equiv 0 \quad q_b \quad q_c$$

bestätigt, wenn

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$
$$Q \equiv q_a \quad q_b \quad q_c$$

Die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf einen Kegelschnitt S hat die Form: $\partial S:\partial\xi_a$, wenn in S für die x die ξ gesetzt werden. Hier ist:

$$\partial S:\partial\xi_a = 2p_b q_b p_c q_c \xi_a - p_c q_c(p_a q_b + p_b q_a)\xi_b - p_b q_b(p_a q_c + p_c q_a)\xi_c$$

Die Polare von P hat also die Form:

$$2p_b q_b p_c q_c p_a - p_c q_c(p_a q_b + p_b q_a)p_b - p_b q_b(p_a q_c + p_c q_a)p_c$$
$$\equiv q_a p_b p_c(p_b q_c + p_c q_b)$$

Ebenso ist die Polare von Q die Gerade:

$$p_a q_b q_c(p_b q_c + p_c q_b)$$

Die Polaren von P, Q treffen sich in:

$$\begin{vmatrix} q_b p_c p_a(p_c p_a + p_a q_c) & p_b q_c q_a(p_c q_a + p_a q_c) \\ q_c p_a p_b(p_a q_b + p_b q_a) & p_c q_a q_b(p_a q_b + p_b q_a) \end{vmatrix}$$
$$\equiv p_a q_a(p_c q_a + p_a q_c)(p_a q_b + p_b q_a)(p_c^2 q_b^2 - p_b^2 q_c^2)$$
$$\equiv p_a q_a(p_b q_c - p_c q_b)$$

Die Harmonikalen von P, Q sind die Geraden: $p_b p_c$, $q_b q_c$. Ihr Schnittpunkt hat die Form:

$$\begin{vmatrix} p_c p_a & q_c q_a \\ p_a p_b & q_a q_b \end{vmatrix} = p_a q_a(p_c q_b - p_b q_c)$$

Wir haben also den Satz:

Werden zwei beliebige Punkte in der Ebene eines Dreiecks mit dessen Ecken verbunden, so treffen diese Ecktransversalen die Gegenseiten in sechs Punkten eines Kegelschnittes, in Bezug auf welchen die Polaren der beiden Punkte sich mit ihren Harmonikalen in demselben Punkte treffen.

Setzen wir in der Gleichung:

$$\Sigma p_b q_b p_c q_c x_a^2 - \Sigma p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)x_b x_c = 0$$

$x_a = p_a$, so bekommen wir:

$$\Sigma p_a q_b q_c = 0$$

Liegt also von zwei Punkten der eine auf der Harmonikale des andern, so liegt jener auch auf der Peripherie des Steiner'schen Kegelschnittes der beiden Punkte.

Der Kegelschnitt: $\Sigma p_a x_b x_c = 0$ ist dem Urdreieck umschrieben. Die Tangenten in A schneiden die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen (geraden Polaren) des Punktes P. Man nennt diesen Kegelschnitt die konische Polare von P in Bezug auf das Dreiseit ABC. Wir können also auch sagen:

Der Steiner'sche Kegelschnitt eines Punktes und irgend eines Peripheriepunktes seiner konischen Polare in Bezug auf das Urdreieck geht durch jenen Punkt selbst.

Da $G \equiv a$ der Grebe'sche Punkt und $\Sigma a x_b x_c = 0$ die Gleichung des Umkreises ist, so hat man den Specialfall:

Der Steiner'sche Kegelschnitt des Grebe'schen Punktes und eines Peripheriepunktes des Umkreises geht durch den Grebe'schen Punkt.

III.

Ueber den Polarkreis.

Sind x_a die Normalen eines Punktes X auf die Seiten $BC = a$ des Dreiecks ABC, so liegt X auf der Peripherie eines Kegelschnittes, wenn:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Derselbe ist ein Kreis, sobald

$$b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc} = G \doteq \text{const}$$

und entspricht dem Fundamentaldreieck polar, wenn die g_{bc} verschwinden.

Wir haben sonach, um die Gleichung des Polarkreises für das Dreieck ABC zu bilden, folgende Gleichungen aufzulösen:

$$c^2 g_{bb} + b^2 g_{cc} = G$$
$$c^2 g_{aa} + a^2 g_{cc} = G$$
$$b^2 g_{aa} + a^2 g_{bb} = G$$

Wir erhalten:

$$g_{aa} \equiv \begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv a^2(b^2 + c^2 - a^2) \equiv a \cos \alpha$$

wenn wir mit α, β, γ die Winkel des Urdreiecks bezeichnen. Die Gleichung des Polarkreises lautet also:

$$\Sigma a \cos\alpha\, x_a^2 = 0$$

Die Polare des Punktes ξ in Bezug auf diesen Kreis hat die Form:

$$\frac{\partial \Sigma a \cos\alpha\, \xi_a^2}{\partial \xi_a} \equiv a \cos\alpha\, \xi_a$$

Für $\xi_a = \cos\beta \cos\gamma$ erscheint die Polare im Unendlichen. Sonach ist der Höhenschnitt des Urdreiecks der Mittelpunkt des Polarkreises.

Um den Radius zu finden, benutzen wir die Formel, welche den Abstand eines Punktes p_a von der Geraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

gibt. Das Quadrat dieses Abstandes ist:

$$\frac{(a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c)^2}{\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha}$$

Nun sei ξ ein Punkt des Polarkreises, dann ist seine Tangente die Gerade:

$$a \cos\alpha\, \xi_a x_a + b \cos\beta\, \xi_b x_b + c \cos\gamma\, \xi_c x_c = 0$$

Für dieselbe ist:

$$\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha = \Sigma a^2 \cos^2\alpha\, \xi_a^2 - 2\Pi \cos\alpha\, \Sigma bc\, \xi_b \xi_c$$

Die Seitennormalen des Höhenschnittes sind: $2r \cos\beta \cos\gamma$, wo r den Radius des Umkreises bezeichnet. Also ist das Quadrat des Halbmessers des Polarkreises der Ausdruck:

$$\frac{4r^2 \Pi \cos^2\alpha\, (\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2\Sigma bc\, \xi_b \xi_c)}{\Sigma a^2 \cos^2\alpha\, \xi_a^2 - 2\Pi \cos\alpha\, \Sigma bc\, \xi_b \xi_c}$$

Der Quotient:

$$\varepsilon = [\Sigma a^2 \cos^2\alpha\, \xi_a^2 - 2\Pi \cos\alpha\, \Sigma bc\, \xi_b \xi_c] : [\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2\Sigma bc\, \xi_b \xi_c]$$

muss von den ξ unabhängig sein; bei der directen Division hat man sonach zu beachten, dass

$$\Sigma a \cos\alpha\, \xi_a^2 = 0$$

Man findet dann:

$$\varepsilon = -\Pi \cos\alpha$$

Die indirecte Rechnung gibt:

$$(\Sigma a^2 \xi_a^2 + 2\Sigma bc\, \xi_b \xi_c) \times -\Pi \cos\alpha$$
$$= -\Pi \cos\alpha\, \Sigma a^2 \xi_a^2 - 2\Pi \cos\alpha\, \Sigma bc\, \xi_b \xi_c$$

Addiren wir rechts den Ausdruck:

$$\frac{F}{r}\Sigma a\cos\alpha\,\xi_a^2 = 0$$

$$= \Sigma\frac{F}{ar}a^2\cos\alpha\,\xi_a^2$$

so erhalten wir:

$$(\Sigma a^2\xi_b\xi_c + 2\Sigma bc\,\xi_b\xi_c)\times - \Pi\cos\alpha$$

$$= -\Pi\cos\alpha\,\Sigma a^2\xi_a^2 + \Sigma(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)a^2\cos\alpha\,\xi_a^2 - 2\Pi\cos\alpha\,\Sigma bc\,\xi_b\xi_c$$

$$= \Sigma a^2\cos^2\alpha\,\xi_a^2 - 2\Pi\cos\alpha\,\Sigma bc\,\xi_b\xi_c$$

Der Radius des Polarkreises ist somit:

$$2r\sqrt{-\Pi\cos\alpha}$$

Daraus, wie aus der Gleichung für den Polarkreis ergibt sich, dass derselbe für ein spitzwinkliges Dreieck imaginär wird.

Wien, November 1877.

XXXII.

Magnetische Influenzversuche.

Von

Ludwig Külp.

---

a) Zur magnetischen Induction weicher Eisenkerne.

Wenn eine unipolare magnetische Intensität durch „Influenz“ Magnetismus in weichem Eisen erregt, so entsteht die Frage: ist die magnetische Intensität an dem Ende des Eisenkernes, welcher nicht mit dem Influenzpole in Berührung steht, gleich gross mit der inducirten magnetischen Intensität, im Falle das weiche Eisen aus einem Stücke oder aus mehreren gleichen Stücken zu gleicher Länge zusammengesetzt wird. Mit Hülfe der „magnetischen Compensationsmethode“ *) stellte ich hierüber Versuche mit prismatischen und runden Eisenstücken an, und brachte meine Resultate in der Tabelle P zur näheren Einsicht.

---

*) Vergl. Poggendorff's Ann. Bd. CXXXIII. u. CXXXV. und Grunert's Archiv. T. 52. u. 53.

Tabelle P.

Abstände der Normal-lamelle in cm.	Abstände der Kernpole in cm.			Relative Intensitäten an den Kernpolen.	
	Zahl der angestossenen Kerne.	An einem Stücke.	Dieselbe Länge in mehreren gleichen Stücken.	An einem Stücke.	Dieselbe Länge in mehreren gleichen Stücken.
Prismatische Eisenkerne.					
33.	0.	46.	—	1,94 m.	—
35,1.	1.	46.	—	1,71 m.	—
37,2.	2.	46.	46.	1,53 m.	1,53 m.
39,3.	3.	46.	46.	1,37 m.	1,37 m.
41,4 u. 41 (4 Stücke).	4.	46.	46.	1,23 m. u. 1,25 m.	1,23 m. u. 1,25 m.
Runde Eisenkerne.					
33.	0.	46.	—	1,94 m.	—
35,5.	1.	46.	—	1,67 m.	—
36,9.	2.	46.	46.	1,54 m.	1,54 m.
39,4.	3.	46.	46.	1,36 m.	1,36 m.
41,6.	4.	46.	46.	1,22 m.	1,22 m.

Unter Beachtung obiger Tabelle ergiebt sich der Schluss:

Werden prismatische oder runde Eisenkerne in einem Stücke oder in mehreren gleichen Stücken zu gleicher Länge an eine unipolare magnetische Intensität angelegt, so ist die magnetische Intensität (der inducirte Magnetismus) am Ende des Eisens, das mit dem Influenzpole nicht in Berührung steht, in beiden Fällen einander gleich.

Doch ist zu bemerken, dass die Kerne, welche zum Anstosse kamen, an ihren Enden gut eben geschliffen wurden.

b) Intensitätsänderungen einer unipolaren nicht gesättigten magnetischen Intensität durch Anlegen von weichem Eisen.

Wenn die Pole eines langen Magnetstabes, welcher magnetisch nicht gesättigt ist, durch Anlegen von weichem Eisen beschäftigt werden, so ist zu untersuchen, welche Aenderungen der eine Pol d. h. seine unipolare magnetische Intensität erleidet, wenn Anlegungen von weichem Eisen stattfinden. Versuche in diesem Sinne habe ich vorgenommen und meine Resultate in der Tabelle Q zusammengestellt.

Tabelle Q.

Die Arten der Beschäftigung durch weiches Eisen.	Abstände des Versuchsstabes in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten des Versuchsstabes.
Beide Pole des Versuchsstabes sind unbeschäftigt.	46.	41,8.	1,21 m.
Der abgekehrte (2te) Pol wird beschäftigt.	46.	40,5.	1,29 m.
Der erste Pol wird allein beschäftigt.	46.	43,7.	1,10 m.
Beide Pole werden beschäftigt.	46.	42,4.	1,17 m.

Die Tabelle liefert nachstehende Schlüsse:

1. Wird der Pol eines langen und ungesättigten Magnetstabes, welcher der Nadel abgekehrt ist, durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität des der Nadel zugekehrten Poles dadurch etwas grösser.

2. Wird auch der Pol, welcher der Nadel zugekehrt ist, nun selbst auf der andern Seite beschäftigt, so wird seine unipolare magnetische Intensität dadurch geringer, und zwar schwächer, als die magnetische Intensität es anfänglich war.

3. Wird alsdann der abgekehrte Pol der Nadel zugleich wieder mitbeschäftigt, so wird die magnetische Intensität des zugekehrten Poles wieder etwas stärker, doch bleibt die Intensität geringer, wie in dem Falle, wenn beide Pole durch weiches Eisen unbeschäftigt sind.

4. Die magnetische Intensität des der Nadel zugekehrten Poles ist am stärksten, wenn der abgekehrte Pol allein durch weiches Eisen beschäftigt wird.

5. Die betreffende magnetische Intensität ist am kleinsten, wenn der der Nadel zugekehrte Pol allein durch Eisen auf der andern Seite beschäftigt wird.

6. Die ursprüngliche magnetische Intensität des Poles (bei keiner Beschäftigung durch weiches Eisen) ist geringer, als die magnetische Intensität, wenn der abgekehrte Pol der Nadel allein, durch weiches Eisen beschäftigt wird.

7. Die magnetische Intensität des Poles, im Falle beide durch weiches Eisen beschäftigt werden, liegt zwischen den magnetischen Intensitäten unter 5. und 6.

---

c) Ueber Intensitätsänderungen des inducirten Magnetismus in weichen Eisenkernen.

Weiter wird untersucht, wie die unipolare magnetische Intensität an dem Ende eines weichen Eisenkernes sich ändert, im Falle Magnetismus durch „Influenz" in demselben erregt, und die Pole des Influenzstabes, entweder nur ein Pol oder beide Pole durch weiches Eisen beschäftigt werden. In diesem Sinne habe ich gleichfalls die kommenden Versuche ausgeführt und die erhaltenen Resultate in der folgenden Tabelle R zusammengestellt.

Tabelle R.

Die Arten der Beschäftigung des Verteilungsstabes.	Abstände des Kernendes in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten an dem Kernende, in dem Magnetismus inducirt wird.
Die Pole des Verteilungsstabes sind unbeschäftigt.	Abstand des Verteilungsstabes. 30.	26,1.	1,32 m.
Die Pole unbeschäftigt; Verteilung findet statt.	30.	31,6.	0,90 m.
Der 2te Pol wird beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	31,2.	0,92 m.
Der 1te Pol (Influenzpol) wird beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	32,9.	0,82 m.
Beide Pole werden beschäftigt; Influenz findet statt.	30.	32,5.	0,85 m.

Die aus vorstehender Tabelle zu ziehenden Schlüsse sind die folgenden:

1. Wirkt der eine Pol magnetisch verteilend (inducirend) auf weiches Eisen, und der andre (2te) Pol wird durch Anlegen von weichem Eisen beschäftigt (d. h. dass er auch magnetisch verteilend wirkt), so wird die magnetische Intensität am Kernende grösser, wie in dem Falle, wenn der 2te Pol unbeschäftigt ist.

2. Wird der Verteilungspol selbst, jedoch auf der andern Seite durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität am Kernende wieder etwas kleiner als unter 1.

3. Werden endlich beide Pole durch weiches Eisen beschäftigt, so wird die magnetische Intensität am Kern ende wieder etwas grösser, und zwar ist die magnetische Intensität alsdann stärker als unter 2.

4. Die magnetischen Intensitäten am Kernende unter 1., 2. und 3. sind jedoch kleiner, als die ursprüngliche magnetische Intensität des Influenzpoles.

5. Von den magnetischen Intensitäten am Kernende unter 1., 2. und 3. ist die magnetische Intensität unter 1. am grössten, und auch noch grösser als die Intensität, wenn der eine Pol des Influenzstabes nur verteilend, der andre (2te) Pol aber unbeschäftigt ist.

---

d) Der inducirte Magnetismus bei zugespitzten Eisenkernen.

Auch möchte ich die Frage beantworten, wie die inducirten magnetischen Intensitäten an den Enden weicher Eisenkerne sich ändern, wenn Magnetismus in denselben inducirt, und die Enden der verschiedenen Eisenkerne nur auf der einen Seite mehr oder weniger zugespitzt werden. Die Resultate meiner Versuche, welche ich gleichfalls in dieser Richtung erhalten, gibt die kommende Tabelle S, doch ist zu bemerken, dass die Spitzen der Kerne stets mit dem Influenzpole in Berührung kamen.

Tabelle S.

Die Arten der Kerne in Bezug der Zuspitzung.	Abstände der Kernenden in cm.	Abstände des Normalstabes in cm.	Intensitäten an den Kernenden.
Kein Konus.	46.	36,1.	1,62 m.
Sehr schwacher Konus an dem einen Ende.	46.	36,2.	1,53 m.
Schwacher Konus.	46.	36,2.	1,53 m.
Starker Konus.	46.	36,3.	1,53 m.
Sehr starker Konus.	46.	36,8.	1,56 m.

Die zu ziehenden Schlüsse sind die folgenden:

1. **Wird in einem weichen Eisenkerne Magnetismus durch eine unipolare magnetische Intensität inducirt, und das Kernende — was den Pol berührt — hat keine Zuspitzung, so ist in diesem Falle die inducirte magnetische Intensität am andern Ende desselben, am grössten.**

2. **Finden Zuspitzungen an den einen Enden der Kerne statt, so sind die magnetischen Intensitäten unter gleichen Umständen etwas kleiner als unter 1. unter sich — wie die Tabelle zeigt — aber gleich.**

3. **Ist dagegen das eine Kernende, das den Pol berührt, eine Spitze, so ist die magnetische Intensität am andern Kernende etwas grösser, wie die inducirte Intensität unter 2., aber kleiner jedoch, wie die magnetische Intensität unter 1.**

XXXIII.

Miscellen.

1.

Producte einiger Factorenreihen.

Ist:

$$\sum_1^n f(x) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+ \dots +f(n-2)+f(n-1)+f(n)$$

so ist:

$$\sum_1^n f(x-1) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n-3)+f(n-2)+f(n-1)$$

also:

$$\sum_1^n f(x) - \sum_1^n f(x-1) = f(n) - f(0)$$

Und weil:

$$\sum_1^n [f(x)-f(x-1)] = [f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]$$
$$+[f(4)-f(3)]+\dots+[f(n-2)-f(n-3)]+[f(n-1)-f(n-2)]$$
$$+[f(n)-f(n-1)] = [f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n)]-[f(0)+f(1)+f(2)$$
$$+\dots+f(n-1)] = \sum_1^n f(x) - \sum_1^n f(x-1)$$

daher:

$$\sum_1^n [f(x)-f(x-1)] = f(n) - f(0) \qquad \text{(I)}$$

Für $n = \infty$

$$\sum_1^\infty [f(x)-f(x-1)] = \lim f(n) - f(0) \qquad \text{(II)}$$

Nach diesen allgemeineren Summenformeln, erhalten wir leicht die Producten der folgenden Factorenreihen:

a) Ist:

$$f(x) = \log\frac{\sin 2^x\alpha}{2^x} \qquad f(n) = \log\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n}$$

$$f(x-1) = \log\frac{\sin 2^{x-1}\alpha}{2^{x-1}} \qquad f(0) = \log\sin\alpha$$

so ist:

$$f(x) - f(x-1) = \log\frac{\sin 2^x\alpha}{2^x} - \log\frac{\sin 2^{x-1}\alpha}{2^{x-1}} = \log\frac{2^{x-1}\sin 2^x\alpha}{2^x\sin 2^{x-1}\alpha}$$

$$= \log\frac{\sin 2^x\alpha}{2\sin 2^{x-1}\alpha} = \log\frac{2\sin 2^{x-1}\alpha\,.\cos 2^{x-1}\alpha}{2\sin 2^{x-1}\alpha} = \log\cos 2^{x-1}\alpha.$$

Die Summirungsformel (I) giebt nun:

$$\sum_1^n \log\cos 2^{x-1}\alpha = \log\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n} - \log\sin\alpha = \log\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}$$

oder:

$$\log\cos\alpha + \log\cos 2\alpha + \log\cos 4\alpha + \log\cos 8\alpha + \ldots$$
$$+ \log\cos 2^{n-1}\alpha = \log\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}$$

daher:

$$\cos\alpha\,.\cos 2\alpha\,.\cos 4\alpha\,.\cos 8\alpha \ldots \cos 2^{n-1}\alpha = \frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha} \qquad (1)$$

Und weil

$$\lim\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n} = 0$$

so ergiebt sich:

$$\cos\alpha\,.\cos 2\alpha\,.\cos 4\alpha\,.\cos 8\alpha \ldots = 0 \qquad (2)$$

b) Setzt man:

$$f(x) = \log 2^x\sin\frac{\alpha}{2^x} \qquad f(n) = \log 2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}$$

$$f(x-1) = \log 2^{x-1}\sin\frac{\alpha}{2^{x-1}} \qquad f(0) = \log\sin\alpha$$

so ist:

$$f(x) - f(x-1) = \log 2^x\sin\frac{\alpha}{2^x} - \log 2^{x-1}\sin\frac{\alpha}{2^{x-1}} = \log\frac{2^x\sin\frac{\alpha}{2^x}}{2^{x-1}\sin\frac{\alpha}{2^{x-1}}}$$

$$= \log\frac{2\sin\frac{\alpha}{2^x}}{\sin\frac{\alpha}{2^{x-1}}} = \log\frac{2\sin\frac{\alpha}{2^x}}{2\sin\frac{\alpha}{2^x}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^x}} = -\log\cos\frac{\alpha}{2^x} = \log\sec\frac{\alpha}{2^x}$$

Wendet man die Summirungsformel (I) an, so erhält man:

$$\sum_1^n \log\cos\frac{\alpha}{2^x} = -\sum_1^n \log\sec\frac{\alpha}{2^x} = \log\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

das ist:

$$\log\cos\frac{\alpha}{2}+\log\cos\frac{\alpha}{4}+\log\cos\frac{\alpha}{8}+\ldots+\log\cos\frac{\alpha}{2^n} = \log\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

$$\log\sec\frac{\alpha}{2}+\log\sec\frac{\alpha}{4}+\log\sec\frac{\alpha}{8}+\ldots+\log\sec\frac{\alpha}{2^n} = \log\frac{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\alpha}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\cos\frac{\alpha}{16}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}\\ \sec\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\alpha}{4}\cdot\sec\frac{\alpha}{8}\cdot\ \text{ec}\frac{\alpha}{16}\ldots\sec\frac{\alpha}{2^n} &= \frac{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Es ist aber für $n=\infty$

$$\lim\left[2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}\right] = \alpha\lim\left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}\right] = \alpha$$

also:

$$\log\cos\frac{\alpha}{2}+\log\cos\frac{\alpha}{4}+\log\cos\frac{\alpha}{8}+\ldots = \sum_1^\infty\log\cos\frac{\alpha}{2^x} = \log\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\log\sec\frac{\alpha}{2}+\log\sec\frac{\alpha}{4}+\log\sec\frac{\alpha}{8}+\ldots+\sum_1^\infty\log\sec\frac{\alpha}{2^x} = \log\frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\cos\frac{\alpha}{16}\ldots &= \frac{\sin\alpha}{\alpha}\\ \sec\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\alpha}{4}\cdot\sec\frac{\alpha}{8}\cdot\sec\frac{\alpha}{16}\ldots &= \frac{\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Für $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$\log\cos\frac{\pi}{4}+\log\cos\frac{\pi}{8}+\log\cos\frac{\pi}{16}+\ldots = \sum_1^\infty\log\cos\frac{\pi}{2^{x-1}} = \log\frac{2}{\pi}$$

$$\log\sec\frac{\pi}{4}+\log\sec\frac{\pi}{8}+\log\sec\frac{\pi}{16}+\dots=\sum_1^{\infty}\log\sec\frac{\pi}{2^{x-1}}=\log\frac{\pi}{2}$$

welche zur Berechnung der Zahl π, dienen kann.

Diese Reihen kann man auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\dots&=\frac{2}{\pi}\\ \sec\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{8}\sec\frac{\pi}{16}\cdot\sec\frac{\pi}{32}\dots&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

c) Man setze:

$$f(x)=\frac{\log[2\sin 2^x\alpha]}{2^{x-1}}\qquad\Big|\qquad f(n)=\frac{\log[2\sin 2^n\alpha]}{2^{n-1}}=\log\sqrt[2^{n-1}]{2\sin 2^n\alpha}$$

$$f(x-1)=\frac{\log[2\sin 2^{x-1}\alpha]}{2^{x-2}}\qquad\Big|\qquad f(0)=\frac{\log[2\sin\alpha]}{2^{-1}}=\log[2\sin\alpha]^2$$

so ist:

$$f(x)-f(x-1)=\frac{\log[2\sin 2^x\alpha]}{2^{x-1}}-\frac{\log[2\sin 2^{x-1}\alpha]}{2^{x-2}}$$

$$=\frac{\log[2\sin2^x\alpha]-2\log[2\sin2^{x-1}\alpha]}{2^{x-1}}=-\frac{\log[2\sin2^{x-1}\alpha]^2-\log[2\sin2^x\alpha]}{2^{x-1}}$$

$$=-\frac{\log\dfrac{[2\sin2^{x-1}\alpha]^2}{2\sin2^x\alpha}}{2^{x-1}}=-\frac{\log\dfrac{[2\sin2^{x-1}\alpha]^2}{2\sin2^{x-1}\alpha.\cos2^{x-1}\alpha}}{2^{x-1}}=-\frac{\log\dfrac{\sin2^{x-1}\alpha}{\cos2^{x-1}\alpha}}{2^{x-1}}$$

$$=-\frac{\log\operatorname{tang}2^{x-1}\alpha}{2^{x-1}}=-\log\sqrt[2^{x-1}]{\operatorname{tang}2^{x-1}\alpha}$$

Die Summirungsformel (I), giebt nun:

$$\sum_1^n\log\sqrt[2^{x-1}]{\operatorname{tang}2^{x-1}\alpha}=\log[2\sin\alpha]^2-\log\sqrt[2^{n-1}]{2\sin2^n\alpha}=\log\frac{[2\sin\alpha]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{2\sin2^n\alpha}}.$$

$$\log\operatorname{tang}\alpha+\tfrac{1}{2}\log\operatorname{tang}2\alpha+\tfrac{1}{4}\log\operatorname{tang}4\alpha+\tfrac{1}{8}\log\operatorname{tang}8\alpha+\dots$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\log\operatorname{tang}2^{n-1}\alpha=\log\frac{[2\sin\alpha]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{2\sin2^n\alpha}}$$

oder:

$$[\operatorname{tang}\alpha]\cdot\sqrt{\operatorname{tang}2\alpha}\cdot\sqrt[4]{\operatorname{tang}8\alpha}\dots\sqrt[2^{n-1}]{\operatorname{tang}2^{n-1}\alpha}=\frac{[2\sin\alpha]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{2\sin2^n\alpha}}\qquad(6)$$

Der Nenner dieses Ausdrucks lässt sich in folgender Reihe entwickeln:

$$\sqrt[2^{n-1}]{\sin 2^n\alpha} = \sqrt[2^n]{1-[\cos 2^n\alpha]^2} = 1 - \frac{1}{2^n}[\cos 2^n\alpha]^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{1.2}[\cos 2^n\alpha]^4 - \frac{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{1.2.3}[\cos 2^n\alpha]^6 + \dots$$

und für $n = \infty$

$$\lim \sqrt[2^{n-1}]{\sin 2^n\alpha} = 1$$

so ist auch:

$$\lim \sqrt[2^{n-1}]{2 \sin 2^n\alpha} = \lim 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \sqrt[2^{n-1}]{\sin 2^n\alpha} = 1$$

daher:

$$\log \operatorname{tang} \alpha + \tfrac{1}{2}\log \operatorname{tang} 2\alpha + \tfrac{1}{4}\log \operatorname{tang} 4\alpha + \tfrac{1}{8}\log \operatorname{tang} 8\alpha + \dots = \log[2\sin\alpha]^2$$

oder:

$$[\operatorname{tang}\alpha] \cdot \sqrt{\operatorname{tang} 2\alpha} \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tang} 4\alpha} \cdot \sqrt[8]{\operatorname{tang} 8\alpha} \dots = [2\sin\alpha]^2 \qquad (7)$$

G. Dobiński,
Techniker der Warschau-Bromberger Eisenbahn.

Kutno, d. 7. Febr. 1877.

2.

Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationalen Brüchen.

Die Aufgabe ist, die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \qquad (1)$$

durch ganze Zahlen x, y, z, u zu erfüllen. Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 = (u+z)(u-z)$$

so zeigt sich, dass $u+z$ und $u-z$ Factoren von x^2+y^2 sind. Nun ist bekannt, dass eine Quadratsumme x^2+y^2 ausser gemeinsamen

Factoren von x und y keinen Factor von der Form $4n-1$ haben kann. Jeder gemeinsame Primfactor von x und y ist aber in gerader Potenz in x^2+y^2 enthalten, folglich gleichzeitig in gerader oder gleichzeitig in ungerader Potenz in $u+z$ und $u-z$; die niedrigere Potenz steckt dann in $u+z$ und $u-z$, also in x, y, z und u, so dass sich Gl. (1) durch deren Quadrat dividiren lässt. Nach geschehener Reduction haben dann $u+z$ und $u-z$ Factoren $4n-1$ nur in gerader Potenz.

Es ist ferner bekannt, dass jede Zahl, die Primfactoren $4n-1$ nur in gerader Potenz enthält, eine Summe zweier Quadrate ist; folglich kann man setzen:

$$u+z = a^2+b^2; \quad u-z = c^2+d^2$$

Dies eingeführt giebt:

$$x^2+y^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

und man hat die Lösung:

$$\begin{aligned} x &= ac+bd \\ y &= ad-bc \\ z &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) \\ u &= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{aligned}$$

wo 3 der Grössen a, b, c, d alle ganzen Zahlen, die vierte teils die geraden, teils die ungeraden Zahlen zu durchlaufen hat, damit alle möglichen Wertsysteme von x, y, z, u darin enthalten sind. Die Frage nach den identischen Lösungen und deren Ausschliessung bleibt natürlich offen.

R. Hoppe.

3.

Bestimmung der Vielecke durch die Winkel zwischen Seiten und Diagonalen.

§. 1. Zählung der Winkelrelationen.

Zieht man in einem $n$eck alle Diagonalen, so gehen von jeder Ecke aus $n-1$ Gerade, welche

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

mit einander bilden. Es entstehen also an den Ecken

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

Von den Winkeln an einer Ecke sind nur $n-2$ von einander unabhängig, daher existiren an jeder Ecke zwischen den Winkeln

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-(n-2) = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ lineare Relationen,}$$

an allen Ecken

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3) \text{ lineare Relationen.} \qquad (1)$$

Je 3 Ecken des Vielecks sind die Ecken eines besondern Dreiecks, folglich entstehen

$$\tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{ Dreiecke.}$$

In jedem Dreieck existirt 1 lineare Relation zwischen den Winkeln, in allen Dreiecken

$$\tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{ lineare Relationen.}$$

Diese zu den an den einzelnen Ecken stattfindenden (1) gezählt giebt

$$\tfrac{1}{3}n(n-2)(2n-5) \text{ lineare Relationen,}$$

ausser welchen keine weiteren existiren.

Unter ihnen mögen m Relationen Folge der übrigen sein. Dann bleiben nach Elimination mittelst aller linearen Relationen

$$\{m-\tfrac{1}{6}n(n-2)(n-7)\} \text{ Winkel} \qquad (2)$$

die durch keine lineare Relation von einander abhangen.

Dieselbe Zahl lässt sich auf anderem Wege bestimmen. Das Vieleck ist bestimmt, wenn die von 2 benachbarten Ecken ausgehenden Geraden nach ihren Neigungen gegen die verbindende Seite gegeben sind. Diese

$$2(n-2) \text{ Winkel} \qquad (3)$$

sind offenbar von einander unabhängig. Mittelst linearer Relationen lassen sich aus ihnen alle von diesen Geraden gebildeten Winkel finden, dagegen kein einziger Winkel, welcher einen in vorstehender Figur nicht enthaltenen Schenkel hat. Jeder solche Schenkel wird durch 1 Winkel bestimmt. Nun sind sämmtliche in diesem Falle befindliche Linien die Verbindungen der $n-2$ übrigen Ecken; folglich sind

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Winkel} \qquad (4)$$

durch nicht lineare Relationen bestimmt.

Zählt man hierzu die unabhängigen Winkel (3), so giebt es

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Winkel,}$$

die durch keine lineare Relation von einander abhangen, und man hat nach Vergleichung mit (2):

$$m = \tfrac{1}{6}n(n-2)(n-7) + \tfrac{1}{2}(n+1)(n-2) = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

Es hat sich ergeben:

Unabhängig sind

$$2(n-2) \text{ Winkel.}$$

Durch sie sind alle

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) \text{ Winkel}$$

bestimmt. Hierzu sind

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n^2-n-4) \text{ Relationen}$$

erforderlich, unter denen

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Relationen} \tag{4}$$

nicht linear, die übrigen

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n^2-2n-1) \text{ Relationen}$$

linear sind. Unter den linearen giebt es

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3) \text{ Relationen}$$

zwischen Winkeln mit gemeinsamem Scheitel; die übrigen

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ Relationen}$$

sind Relationen zwischen Dreieckswinkeln. Dreiecksrelationen giebt es überhaupt

$$\tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

unter denen

$$\tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \text{ Relationen}$$

Folgen der übrigen sind.

§. 2. Transcendente Vierecksrelation.

Nach (4) existirt beim Viereck zwischen den bezeichneten Winkeln 1 nicht lineare Relation. Im Vieleck aber bildet jede Gerade, deren Richtung durch lineare Relationen nicht bestimmbar ist, mit 3 Geraden, deren Richtungen es sind, ein Viereck. Folglich reicht jene eine nicht lineare Relation, angewandt auf alle solche Vierecke, zur Bestimmung aller Winkel hin. Wir wollen sie die Vierecksrelation nennen und demnächst berechnen.

In einem Viereck $ABCD$ seien α, β, γ, δ die Cotangenten der Winkel an der Diagonale $AC = 1$, α', β', γ', δ' an der andern (die Winkel selbst bezeichnet durch (α), (β), etc.), geordnet wie folgt

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & a & \alpha\beta & b & \\ D & \alpha' & \varkappa & \beta' & B \\ & \gamma' & \varkappa & \delta' & \\ & c & \gamma\delta & d & \\ & & C & & \end{array}$$

ferner a, b, c, d die Seiten, $\varkappa$ die Cotangente des Winkels zwischen beiden Diagonalen, und wir betrachten alle Winkel als bestimmt durch die 4 unabhängigen α, β, γ, δ. Die Beziehungen sind sämmtlich einfach, sobald der Wert von $\varkappa$ bekannt ist. Man hat:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\beta')}{\sin(\alpha')}=\frac{\sin(\varkappa-\beta)}{\sin(\varkappa+\alpha)}=\frac{\beta-\varkappa}{\alpha+\varkappa}\,\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

$$a=\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{1}{[\alpha+\gamma]\sin(\alpha)};\quad b=\frac{\sin(\delta)}{\sin(\beta+\delta)}=\frac{1}{[\beta+\delta]\sin(\beta)}$$

also nach Elimination von a und b:

$$\frac{\beta-\varkappa}{\alpha+\varkappa}=\frac{\beta+\delta}{\alpha+\gamma}$$

woraus:

$$\varkappa=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \tag{5}$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha')=2\mathrm{R}-[(\varkappa)+(\alpha)];\quad(\beta')=(\varkappa)-(\beta)\\(\gamma')=(\varkappa)-(\gamma);\quad(\delta')=2\mathrm{R}-[(\varkappa)+(\delta)]\end{array}\right\} \tag{6}$$

Nachdem also $(\varkappa)$ allein transcendent durch (5) bestimmt ist, ergeben sich alle Winkel linear.

Um ebenso wie $\varkappa$ auch α', β', γ', δ' rational in α, β, γ, δ darzustellen, gewinnt man aus (6):

$$\alpha'=\frac{1-\varkappa\alpha}{\alpha+\varkappa};\quad\beta'=\frac{1+\varkappa\beta}{\beta-\varkappa}$$

$$\gamma'=\frac{1+\varkappa\gamma}{\gamma-\varkappa};\quad\delta'=\frac{1-\varkappa\delta}{\delta+\varkappa}$$

Bei umgekehrter Darstellung von α, β, γ, δ in α', β', γ', δ' geht nur $\varkappa$ in $-\varkappa$ über, die Lage der gleichbenannten Winkel in der Figur ist aber verschieden.

§. 3. Anwendung auf das Vieleck.

Beim Viereck war es für die Symmetrie und in mancher andern Beziehung die günstigste Wahl, die Winkel an einer Diagonale als

gegeben zu betrachten. Ein gleiches lässt sich beim Vieleck nicht durchführen, ohne dass die Einfachheit der Bestimmungen verloren geht. Kehren wir daher zur Anordnung von §. 1. zurück.

In dem Vieleck $ABCDE\ldots$ bezeichne die Reihenfolge der Buchstaben die positive Richtung der Seiten und Diagonalen. Die Winkel an den Ecken A und B seien gegeben, der erste Schenkel sei gemeinsam AB und die Verlängerung über B hinaus bzhw. für die Scheitel A und B, der zweite gehe vom Scheitel in positiver Richtung nach den respectiven übrigen Ecken. Im convexen Vieleck sind dann alle Winkel positiv und $< 2R$.

Wir verbinden nun AB mit allen Seiten und Diagonalen des $(n-2)$ecks $CDE\ldots$ zu ebensovielen Vierecken. Das erste Viereck wird $ABCD$ sein. Die Bestimmung über die Winkel bei C und D ist dann die gleiche wie bzhw. bei A und B. Ebenso bei den übrigen Vierecken.

Ferner verlängern wir alle jene Vierecks-Gegenseiten von AB bis zum Durchschnitt mit dem verlängerten AB in N und führen die daselbst gebildeten Winkel (λ), deren erster Schenkel AB ist, die demnach von 0 bis 4R (oder von 0 bis 2R, dann von $-2R$ bis 0) variiren, als Hülfswinkel ein.

Diese veränderte Bestimmung erfordert eine Modification der Formeln von §. 2., welche deren Form bestehen lässt und nur einige Vorzeichen der Cotangenten, bedingt durch die Lage der Winkel, deren manche durch ihre Nebenwinkel ersetzt werden, beeinflusst. Die Formeln würden sich durch eine blosse Substitution dem Zwecke gemäss unmittelbar transformiren lassen; doch würde dieser hinsichtlich algebraischer Rechnung kürzere Weg doch wegen complicirter Vorzeichenfragen der schwierigere sein. Wir ziehen es deshalb vor die Gl. (5) algebraisch nach λ aufzulösen.

Die Winkel, welche AC, AD, BC, BD mit der Richtung AB machen, seien (ε), (ζ), (η), (ϑ), diejenigen, welche CA, CB, DA, DB mit der Richtung CD machen, (ε'), (ζ'), (η'), (ϑ'). Dann ist identisch (als sich deckend oder als Nebenwinkel)

$$\begin{aligned}
(\alpha) &= (\zeta)-(\varepsilon) & \qquad (\alpha') &= (\vartheta')-(\eta') \\
(\beta) &= (\varepsilon) & (\beta') &= 2R-(\vartheta) \\
(\gamma) &= (\varepsilon') & (\gamma') &= 2R-(\vartheta') \\
(\delta) &= (\zeta')-(\varepsilon') & (\delta') &= (\vartheta)-(\eta)
\end{aligned}$$

und als Dreiecksinnen- oder -aussenwinkel

$$(\varkappa) = 2R + (\varepsilon) - (\vartheta)$$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda) &= 2R+(\varepsilon)-(\varepsilon') = 2R+(\eta)-(\zeta') \\ &= 2R+(\zeta)-(\eta') = 2R+(\vartheta)-(\vartheta')\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus nach Elimination von ε', ζ';

$$(\gamma) = 2R+(\varepsilon)-(\lambda)$$
$$(\delta) = (\eta)-(\varepsilon)$$

daher, übergehend zu den Cotangenten:

$$\alpha = \frac{\varepsilon\zeta+1}{\varepsilon-\zeta}; \quad \beta = \varepsilon; \quad \gamma = \frac{\varepsilon\lambda+1}{\lambda-\varepsilon}; \quad \delta = \frac{\varepsilon\eta+1}{\varepsilon-\eta}$$

$$\varkappa = \frac{\varepsilon\vartheta+1}{\vartheta-\varepsilon}$$

Führt man diese Werte in (5) ein und löst die nach Reduction in λ lineare Gleichung auf, so kommt:

$$\lambda = \frac{\varepsilon\vartheta-\zeta\eta}{\varepsilon-\zeta-\eta+\vartheta}$$

In dieser Form lässt sich die transcendente Viereckrelation nun leicht auf alle $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Vierecke anwenden, indem man bloss die Ecken C, D einzeln mit den übrigen D, E, F ... vertauscht. Sind sämmtliche (λ) bekannt, so ergeben die Gl. (7) linear alle $2(n-2)(n-3)$ durch die gegebenen $2(n-2)$ Winkel mitbestimmten Winkel, welche nicht unmittelbar mit ihnen linear verbunden waren. Der Fall $\frac{1}{\lambda} = 0$ macht keine Schwierigkeit. R. Hoppe.

4.

Ein neuer Satz von den Kegelschnitten.

Fällt man von den Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel Perpendikel auf die Tangenten dieser Curven, so ist bekanntlich ihr Product constant. Dieser Satz lässt sich wie folgt erweitern:

1. „Wählt man auf der Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel zwei Punkte, deren Abstände vom Mittelpunkte der Curve resp. $=+u$ und $-u$ sind, und fällt man von denselben Senkrechte auf eine beliebige Tangente, so ist stets

$$u^2(k+l)^2 - c^2(k-l)^2 = 4b^2u^2$$

wobei k, l die erwähnten Senkrechten, $2c$ die Excentricität und $2b$ die Nebenaxe des Kegelschnitts bezeichnen."

2. „Ebenso findet man für zwei Punkte der Nebenaxe, deren Abstände vom Mittelpunkte wieder $= + u$ und $- u$ sind, dass

$$u^2(k+l)^2 + c^2(k-l)^2 = 4a^2u^2$$

ist, wobei $2a$ die Hauptaxe ist."

Wählt man auf der Nebenaxe zwei Punkte, welche denselben Abstand vom Mittelpunkte haben, wie die Brennpunkte, d. h. wenn wir $u = c$ annehmen, so erhalten wir

$$k + l^2 = 2a^2$$

d. i.: „die Summe der Quadrate der von diesen Punkten auf die Tangente gefällten Senkrechten ist eine constante Grösse."

Anton Sýkora.

5.

Summation zweier Reihen.

Die Summation der Reihen

$$S = \sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin[\varphi+(n-1)\alpha]$$
$$C = \cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos[\varphi+(n-1)\alpha]$$

geschieht am einfachsten, wenn man die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ (oder auch umgekehrt) multiplicirt, und die Producte addirt und subtrahirt. Man findet dadurch

$$S\cos\alpha + C\sin\alpha = \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin(\varphi+n\alpha)$$
$$S\cos\alpha - C\sin\alpha = \sin(\varphi-\alpha) + \sin\varphi + \ldots + \sin[\varphi+(n-2)\alpha]$$

oder

$$S\cos\alpha + C\sin\alpha = S + \sin(\varphi+n\alpha) - \sin\varphi$$
$$S\cos\alpha - C\sin\alpha = S - \sin[\varphi+(n-1)\alpha] + \sin(\varphi-\alpha)$$

oder

$$S(1-\cos\alpha) - C\sin\alpha = \sin\varphi - \sin(\varphi+n\alpha)$$
$$S(1-\cos\alpha) + C\sin\alpha = \sin[\varphi+(n-1)\alpha] - \sin(\varphi-\alpha)$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man wieder addirt und subtrahirt, nach einfacher Reduction

$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$C = \frac{\cos\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Anton Sýkora.

6.

Zerlegung einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate.

Setzt man in die identische Gleichung

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

m, n statt $x+y$, $x-y$, so erhält man

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass eine Zahl in die Differenz zweier Quadrate zerlegt werden kann, wenn sie sich in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren auflösen lässt; denn alsdann sind $m+n$, $m-n$ gerade, und $\frac{m+n}{2}$, $\frac{m-n}{2}$ ganze Zahlen.

Z. B.

$$15 = 3.5 = \left(\frac{3+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5-3}{2}\right)^2 = 4^2 - 1^2$$

$$40 = 4.10 = \left(\frac{10+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 7^2 - 3^2$$

Daraus ergiebt sich, dass jede ungerade Zahl in die Differenz zweier Quadrate aufgelöst werden kann, da man die Zahl selbst als den einen, die Einheit als den zweiten ungeraden Factor derselben ansehen kann.

$$7 = 7.1 = \left(\frac{7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-1}{2}\right)^2 = 4^2 - 3^2$$

Dasselbe gilt auch von jeder durch 4 teilbaren Zahl, indem dieselbe die Zerfällung in zwei gerade Factoren gestattet.

Obige Gleichung (A) liefert alle möglichen Zerlegungen einer Zahl in die Differenz zweier Quadrate, wenn man dieselbe auf alle möglichen Arten in zwei Factoren zerfällt, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Denn wenn eine Zahl die Auflösung in die Differenz zweier Quadrate $x^2 - y^2$ gestattet, so ist dieselbe auch gleich $(x+y)(x-y)$; da aber die Factoren $x+y$, $x-y$ entweder beide gerade, oder beide ungerade sind, so entspricht dieser Auflösung in die Differenz zweier Quadrate eine Zerlegung in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren, und dieser umgekehrt jene, da $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Die Zahl $420 = 2.210 = 6.70 = 10.42 = 14.30$ z. B. bietet also nur folgende Zerlegungen in die Differenz zweier Quadrate:

$$420 = 106^2 - 104^2, \quad = 38^2 - 32^2, \quad = 26^2 - 16^2, \quad = 22^2 - 8^2.$$

Gleichzeitig ergiebt sich, dass eine Zahl, die durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, in die Differenz zweier Quadrate nicht zerlegt werden kann, da dieselbe eine Zerlegung in zwei gerade oder zwei ungerade Factoren nicht gestattet.

Anton Sýkora.

7.

Neue Ableitung der Pythagoräischen Lehrsätze.

Die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke ABC, ADC und DBC welche entstehen, wenn man in dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC die Senkrechte CD auf die Hypotenuse fällt, gestatten eine doppelte Vergleichung.

Erstens verhalten sich diese Flächeninhalte wie die Quadrate der homologen Seiten AB, AC, BC, d. h. es ist

$$\text{Fl.}: ABC : ADC : DBC = AB^2 : AC^2 : BC^2.$$

Zweitens haben diese Dreiecke gleiche Höhe, wenn wir resp. AB, AD, DB als ihre Grundlinien ansehen; deshalb ist auch

$$\text{Fl.}: ABC : ADC : DBC = AB : AD : DB$$

und somit

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 = AB : AD : DB$$

daher

$$\text{I.} \ldots \quad AB : AC = AC : AD \quad \text{und} \quad AB : BC = BC : DB$$

Die Flächen der kleineren zwei Dreiecke gestatten aber noch folgende Vergleichungen:

$$ADC : DBC = AD^2 : DC^3 \quad \text{(oder auch} \quad = DC^2 : DB^2)$$

so wie auch

$$ADC : DBC = AD : DB,$$

woraus sich

$$AD^2 : DC^2 = AD : DB$$

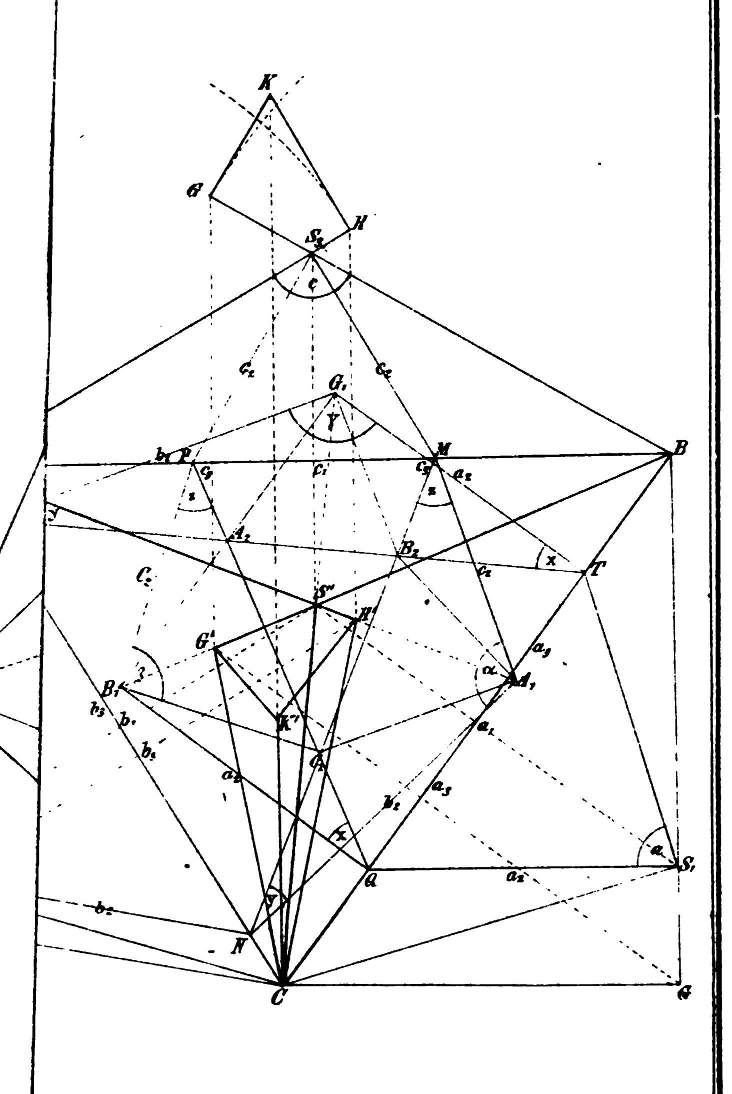
oder

$$\text{II.} \ldots\ldots\ldots\ldots \; AD : DC = DC : DB$$

ergiebt.

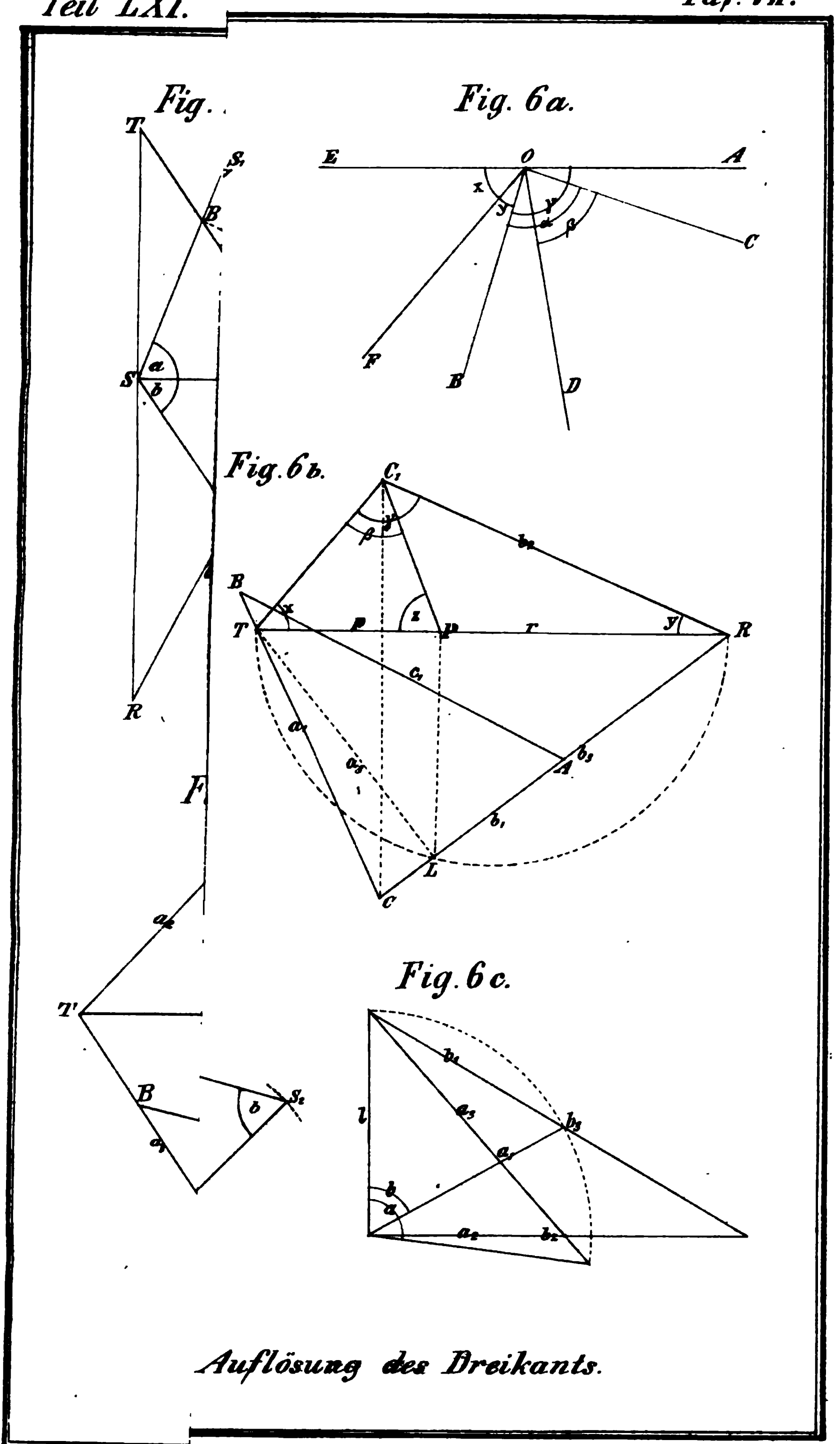
Anton Sýkora.

Fig. 1b.



...de zur Auflösung des Dreikants.

Steindruckerei von F.W. Kunike, Greifswald



Auflösung des Dreikants.

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

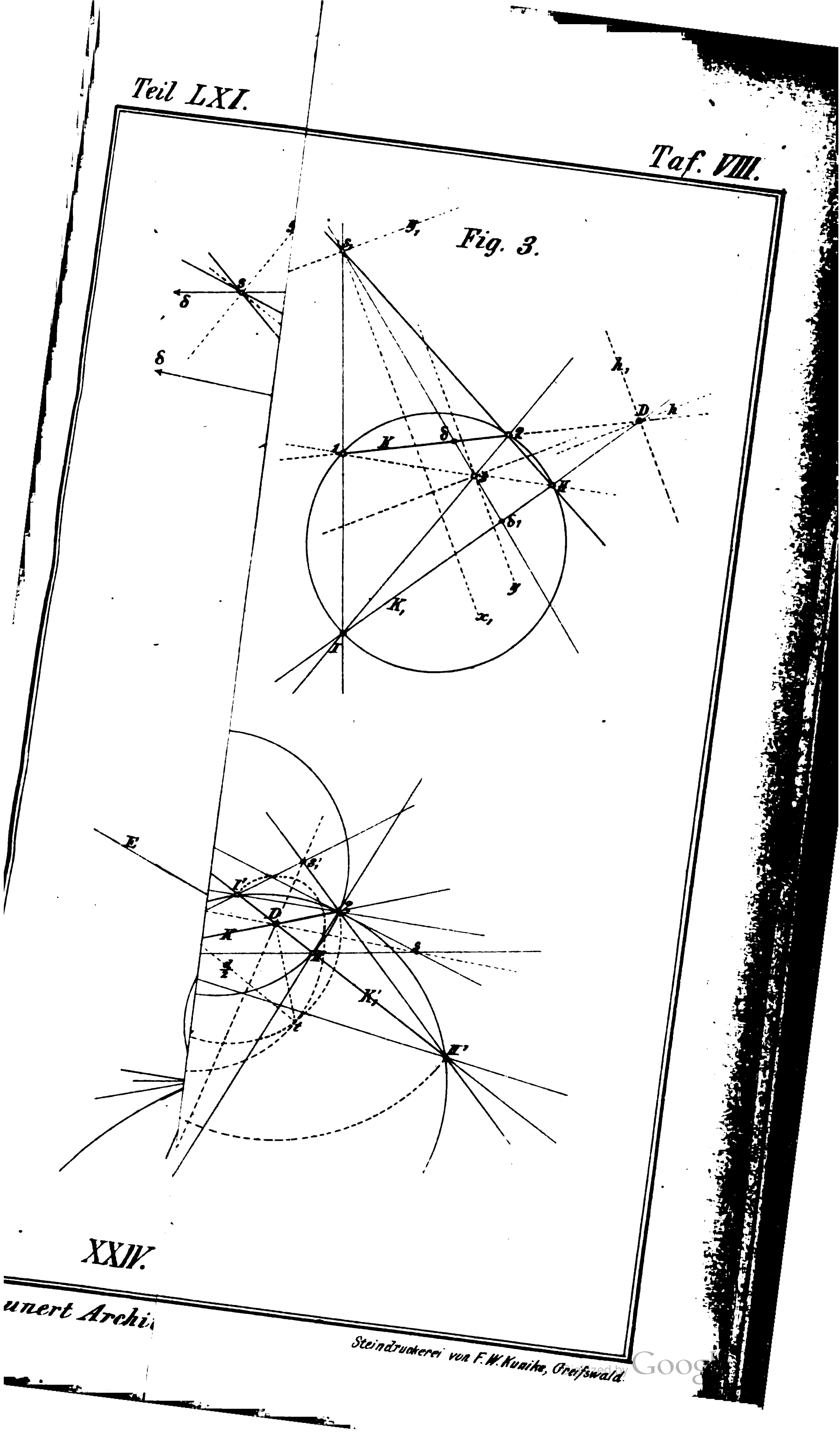

Fig. 3.
XXIV.
unert Archi
Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

Fig. 1.

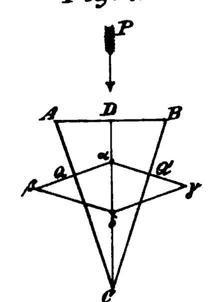


Fig. 2.

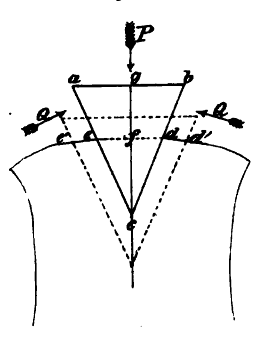
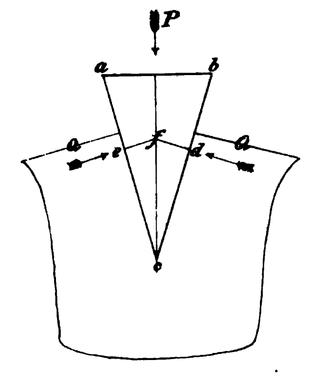


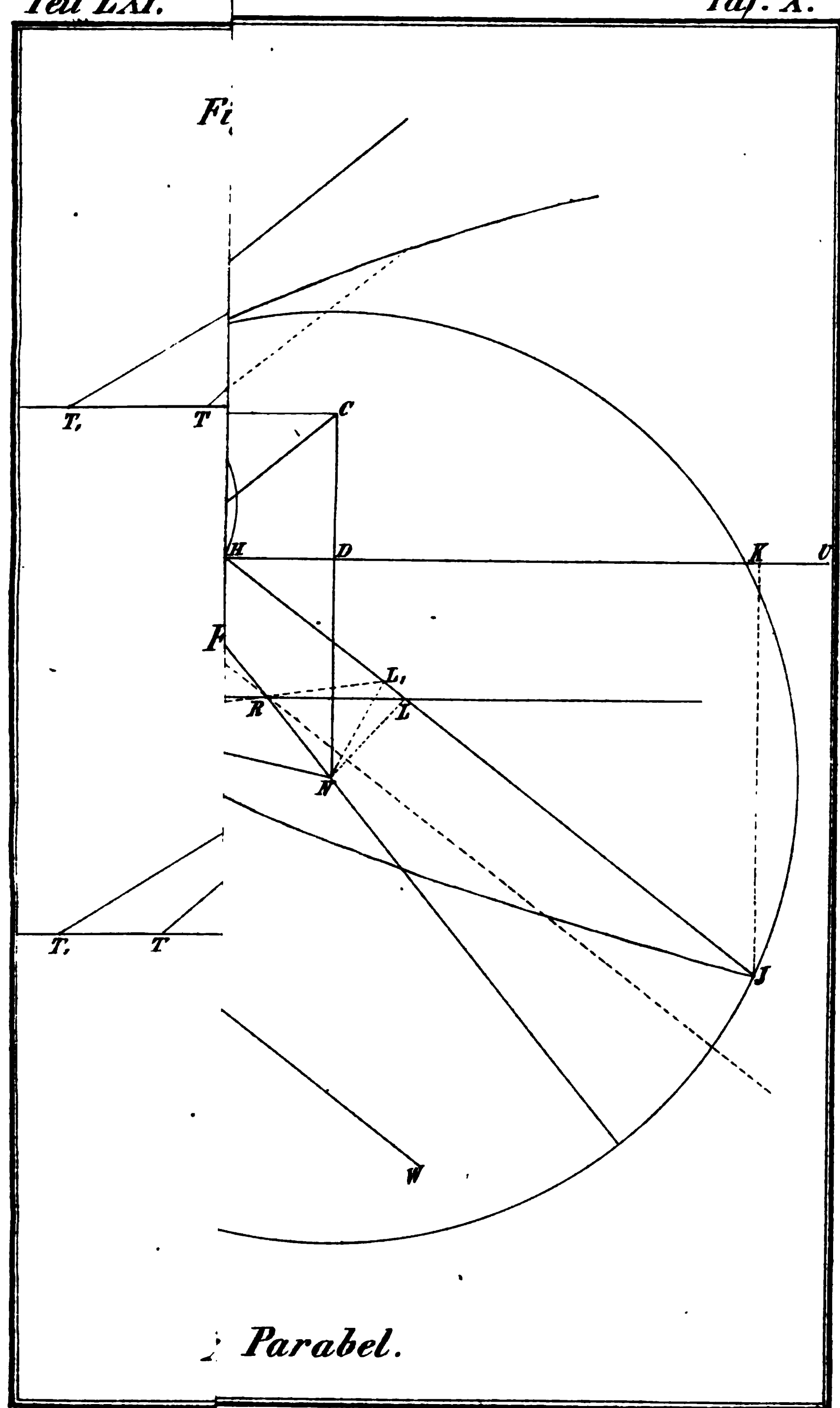
Fig. 3.



XXIII. Meutzner:

Zur Theorie des Keils.

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.



Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Litterarischer Bericht

CCXLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo IX. Roma 1876. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender.

7. Heft. G. B. Biadego. Ueber das Leben und die Schriften des Gianfrancesco Malfatti, Mathematikers des 18. Jahrhunderts. Verzeichniss seiner und der auf das Malfatti'sche Problem bezüglichen Arbeiten, 67 ungedruckte Briefe von ihm an Anton-Maria Lorgna (unvollendet).

8. Heft. Fortsetzung der Briefe an Lorgna, 9 fernere an Cav. Ab. Girolamo Tiraboschi, und 4 an verschiedene Personen.

9. Heft. Alfonso Sparagna. Italienische Uebersetzung von Moritz Cantor's Schrift: Gottfried Friedlein. Nekrolog. B. Boncompagni. Verzeichniss von Friedlein's Arbeiten. O. Abria und J. Hoüel. Notiz über das Leben und die Arbeiten von Victor-Amédée Le Besge nebst Verzeichniss seiner Arbeiten und einer von ihm selbst redigirten Notiz über die hauptsächlichsten derselben, V. A. Le Besge. Bemerkungen zu den Schriften von Léonard de Pise.

10. Heft. Moritz Steinschneider. Des jüdischen Astronomen Prophatius in Montpellier aus Marseille (u. J. 1300) Vorrede zum astronomischen Kalender, bisher ungedruckt, aus zwei alten Ueber-

setzungen (deren eine auch interpolirt) nebst hebräischem Text zum erstenmal herausgegeben und mit eigener wörtlicher lateinischer Uebersetzung versehen.

11. Heft. C. E. Sédillot. Brief an D. B. Boncompagni über das Leben und die Arbeiten von Louis-Amélie Sédillot. B. Boncompagni. Verzeichniss seiner Arbeiten.

12. Heft. Moritz Cantor. Ueber die Nationalität des Copernicus, ins Italienische übersetzt von Alfonso Sparagna.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft.

Besonders herausgegeben ist der Nekrolog von Gottfried Friedlein. H.

Caroline Herschel's Memoiren und Briefwechsel. (1750—1848.) Herausgegeben von Frau John Herschel. Aus dem Englischen von A. Scheibe. Autorisirte Uebersetzung. Mit Caroline Herschel's Portrait. Berlin 1877. Wilhelm Hertz. 364 S.

Das Buch enthält chronologisch geordnete Documente zur Lebensgeschichte der drei um die Fortschritte der Astronomie hauptsächlich verdienten Familienglieder Wilhelm, seiner Schwester Caroline und seines Sohnes John, nur in wenigen Stellen ergänzt und verbunden durch die Erzählung der Herausgeberin. Charakteristisch für die Aufzeichnungen sowol als für die Briefe Caroline's, letztere wenigstens in der ersten Hälfte, ist es, dass man darin nur fertige *Tatsachen* findet, während die Wege, auf denen so Ausserordentliches *hat* zustande gebracht werden können, mit keinem Worte erwähnt werden. Nachdem wir Wilhelm bis S. 36 ausschliesslich als Musiker kennen gelernt haben, seine Zeit anscheinend völlig durch musikalische Veranstaltungen in Beschlag genommen, folgt unmittelbar die Errichtung des 18füssigen Spiegelteleskops, bei welcher er als vollendeter Astronom, Optiker, Constructeur und Baukundiger auftritt, die von ihm zugezogenen zahlreichen Techniker und Arbeiter beaufsichtigend, deren Leistungen er sehr ungenügend findet und mit eigner Hand ergänzen muss. Einleitend erwähnt zwar hier die verbindende Erzählung seines Interesses an der Astronomie, doch giebt auch diese keinen Aufschluss, wo er die Ausbildung so eminenter, alles Frühere überragender Fähigkeiten in so mannichfacher Beziehung gewonnen hat. Der nun folgende, die Lebenszeit Wilhelm's umfassende Abschnitt, und zwar mehr die Briefe als das Tagebuch, lässt erkennen, welchen Anteil die Schwester an seinen Arbeiten hatte. Ausser Handdiensten fielen ihr zu Aufzeichnungen und Berechnungen seiner Beobachtungen

sowie deren Fortsetzung in seiner Abwesenheit, Arbeiten an den von Flamsteed vorliegenden, von Herschel fortgesetzten Katalogen der Fixsterne und Nebel, Aufsuchung und Verfolgung der Kometen. Bei dieser Beschäftigung hatte sie das Glück unter 8 von ihr neu entdeckten, teilweise auch hier näher beschriebenen Kometen denjenigen bei seiner zweiten Erscheinung zu entdecken, welchen nachher bei vierter Erscheinung Encke identificirte. In einem weit befriedigenderem Zusammenhange steht der nachherige Briefwechsel Caroline's mit ihrem Neffen John, welcher einen steten Einblick in die Tätigkeit des letzteren, die Erlebnisse beider und ihre Verhältnisse zu den Fachgenossen und gelehrten Gesellschaften gestattet. Ihre eigne litterarische Tätigkeit aus dieser Zeit beschränkt sich auf Vollendung des Begonnenen. Das Ganze umfasst die Lebenszeit Caroline's, d. i. die Geschichte eines Zeitraums von fast 100 Jahren.

Geschichte des Princips der kleinsten Action. Akademische Antrittsvorlesung von Dr. Adolph Mayer, a. o. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Leipzig 1877. Veit u. C. 31 S.

An der Entdeckung und Gestaltung des Princips sind, soweit die Schrift es erwähnt, beteiligt Euler, Dan. Bernoulli, Maupertuis, König, d'Arcy, Lagrange, Jos. Bertrand und Jacobi, ob Leibnitz bleibt zweifelhaft. Der Vortrag beginnt mit der definitiven Aufstellung nach Jacobi bezüglich auf ein Massensystem. Euler ist der Entdecker des Princips, jedoch in dessen Beschränkung auf einen Punkt. Dem Maupertuis bestreitet der Verfasser Verdienste um die Fortbildung, und schreibt ihm vielmehr Entstellung durch Einführung vieler Willkür zu. König kritisirt ihn und behauptet die Priorität von Leibnitz; Euler erkennt Maupertuis in dessen präsumtiver höherer Leistung an und tritt in jenem Streit auf seine Seite; Hauptgrund war, dass ihm der täuschende aprioristische Schein imponirte. Hiergegen richtet sich Bernoulli's Streben. Lagrange fasst das Princip allgemeiner, doch vermag der Verfasser dessen Aufstellung, welche den Worten nach sinnlos sei, nur auf eine Art zu interpretiren, derzufolge eine Verwechselung mit dem Hamilton'schen Princip vorliege. Im gesammten Hergang sind also manche Punkte der Unklarheit enthalten; die Geschichte hat an deren Beleuchtung eine würdige Aufgabe zu lösen. H.

Die römischen Grundsteuervermessungen. Nach dem lateinischen Texte des gromatischen Codex, insbesondere des Hyginus, Frontinus und Nipsus bearbeitet von E. Stoeber, Königl. Bayerischem Bezirksgeometer. Mit einem Vorwort von Dr. C. M. v. Bauernfeind. München 1877. Theodor Ackermann. 149 S.

Das Vorliegende ist vor dem Erscheinen des Werks von Cantor über die römischen Agrimensoren bearbeitet, also ohne Bezugnahme auf dasselbe. Bauernfeind findet den Unterschied zwischen den Gesichtspunkten beider, dass es in jenem darauf ankam zu zeigen, woher die römischen Geometer ihre geodätischen Kenntnisse erhalten, und wie sich dieselben bis in das Mittelalter fortgepflanzt haben, dass es dagegen vornehmster Zweck des Gegenwärtigen sei, neben einer kurzen Darlegung des Entwickelungsgangs der praktischen Geometrie bis auf die Zeit der römischen Kaiser eine vollständige Uebersicht der römischen Grundsteuervermessungen, deren Regelung eben jenen Agrimensoren oder Gromatikern anvertraut war, zu geben. In der Einleitung wird die geometrische Praxis der alten Aegypter und Griechen in Aegypten, dann der Römer, im Dienste des Staats, erörtert, die Messinstrumente beschrieben und die in Lachmann's Ausgabe des gromatischen Codex enthaltenen 17 Schriften aufgeführt. Die 2 ersten Capitel handeln vom römischen Landgebiet, dem Verfahren bei Colonisirung der eroberten Länder und der Vermarkung, das dritte von den römischen Agrimensoren und ihren Instrumenten; das vierte beschreibt ausführlicher die Messungsmethoden; der Gegenstand des letzten ist das Steuerwesen der Römer. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königlichen Gymnasium in Hof. München 1876. Theodor Ackermann. 114 S.

Der Umfang des Lehrbuchs entspricht dem gesammten Pensum der Gymnasien. In Erfüllung der logischen Anforderungen ist es in vielfacher Hinsicht mangelhaft, doch bleibt auch bei Absehen von der Strenge mancherlei an der Behandlungsweise auszusetzen. Der Anfang macht durch einen einfachen, concinnen, wolgeordneten Vortrag bei klarer Auffassung einen guten Eindruck; um so greller stechen dagegen die häufigen handgreiflichen und leicht zu verbessernden Unrichtigkeiten ab. So wird z. B. „algebraische Summe“ so definirt, dass der Schüler $a-b$ für die Summe von a und b halten muss. Die Methode ist die rein arithmetische; die Erweiterung des Zahlengebiets wird erwähnt, jedoch nicht hinreichend zur Deutlichkeit gebracht; von ihren Consequenzen ist gar nicht die Rede. Von der Inversion der Operationen wird kein Gebrauch gemacht, vielmehr der Subtraction, Division und Radicirung durch gesonderte Betrachtung er-

klärt, die der einfachen Auffassung im Wege steht, und die Bedeutung der Division nur einseitig zu erkennen giebt. In den späteren Abschnitten gleichen die allgemeinen Erläuterungen mehr und mehr dem Vortrag eines Gelehrten, welcher dem Standpunkt des Anfängers so fern steht, dass er nicht zu beurteilen vermag, was dem Schüler vor allem zu wissen notwendig ist. Die wichtigsten Erklärungen sind unzureichend und verstecken sich hinter vielem Ueberflüssigen. Nach allem ist das Buch weder pädagogisch noch wissenschaftlich betrachtet zu empfehlen. H.

Lehrbuch der besondern Arithmetik für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule zu St. Petersburg. Dorpat 1876. G. Hässel. 116 S.

Das Buch ist eine Anweisung zum bürgerlichen Rechnen, welches sich auf Zins-, Disconto-, Termin-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung erstreckt. Die Erläuterungen sind sorgfältig ohne jedoch auf einen Einblick in die Gründe des Verfahrens gerichtet zu sein; dagegen ist für die Anschauung manches anerkennenswerte getan, z. B. durch die Darstellung der Brühe in geteilten Linien. Da sich ein beträchtlicher Teil des Buchs mit den russischen Massen, Gewichten u. s. w. und den darauf bezüglichen Reductionen beschäftigt, so ist natürlich an eine Verwendung in Schulen anderer Länder nicht zu denken. H.

Lehrbuch der Algebra für Industrie- und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht. Von Johannes Orelli, Professor am eidgenössischen Polytechnikum. Dritte, umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage in 2 Theilen. Zürich 1877. Caesar Schmidt. 304 S.

Der Vortrag ist ein erläuternder mit unbegrenzter Freigebigkeit an Worten; dabei wird jedoch die Orientirung durch vorgängige Disposition und nachfolgende Formulirung des Resultats nicht versäumt, und selbst der Wortüberfluss ist geeignet die Auffassung leicht zu machen, wozu auch die beständige Begleitung mit ausgeführten Beispielen viel beiträgt. Bei der grossen Langsamkeit des Fortschritts war es natürlich möglich auf manche nützliche Dinge näher einzugehen, welche Lehrbücher von kleinerem Umfang bei Seite

lassen müssen; dies ist jedoch in den 4 ersten Abschnitten, welche die Operationen behandeln, nur in sehr geringem Masse geschehen. Wo die Division der Polynome so ausführlich erörtert wird, konnte auch ausser der Erniedrigung der höchsten Potenz die zur Zerfällung in Partialbrüche gebrauchte Erhöhung der niedrigsten, die Auffindung des gemeinsamen Teilers, die Addition der Brüche mit polynomischen Nennern und manches damit verbundene gezeigt werden, was von praktischer Anwendung ist. Auch zu reiferer Begriffsentwickelung, z. B. in Bezug auf Multiplication entgegengesetzter Grössen, war durch die Ausführlichkeit der Besprechung reichlich Gelegenheit geboten. Doch ist wenigstens anzuerkennen, dass das Aufgestellte correct und nirgends irreleitend ist. Die Behandlung der Gleichungen zeichnet sich durch Sorgfalt aus. Es sind die Determinanten und die unendlichen Grössen in den Kreis der Erörterung gezogen, und zum Ansatz von Aufgaben, sowie zur Beurteilung ihrer Bestimmtheit eine recht eingehende Anweisung erteilt. Die Determinantenlehre leitet durch specielle Beobachtung ein, doch ist die nachherige allgemeine Theorie davon unabhängig erhalten. Die Besprechung der unendlichen Grössen überspringt, sehr zum Nachteil der Deutlichkeit, die Begriffserklärung und ermangelt infolge dessen fester Principien, wenn gleich das Aufgestellte an sich correct ist. Die Lehre von den Gleichungen schliesst mit dem 2. Grad; es folgen dann noch 4 Abschnitte: Sätze über Zahlen und Wurzelgrössen, Theorie der Logarithmen, arithmetische und geometrische Progressionen, Kettenbrüche. Imaginäre Grössen werden im 1. Teil nur bei den Gleichungen 2. Grades, und nur ganz kurz besprochen.

Der 2. Teil enthält, was man sonst wol algebraische Analysis nennt, die unbestimmte Analytik, die Combinationslehre, den binomischen Satz, die Lehre von Functionen, Grenzwerten und incommensurablen Zahlen, von imaginären Zahlen, die Auflösung der Gleichungen 3. Grades, die Lehre von den unendlichen Reihen und von den höhern Gleichungen. Der Vortrag zeichnet sich, sehr im Gegensatz zu einer gewissen viel beliebten Oberflächlichkeit, aus durch eine Darstellungsweise, welche bei strenger Beobachtung exacter Forderungen doch das Verstehen leicht macht. Der 4. Abschnitt giebt einen Teil einer Infinitesimaltheorie, welcher wesentliche Fortschritte im Vergleich mit den früheren nachlässigen Methoden, aber auch noch manche Ueberbleibsel derselben zeigt. Das Unendlichkleine ist correct als Variabele erklärt; aber warum musste erst der Grenzwert mit Anwendung des (freilich nicht so genannten) Unendlichkleinen, dann wieder dieses durch jenen definirt werden? Wichtiger ist das Fehlen des Hauptsatzes: Zwei Constante sind gleich, wenn sie von einer Variabeln unendlich wenig differiren. Dieser Mangel äussert sich sehr

bemerklich bei Erklärung der incommensurablen Zahlen. Hier wird aufgestellt: Wir wollen 2 incommensurabele Grössen gleich nennen, wenn ihr Unterschied nachweisbar kleiner ist als jede noch so kleine angebbare Zahl. Dies ist nun eine offenbare Verwechselung der variabelen, commensurabeln Zahl, d. i. des unendlichen Decimalbruchs, mit deren Grenzwert; denn nur letzterer ist incommensurabel, und nur erstere kann unendlich wenig differiren. Der obige Hauptsatz schlichtet die Verwirrung in einfachster Weise. Auch die Erklärung des Functionsbegriffs ist mangelhaft: es fehlt die Bedingung, dass der Functionswert durch den Argumentwert bestimmt sei; das erste Beispiel, das in der Tat unrichtig ist, zeigt, dass der Mangel nicht bloss in den Worten, sondern auch im Gedanken liegt. Vortrefflich ist die Methode und Darstellungsweise des letzten Abschnitts.

H.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra mit mehr als 1500 Uebungsaufgaben. Zum Gebrauch an Seminarien und höheren Lehranstalten, wie auch für den Selbstunterricht bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Erster Theil: Die vier Species mit der Bruchrechnung, Verhältnisse und Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. Höhere Gleichungen, welche auf die Form einer quadratischen Gleichung gebracht werden können. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Neu-Ruppin 1877. Rud. Petrenz. 248 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durch Vollständigkeit und Sorgfalt aus. Von ersterer überzeugt sich nicht allein der Kundige, sofern er keinen für ein umfassendes Studium wichtigen Punkt übergangen findet, sondern es wird auch durch ausführliche Discussionen dem Lernenden das Bewusstsein davon erteilt. Die Discussionen sind jedoch das Einzige, worin der Vortrag der Lehren keinen Raum spart; in jeder andern Beziehung ist er angemessen kurz gefasst. Die Sorgfalt ist geübt in der streng logischen Auffassung und dem correcten und leicht verständlichen Ausdruck. Hierbei muss man vom Anfang des Buchs absehen, welcher nur als Anknüpfung an Bekanntes zu betrachten ist. Im einzelnen sind folgende Ausstellungen zu machen. S. 32. steht der unrichtige Satz: „Die Null multiplicirt nicht". Das würde heissen, den Factor 0 könnte man beliebig hinzufügen oder weglassen. — Der Ausdruck „indirecte Operationen" (von Subtraction Division gesagt) und „indirecte Verhältnisse" ist ungeeignet; nicht die Operation, sondern die gewählte Erklärungsmethode ist indirect (warum nicht „inverse, umgekehrte"?) — Bei den Proportionen kommen Quadratwurzeln in Anwendung, die erst im spätern Abschnitt

erklärt werden. — Bei den Gleichungen werden zu Anfang identische und analytische nominell unterschieden, sachlich ergiebt sich nachher kein Unterschied. — Die sog. englische und französische Eliminationsmethode sind genau dieselbe, nur ist bei ersterer das Verfahren den Multiplicator zu finden hier verschwiegen. Gleichwol werden beide nicht nur als verschieden aufgeführt, sogar die erstere, mangelhafte, für Anfänger empfohlen. — Die genannten Punkte sind im Vergleich zum Ganzen geringfügig, gegen dessen Vortrefflichkeit sie verschwinden. Die neue Auflage unterscheidet sich extensiv durch Hinzunahme der trigonometrischen Auflösung der quadratischen Gleichungen, der Lösung höherer Gleichungen, die auf quadratische zurückführbar sind, und des verkürzten Verfahrens der Wurzelausziehung, sowie durch Vermehrung der Aufgaben. Den Aufgaben gehen stets durchgerechnete Beispiele voraus. Die Anweisung zum Ansatz der Gleichungen ist die für den denkenden Schüler selbstverständliche, kunstlose; es ist sehr zu billigen, dass das unumwundene Aussprechen der Regel eine solche Auffassung in natürlicher Einfachheit zum Ziele nimmt.

H.

Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie. Von Dr. Carl Heinze, Vorsteher eines Militair-Bildungsinstituts und Städtischem Lehrer. Einleitung zu der von demselben Verfasser und in demselben Verlage erschienenen „Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch“. Berlin 1876. Friedberg u. Mode. 24. S.

Die Elementar-Geometrie, für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. Carl Heinze, Vorsteher eines Militair-Bildungsinstituts und städtischem Lehrer. Mit Figuren auf 4 Tafeln. Berlin 1877. Friedberg u. Mode. 74 S.

Die „kritische Beleuchtung“ nennt der Verfasser eine nur aus dem Grunde, um den neuen Elementen Eingang zu verschaffen, versuchte und darum abgedrungene. In der Tat ist sie nichts weiter als eine Bemängelung der Wortfassung, aber nicht einmal der Euklidschen, sondern zum grössten Teil der in neuern Autoren angetroffenen. Sachlich ist allein die Behauptung, die Congruenz durch Deckung zu erklären sei unmöglich, was ziemlich einseitig erörtert wird. Die letztere Schrift bietet weder dem Bericht noch der Kritik einen nennenswerten Gegenstand dar. Im Vorwort wird die Euklid'sche Methode gelästert, die versprochene gelobt ohne beide zu kennzeichnen. In der Ausführung ist von Methode keine Spur; der Verfasser giebt sich nicht die Mühe, auch nur den Anschein der vorher gepriesenen Vorzüge zu wecken. Eine Probe der Unklarheit giebt der Anfang (überschrieben „Lehrsatz“, gewöhnlich nennt man's „Er-

klärung"): „Der Ort, in welchem ein allmälig abnehmendes Ding aufhört Raum einzunehmen, ist der geometrische Punkt". Was dem weiter hinzugefügt wird, dient nur dazu die Verwirrung zu vermehren.

H.

Geometrische Anschauungslehre. Eine Vorschule und Ergänzung der reinen Geometrie mit 600 Fragen und Aufgaben. Von Dr. E. Kretschmer, Oberlehrer am Kgl. Friedr.-Wilh.-Gymn. zu Posen. Posen 1877. Joseph Jolowicz. 62 S.

Von diesem Buche lässt sich sagen, dass, was es sein will, es auch ganz ist. Die Idee einer instructiven, zweckgemässen Beschäftigung der Kinder mit Gegenständen der theoretischen und praktischen Geometrie mit Ausschluss der zwei logischen Tätigkeiten, Begriffsbestimmung und Schlussfolgerung, ist hier in voller Reinheit verwirklicht. Was sie üben, ist Darstellung der Gebilde, deren Beobachtung hauptsächlich in qualitativer Beziehung und Rechenschaft über dieselbe. Sie werden dadurch äusserlich vertraut mit der Welt, in welcher sie später beim Betreiben der exacten Geometrie zu leben haben, und lernen die Namen, vorläufig als Merkzeichen, kennen. Beachtung der Quantitäten findet nur in sehr engen Grenzen statt, von Winkeln werden, abgesehen von den letzten Abschnitten, nur rechte zugezogen, wiederholt aber auf die Gleichheit von Längen hingewiesen; hieran knüpft sich die Lehre vom Messen, welche besonders ausführlich auf das Feldmessen eingeht. H.

Die Elemente der Mathematik für Seminarien und Mittelschulen. Von Martin Schneider, ordentlichem Lehrer am herzoglichen Lehrerseminar zu Cöthen. Erster Theil: Planimetrie. Cöthen 1877. Otto Schulze. 128 S.

Das Lehrbuch nimmt Bezug auf einen Vorcursus des Anschauungsunterrichts. Zu Anfang jedes Abschnitts werden die Ergebnisse desselben geordnet aufgestellt. Diese werden dann, gleichsam ais Axiome, zum Ausgangspunkt der Argumentation genommen. Blieb es hierbei unausgesprochen, dass unbewiesene Sätze definitive Gültigkeit haben sollen, so hätte der stillschweigende Uebergang zur Argumentation wenigstens nicht zum verhüllten Trugschluss benutzt werden sollen, wie es namentlich hier beim Parallelensatz geschieht. Correcterweise musste dieser schon im Vorcursus enthalten sein, wenn die Auffassung des Winkels als Richtungsunterschied Ergebniss sein sollte. Es musste vorher ausführlich die Transponibilität der Figuren erst one, dann mit Stellungsänderung gelehrt werden; dann erst hatte der Richtungsunterschied einen Sinn; dann aber waren auch alle Parallelensätze

gleichzeitiges Resultat der Beobachtung. Das Vorliegende verkehrt den Zusammenhang und baut einen Scheinbeweis auf einen unerklärten Begriff. Es ist noch zu erwähnen, dass jedem Abschnitt zahlreiche leichte Aufgaben beigefügt sind, und ein besonderer Abschnitt die rechnende Geometrie behandelt. H.

Lehrbuch der Physik. Von Peter Münch, Director der Realschule erster Ordnung zu Münster. Mit 301 in den Text gedruckten Abbildungen und einer Spectraltafel in Farbendruck. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit einem Anhange: Die Grundlehren der Chemie. Freiburg im Breisgau 1876. Herder. 339 S.

Vierte, verbesserte Auflage 1877.

Die zweite Auflage ist im litt. Ber. 217. besprochen. Die Vermehrung, mit welcher die gegenwärtige erscheint, besteht in der Spectraltafel und dem Anhang über Chemie, letzterer bestimmt für Gymnasien und solche Anstalten, in deren Lehrplan ein systematischer Unterricht in der Chemie nicht aufgenommen ist. Wenn ausserdem die Vorrede eine nicht unerhebliche Anzahl von Verbesserungen und kleineren Zusätzen ankündigt, so sind erstere entschieden wesentliche zu nennen. Der Vortrag ist jetzt ein gründlich durchgearbeiteter; er führt namentlich bei Beginn der Behandlung des einzelnen Themas sofort zur exacten Auffassung der Hauptpunkte. Was über Mängel in der 2. Auflage im Bericht gesagt ist, hat auf die dritte keine Anwendung. Es lässt sich das Lehrbuch jetzt zu den empfehlenswertesten für Gymnasien zählen. — Die vierte Auflage ist bis auf wenige kleine Aenderungen, z. B. Abkürzung der Deduction der Wellenbewegung, übereinstimmend. H.

Grundriss der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Im Auftrage der Königlichen Kommission für gewerbliche Fortbildungsschulen in Württemberg ausgearbeitet von Dr. Ludwig Blum, Professor an der K. Realanstalt in Stuttgart. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 99 Abbildungen in Holzschnitt. Leipzig und Heidelberg 1876. C. F. Winter. 155 S. kl. 8⁰.

Dies kleine Buch giebt in gedrängter Kürze aus den Lehren der Physik das Notwendigste zur Ausbildung für gewerbliche Berufszweige. Den grössten Teil macht die Mechanik aus, doch begreift es auch Schall, Wärme, Elektricität nebst Magnetismus und Galvanismus, sowie einiges über das Licht. Die technische Verwendung ist stets mit theoretischen Vortrag in unmittelbarem Anschluss. Die allgemeinen Erklärungen sind grossenteils sehr ungenügend; oft nichts weiter als

Namenaufstellung mit Hinweisung auf die Erscheinung ohne Bezeichnung der Punkte, in welchen die Auffassung stattfinden muss. So ist z. B. die Erklärung von specifischem und absolutem Gewicht derart, dass gar kein Unterschied daraus erhellt. Weit besser sind die Zusammenstellungen von Gesetzen; diese zeichnen sich sogar vor manchen Lehrbüchern durch correcte Fassung aus; letzteres gilt insbesondere von den allgemeinen Bewegungsgesetzen, nur hätte hier, zur Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden, der Fall der Nichtbewegung infolge der Reibung nicht fehlen dürfen. Im ganzen lässt sich das Buch als vielfach besserungsfähig bezeichnen. H.

Lehrbuch der Physik. Einschliesslich der Physik des Himmels (Himmelskunde), der Luft (Meteorologie) und der Erde (Physikalische Geographie). Gemäss der neueren Anschauung für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten bearbeitet von Professor Dr. Paul Reis, Gymnasiallehrer in Mainz. Dritte, stark vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 276 in den Text gedruckten Holzschnitten und 829 Aufgaben nebst Lösungen. Leipzig 1876. Quandt u. Händel. 740 S.

In diesem Lehrbuch ist keine Methode vorwaltend, vielmehr von allen Methoden der beste Gebrauch gemacht um den physikalischen Unterricht so ergiebig als möglich werden zu lassen. Als erster Gesichtspunkt zeigt sich überall die Orientirung in der Erscheinung und deren Gesetzen. Die Begründung hat sich das Lehrbuch nicht zur allgemeinen Vorschrift genommen, wol aber alle aus dem Schulunterricht zu Gebote stehenden Mittel der elementaren Rechnung und der leichteren Experimente in Anwendung gebracht, welche zur Begründung beitragen können. Demgemäss kommt keine Differential- und Integralrechnung vor, doch ist auch kein Versuch gemacht, umständliche algebraische Deductionen an deren Stelle zu setzen, vielmehr genügt, wo kein einfacher bündiger Beweis möglich ist, die Erläuterung des Sachverhalts. Ein solches Verfahren begegnet einer nicht unbedeutenden Schwierigkeit. Das Lehrbuch unternimmt es alle Theorien auf neuestem Standpunkte vorzutragen. Hierdurch wird der Schüler mit ausgedehnten Gebieten bekannt gemacht, auf denen noch in unzähligen Punkten grosse Ungewissheit herrscht, wo aber für ihn alle Fähigkeit der Controle längst aufgehört hat. Unter diesen Umständen ist es nicht leicht eine unklare und irreleitende Mischung von halbreifen Ideen fernzuhalten, welche allen Zweck des Unterrichts zunichte macht. Der Verfasser hat es aber verstanden in solchen Theorien die Hauptsache derart in den Vordergrund zu stellen und denjenigen Lehren, welche wol als sicher gelten dürfen, soviel instructive Seiten abzugewinnen, dass die ungewissen Punkte

als unerheblich dagegen verschwinden. Die exacte Fassung der Grundbegriffe und Grundlehren, namentlich in der Mechanik, ist zufriedenstellend, wenn auch die Möglichkeit einer Verbesserung im einzelnen nicht ausgeschlossen sein soll; jedenfalls zeichnet sie sich im Vergleich mit den meisten Lehrbüchern aus. Hervorzuheben ist noch, dass jede Gelegenheit zu Uebungsaufgaben reichlich benutzt wird. H.

Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Von Dr. Johann Robert Boymann, Professor am Königlichen Gymnasium zu Coblenz. Mit 305 in den Text eingedruckten Holzschnitten und einer Spectraltafel. Dritte, verbesserte Auflage. Köln und Neuss 1877. L. Schwann. 442 S.

Nach der Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Körper folgt hier zuerst die Chemie, dann die Mechanik, die Lehre vom Magnetismus, der Elektricität, dem Schall, dem Licht und der Wärme. Der Vortrag ist ein ziemlich trockener, der zum technischen Ausdruck der Lehren wenig hinzutut. Obwol erhebliche Ausstellungen nicht zu machen sind, so ist doch auch andrerseits kein rechter pädagogischer Gedanke, kein Bestreben zum klaren Verständniss und zur exacten Auffassung hinzuführen, darin zu erkennen, und die im Ganzen enthaltene methodische Arbeit eben nicht gross. Es macht vielmehr den Eindruck, als ob die Erörterung jedes Punktes nur der Erfüllung gegebener Vorschrift dienen, nichts was etwa gefordert werden könnte vermissen lassen solle. Eine solche Bedeutung scheinen namentlich die zahlreichen Beweise (wenn man sie so nennen darf) zu haben, die, da sie grossenteils nicht streng bündig, ziemlich zwecklos in pädagogischer Hinsicht sind. Geradezu unrichtig ist z. B. die Deduction der Gesetze der Centralbewegung mit Statuirung einer Tangentialkraft, da ja die Centralanziehung als einzig wirkende Kraft angenommen war. H.

Elementarbuch der Physik. Von Dr. R. Caspar, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Bonn. Freiburg i. Br. 1876. Herder. 225 S.

Der Verfasser bestimmt das Buch, ohne den Gebrauch an Schulen auszuschliessen, zunächst und hauptsächlich für den Selbstunterricht von Lesern ohne besondere mathematische Vorbildung, die es ohne feste Aufmerksamkeit, ohne selbsteigenes Nachdenken sollen gebrauchen können. Es wird deshalb nicht bloss auf die höhere Analysis, sondern auch auf die Trigonometrie nirgends Bezug genommen, und nur Addition und Multiplication in einfachster Gestalt in Anwendung gebracht. Dass man mit so beschränkten Hülfsmitteln bei gehörigem Geschick

eine wirkliche, richtige Naturerklärung in ziemlichem Umfang geben kann, ist bekannt und durch manche Bearbeitungen dargetan. Eine solche liess sich nach den im Vorwort entwickelten Grundsätzen erwarten; auch entspricht dem der Anfang des Buchs. Doch weiterhin zeigt sich bald, dass der Verfasser es bequemer gefunden hat, auf vulgäre Vorstellungen zu bauen als zu belehren und aufzuklären. Schon auf Seite 15. statuirt er 2 Arten von Kräften, solche die momentan, und solche die in der Zeit wirken; die Wahrheit dass alle Kräfte in der Zeit wirken, die momentane Wirkung, also auch die Wirkung unendlich vieler momentaner Impulse null ist, bleibt ganz verschwiegen, und selbst die dauernde Wirkung wird als aus wiederholten Impulsen bestehend dargestellt. Das heisst, der Verfasser sucht denjenigen Laien zu dienen, die in der Erklärung nicht die Reduction auf einfache, durchschauliche, sondern auf geläufige, unentwickelte Vorstellung suchen. Wo eine solche, aus den Irrtümern der Menge Vorteil ziehende Praktik sichtbar wird, brauchen wir nicht von andern Fehlern, z. B. dass nach dem (ungeschickt gewählten) Wortlaut der Schwerpunkt ein beliebiger Punkt im Körper ist, zu reden. H.

Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Von Fr. Jos. Pisko, Director der Staatsrealschule in Sechshaus bei Wien. Vierte, verbesserte und theilweise umgearbeitete Auflage. Mit 377 im Texte aufgenommenen Holzschnitten. Brünn 1877. Carl Winiker. 453 S.

Das Lehrbuch geht etwas reichlicher auf die quantitativen Elemente ein und bietet dadurch dem Schüler Gelegenheit zur Selbsttätigkeit; nur ist es mit sehr geringer Sorgfalt bearbeitet: Fehler wie der auf Seite 72., wo der Schwerpunktsbegriff ohne Rücksicht auf Lagenänderung des Körpers erörtert wird, als ob er schon durch das Gleichgewicht der Schwere in einer Lage bestimmt wäre, kommen häufig vor. Gleichwie hier werden oft die notwendigen Bestimmungen erst einzeln im weitern Verlauf hinzugebracht und zwar ohne orientirende Hinweisung, so dass man aus vielen Stellen zusammensuchen muss, was gleich aufangs hätte vollständig gesagt werden können. Ganz besonders gilt dies von den Aufstellungen in Betreff der Kräfte. Manche (z. B. Reis s. oben) haben es einen nicht abzuändernden Uebelstand genannt, dass „Kraft" in so verschiedenem Sinne gesagt wird. Natürlich ist es nur die Schuld des einzelnen Schriftstellers oder Lehrers, wenn er den Misbrauch nachahmt, und Effect und animalische Kraft, d. i. Effect in der Zeiteinheit, mit Zug und Druck, dem allein der Name Kraft zukommt, gleich benennt; denn wir besitzen die unterscheidenden Wörter. Allein der Hauptgrund des Mis-

brauchs liegt wol darin, dass die unklare Begriffsmischung denen eine Handhabe bietet, welche ihre Deductionen mehr auf leichte Zustimmung als auf Evidenz einrichten. Wieweit ein solches Motiv im Vorliegenden zugrunde liegt, mag unentschieden bleiben. Die Begriffe werden factisch in Vermischung gehalten; der Verfasser sorgt im einzelnen dafür, dass er dem Urteil entgeht, etwas falsches gesagt zu haben, er sorgt aber nicht dafür, dass der Schüler richtig scheiden und die Beweise controliren lernt. Bei Herleitung der Gesetze der Centralbewegung wird sogar der Schüler zu der falschen Meinung verleitet, das Parallelogramm der Kräfte gelte auch vom Stosse. Der Kundige sieht freilich aus dem Folgenden, dass im Grunde nur Bewegungen, nicht Kräfte zusammengesetzt werden. Das Ganze ist sehr entfernt ein Muster von Methode abzugeben. H.

Chemische Erscheinungen. Ein Anhang zu A. Trappe's Schul-Physik. Bearbeitet von Dr. Gustav Stenzel, Oberlehrer an der Realschule am Zwinger zu Breslau. Mit 8 in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau. Ferdinand Hirt. 36 S.

Das Buch von Trappe, dessen Anhang das Gegenwärtige bilden soll, ist im 236. litt. Ber. besprochen. Es werden die wichtigsten 34 einfachen Stoffe, anfangend mit Wasserstoff, Chlor, Sauerstoff, aufgeführt, von jedem die Haupteigenschaften genannt, beim Sauerstoff die Lehre von den Verbindungen erörtert und eine kleine Anzahl von Versuchen angegeben. Die Bestimmung ist daher wol nur den Schülern eine vorläufige Vorstellung von den Gegenständen der Chemie zu verschaffen. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1872. 28. Jhg. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 14 Mk. 25 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 7. Bd. J. 1875. 2. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 20 Pf.

Wittstein, K., Gedächtnissrede auf Carl Friedrich Gauss, zur Feier d. 30. April 1877. 8. Hannover, Hahn. 40 Pf.

Methoden und Principien.

Erdmann, B., d. Axiome d. Geometrie. 8. Leipzig, Voss. 4 Mk. 80 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., method.-geordnete Aufgabensammlg., mehr als 8000 Aufg. enth., üb. alle Theile der Elementar-Arithmetik. 6. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Frischauf, J., Tafeln z. Berechng. barometr. Höhenmessgn. 8. Wien, Hölder. 60 Pf.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitf. d. Elementar-Mathematik. 3 Thle. 8. Berlin, Simion. à 1 Mk. 25 Pf.

Lübsen, H. B., ausführl. Lehrb. d. Analysis zum Selbstunterr. m. Rücksicht auf die Zwecke d. prakt. Lebens. 7. Afl. 8. Leipzig, Brandstetter. 3 Mk. 60 Pf.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl. 4. Lfg. 8. Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Neumeyer, L., Hülfstafeln für barometr. Höhenmessgn. 8. München, Oldenbourg. 4 Mk. 50 Pf.

Tietjen, F., u. P. Lehmann, Tafel vierstell. Logarithmen. 4. Berlin, Dümmler. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Dölp, H., d. Determinanten, nebst Anwendg. auf d. Lösg. algebr. u. analytisch-geometr. Aufgaben. 2. Afl., bearb. v. W. Soldau. 8. Darmstadt, Brill. 2 Mk.

Montag, J. B., prakt. leichtfassl. Anleitg. z. Buchstabenrechng. u. Algebra. 5. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Thomae, J., üb. e. specielle Klasse Abel'scher Functionen. 4. Halle, Nebert. 4 Mk. 50 Pf.

Geometrie.

Brockmann, F. J., Lehrb. d. elementaren Geometrie. 1. Thl. Die Planimetrie. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Delabar, G., d. Elemente d. darstellenden Geometrie. 2. Afl. 4. Freiburg, Herder. 2 Mk. 20 Pf.

Erler, W., d. Elemente d. Kegelschnitte in synthet. Behandlg. 8. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Ermittelung, die, d. Potentialcoordinaten u. d. Krümmungslinien e. gegebenen Niveaufläche durch blosse Quadraturen. 4. Freiberg, Engelhardt. 1 Mk. 25 Pf.

Fort, O., u. O. Schlömilch, Lehrb. d. analyt. Geometrie. 1. Thl. Analyt. Geometrie d. Ebene von O. Fort. 4. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Jenny, A., d. Ellipsoid elementar bearbeitet. 8. Basel, Schweighauser. 1 Mk.

Klein, B., üb. d. geradlinige Fläche dritter Ordnung u. deren Abbildg. auf e. Ebene. 8. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 50 Pf.

Müller's, J. H. T., Lehrb. d. ebenen Geometrie f. höhere Lehranst. 2. Afl. hrsg. v. K. L. Bauer. 3. Thl. 8. Halle, Waisenhaus. 3 Mk.

Piorek, J., Einleitg. in die kinemat. Geometrie, verbunden m. e. elementaren Behandlg. d. cycl. Curven. 8. Hildesheim, Gerstenberg. 1 Mk. 50 Pf.

Reye, H., d. Geometrie d. Lage. 2. Afl. 1. Abth. 8. Hannover, Rümpler. 5 Mk.

Sanda, F., deskriptioni geometrie pro vyšši třidu škol realných. 8. Prag, Kober. 4 Mk. 20 Pf.

Wiegand, A., Lehrb. d. Stereometrie u. sphär. Trigonometrie. 8. Afl. 8. Halle, Schmidt. 1 Mk. 50 Pf.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Afl. 1. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

Optik.

Farbenkreis in 15 Abstufgn. m. 20 Anwendungstafeln z. Complemente u. Triaden. Fol. Berlin, Czihatzky. 20 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Beobachtungen, astronom., magnet. u. meteorologische, an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1876. Hrsg. v. C. **Hornstein**. 4. Prag, Calve. 7 Mk. 50 Pf.

Kerz, F., d. Entstehung d. Sonnensystems. 2. Afl. 8. Darmstadt, Schlapp. 10 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Afl. 11—14. Lfg. 8. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Schmidt, unser Sonnenkörper nach s. physikal., sprachl. u. mytholog. Seite hin betrachtet. 8. Heidelberg, Winter. 3 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. **Schönfeld** u. A. **Winnecke**. 12. J. 1. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, kleines naut. f. d. J. 1878. 8. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Physik.

Crüger, J., Grundzüge d. Physik mit Rücksicht auf Chemie. 18. Afl. 8. Leipzig, G. W. Körner. 2 Mk. 10 Pf.

Handl, A., Lehrb. d. Physik f. d. oberen Klassen der Mittelschulen. 8. Wien, Hölder. 2 Mk. 60 Pf.

Kohlrausch, F., Leitf. d. prakt. Physik. 3. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Zeuner, G., Grundzüge d. mechan. Wärmetheorie. 2. Afl. 8. Leipzig, Felix. 13 Mk.

Vermischte Schriften.

Berichte üb. d. Verh. d. k. sächs. Ges. der Wissensch. zu Leipzig. Mathemat.-phys. Classe. 1877. I. 8. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Repertorium d. liter. Arb. aus d. Gebiete d. reinen u. angewandten Mathematik. Originalberichte d. Verfasser. Gesammelt u. hrsg. v. L. **Königsberger** u. G. **Zeuner**. 1. Bd. 5. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1876. 3. Hft. 8. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

— dass. 1877. 1. Hft. 8. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Hrsg. v. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. Suppl. z. 22. Jahrg. 1877. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Litterarischer Bericht

CCXLII.

Methode und Principien.

Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Von Dr. Benno Erdmann, Privatdocenten der Philosophie an der Universität zu Berlin. Leipzig 1877. Leopold Voss. 174 S.

Die vorliegende Schrift zeichnet sich als philosophisches Erzeugniss in hohem Grade aus, wenn gleich es nur Anfänge von bester Vorbedeutung sind, welche dieselbe einer Beachtung besonders wert machen. Zunächst ist sie die erste Antwort, welche den aus den exacten Wissenschaften hervorgegangenen philosophischen Theorien von Seiten eines wirklich befähigten Vertreters der Fachphilosophie zuteil wird. Ohne mathematische Bildung wird wol niemand eine solche Befähigung erlangen; doch hat man bei der in Rede stehenden nicht sowol an mathematische Kenntnisse als vielmehr an diejenige gesundere Logik zu denken, welche allein Frucht exact wissenschaftlicher Fachstudien sein kann und sich von der an den formalen Bedingungen klebenden gemeinen Logik durch sehr sichtliche Ueberlegenheit unterscheidet. Hierhin gehört vor allem das reservirte Urteil, welches plausibele Schlüsse verschmäht und sich nicht auf allgemeinen festen Glauben verlässt, eine Eigenschaft die gegenüber dem Ehrgeiz weitgreifender Schlüsse nicht hoch genug geschätzt werden kann. Obwol aber der Verfasser sich selbst sehr frei von Vorurteilen erhalten hat — bis zu welcher Grenze ist nicht wol zu erkennen — so hat er doch nicht mit dem Vorurteil gebrochen, vielmehr bewegt sich

seine ganze Darstellung in der Sphäre der Kant'schen Vorurteile, die er nicht zu teilen scheint, die er jedoch, sei es auch manchmal nur stylistisch, benutzt, vermutlich um von den darin befangenen Lesern besser verstanden zu werden. Zum Teil mag dies mit Glück geschehen sein, zum Teil aber vermindert sich auch dadurch die Leistung bedeutend. Das erstere gilt von den beiden ersten Capiteln: „Zur Entwickelungsgeschichte des Axiomensystems" und „Die Axiome der Euklidischen Geometrie" — besonders bemerklich im zweiten, das letztere in den beiden übrigen: „Philosophische Consequenzen" und „Grundzüge einer Theorie der Geometrie". Das zweite Capitel beginnt mit Stellung der Aufgabe den Raum zu definiren. Nach gewöhnlichen Begriffen erfordert die Definition ein Allgemeineres, unter welches das Object zu subsumiren ist; der Raum aber ist individuell und doch kein Individuum aus einer Gattung. Nach praktischem Gesichtspunkt folgt daraus natürlich, dass der gewöhnliche Begriff der Definition von keiner Anwendung auf den Raum ist, und wir den Zweck der Definition nicht ausser Acht lassen dürfen, um die dem Gedanken entsprechende Form der Begriffsbestimmung zu finden. Der Zielpunkt des Verfassers lag aber ganz wo anders als in einer correcten Begriffsbestimmung; ihm kam es auf Beleuchtung der Bedeutung der vorliegenden Begriffserweiterung an, die in den Riemann-Helmholtz'schen Aufstellungen bereits in bestimmter Richtung vollzogen war. Hierzu bot sich ihm die zwar nicht sachlich richtige, sondern im Grunde nur stylistische, zur Vereinfachung brauchliche Motivirung in der formellen Forderung der Definition dar. Er macht aus der Definition des Raumes ein Problem und lässt die Erweiterung des Begriffs als Weg zur Lösung erscheinen, was wol schwerlich seiner ernsten Meinung entsprechen wird. Es leuchtet gewiss sofort die Verkehrtheit ein, wenn jemand in den Anfangsgründen der Geometrie, um jener formellen Forderung zu genügen, den Kreis als specielle Ellipse definiren wollte. Anscheinend subsumirt zwar auch die gewöhnliche Definition, die den Kreis eine krumme Linie von constantem Centralabstand nennt; allein hier ist die krumme Linie nur ein indifferenter Titel, das Erkenntnissmoment liegt im constanten Abstand, und beiläufig wird zu einer künftigen Bildung des Curvenbegriffs mit einer Instanz ein Anfang gemacht. Nur weil die Definition der psychischen Genesis Rechnung trägt, wird sie für annehmbar gehalten, eine solche, die bloss formelle Bedingungen erfüllt, würde die Schuldoctrin verwerfen. Diese psychische Genesis aber ist es, was der Verfasser ganz und gar bei Seite lässt; er begnügt sich mit äusseren Vergleichungspunkten im Gebiete fertiger Ideen. Verglichen wird die geordnete räumliche Anschauung mit der analytischen Darstellung einer mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit; beide decken sich teilweise, doch wird die letztere nicht durch die Grenzen der ersteren

beschränkt und befähigt uns demgemäss auch den Begriff des Raumes in ideeller Auffassung zu erweitern, zunächst also die Beschränkung auf 3 Dimensionen aufzuheben, dadurch vermittelt aber auch die Bedeutung der Bedingungen, durch welche die räumlichen Gebilde bestimmt sind, in grösserem Umfange aufzufassen, was sich schon bei 3 Dimensionen gegenüber der Planimetrie geltend macht. Wenn nun der Verfasser am Schlusse des 1. Capitels von seiner Aufgabe spricht, „die mathematischen Entwickelungen, die zur Aufstellung des Axiomensystems geführt haben, einer Prüfung zu unterziehen, die ihre analytische Berechtigung und anschauliche Bedeutung zum Gegenstande hat" — so ist in der Tat von einer solchen Prüfung nichts zu sehen; hierzu würde ein Eingehen auf das mathematische Detail und ein Aufnehmen psychologischer Gesichtspunkte schwerlich zu entbehren gewesen sein. Die Darstellung geht in keinem Punkte über die in fremden Arbeiten gegebenen Momente hinaus; doch bot schon deren Wiedergabe in verständlichem Zusammenhang hinreichenden Stoff, und man wird darin gern eine Leistung anerkennen. War nun bis dahin die gewählte formell logische Verbindung so indifferent und dem wirklichen Gegenstand fremd und doch der Hervorhebung und Schattirung günstig wie die Farbe einer Bildsäule, so hörte sie offenbar auf gleichgültig zu sein, wo der Verfasser zu den philosophischen Consequenzen überging. Hier wird das ganze Ergebniss des Räsonnements dadurch entstellt und verschoben, dass er die Disjunctionen und logischen Verhältnisse von seinen Gegner Kant ohne alle Prüfung aufnimmt. Kant hat in der Kritik der reinen Vernunft nicht nur keine Auskunft über den Sinn seines Apriori gegeben, sondern dasselbe auch in nebelhafter Verschwommenheit bald mit Notwendigkeit, bald mit Allgemeinheit, bald mit Ursprünglichkeit, bald mit Subjectivität permutirt und gleichwie selbstverständlich als identisch betrachtet. Das aber leuchtet auch unausgesprochen aus allem hervor, dass er die Vernunft als constant, jeder Genesis unfähig ansieht: es kann davon nur unverändert zur Erscheinung und Besinnung gelangen, was latent vorher da war. Dass er mit der Genesis auch die Möglichkeit aller Erklärung und dadurch das Recht alles Urteils über den Ursprung leugnet, ist ihm nicht eingefallen. Das Apriori, d. i. das Stammen aus der Vernunft, steht daher zur Erfahrung factisch in keinem andern Gegensatz als die absolute Unkenntniss zur teilweisen Kenntniss oder Forschung. Indem der Verfasser (auf S. 91.) direct die Frage aufnimmt, „ob der Inhalt der Raumvorstellung in nativistischem Sinne a priori oder in empiristischem a posteriori erworben wird" — überspringt er die Hauptsache, die Prüfung der Disjunction selbst. Auf Grund des fingirten Gegensatzes scheint die Argumentation, welche zur Entscheidung nach letzterer Seite hin führt, eine äusserst klare und treffende zu sein. „Aus den bekannten Gesetzen

unserer sinnlichen Wahrnehmungen können wir die Reihe der sinnlichen Eindrücke herleiten, welche eine sphärische oder pseudosphärische Welt uns geben würde, wenn sie existirte. Da demnach andere Erfahrungen den Inhalt unserer Raumvorstellungen ebenfalls verändern würden, so ergiebt sich, dass unsere Raumanschauung nicht unabhängig von aller Erfahrung gegeben sein kann, dass sie eine empirische Vorstellung sein muss." Dem Beweise fehlt in der Tat nichts als der Gedanke des Gegenteils, das bestritten werden soll; in Ermangelung eines solchen Gedankens aber fällt er in nichts zusammen. Es ist auch so wenig ein Schritt zu einer bessern Erkenntniss als es eine Naturerklärung angebahnt haben würde, wenn jemand dem Zeus die Bewirkung des Donners bestritten, ihn aber sonst stillschweigend als Urheber des Wetters gelten gelassen hätte. Wir können in dem Resultat, wie es hier gefasst ist, kein Betreten einer wissenschaftlichen Bahn, sondern nur eine Reform innerhalb eines abergläubischen Cultus (des Apriori) sehen. Der Verfasser mag von dessen Nichtigkeit überzeugt sein und denken, auf eine Null mehr oder weniger komme es nicht an. Dass aber hier die Null so zu sagen nicht Addend, sondern Factor ist, zeigt sich, sobald man nur einigermassen den psychischen Hergang zuzieht. Die Schrift umgeht nämlich die Frage ganz: Können wir zu der analytischen Darstellung einer geordneten, stetig erweiterten mehrfachen Mannichfaltigkeit ohne Hülfe des empirischen, aus der sinnlichen Wirklichkeit entnommenen Raumes gelangen? Dass dies nicht der Fall ist, zeigt erstlich der Versuch. Ohne Zuziehung des Raumes können wir eine geordnete Zahlenreihe nur mit Hülfe der Zeit, aber auch damit nicht die Beziehung mehrfacher Ausdehnung bilden. Zweitens ist auch dem analytischen Begriff der erweiterten Geometrie eine Schranke geblieben, die er vom euklidischen Raume aufnehmen muss, die indes auffallenderweise alle Bearbeiter solcher Theorien ausser Acht gelassen haben. Alle Gebilde mehrfacher Ausdehnung haben nur dadurch bedingt einen Sinn, dass irgend eine $n$fache Mannichfaltigkeit l i n e a r ist, gleich dem Raume der euklidischen Gebilde. Obgleich diese Zahl n in ihren Formeln enthalten ist, betrachten jene Autoren doch ihre Geometrie als eine absolute. So sorgfältig nun auch Erdmann nach Vorgang von Helmholtz jede Aeusserung darüber gemieden hat, ob er das analytische Erzeugniss als empirisch oder rationalistisch ansehe, so kann die Kritik an der Frage nach dessen Ursprung nicht vorbeigehen. Jenes Schweigen ist eine Schonung des unter Kantianischen Philosophen und Mathematikern herrschenden Vorurteils, welche selbst durch den Nachweis des empirischen Ursprungs des Raumbegriffs nicht darauf aufmerksam werden, dass ihr Glaube an das Apriori der mathematischen Begriffe nichts als ein Glaube ohne Grund war, der vor der Forschung zurückweicht, die eben dadurch, dass sie jetzt

nach Beweisen für die Notwendigkeit des vulgären, beschränkten Raumbegriffs suchen, verraten, dass von Kant bis dahin niemand an Begründung gedacht hat, eine Schonung die dem klaren Einblick in die Sache äusserst hinderlich ist. Erkennt man an, dass der analytische, weitere Raumbegriff selbst empirisch gewonnen und auf den euklidischen basirt ist, so folgt daraus die Notwendigkeit der euklidischen Geometrie für alle Fälle, selbst wenn künftig beobachtete Tatsachen uns zur Ueberschreitung der euklidischen Grenzen zwingen sollten. Diese Notwendigkeit ist aber in einer Hinsicht das diametrale Gegenteil der cartesischen, welche die Kantianer im Sinne haben, die noch immer in der Meinung befangen sind, die Notwendigkeit, in der der Geist sich findet, bestimme auch die Tatsachen der Natur. Sie wird vielmehr dem Geiste durch seinen Zweck auferlegt, den eben jene Tatsachen bestimmen. Nach cartesischem Vorurteil hat der Raum nur 3 Dimensionen, wenn der Geist nicht mehr als 3 denken kann. Das ist aber grundlos und irrig; der Geist muss die Tatsachen anerkennen, auch wenn er sie nicht begreift, und dann seine Fähigkeiten zu erweitern suchen, um sie zu begreifen. Im vorliegenden Falle geht nun die Erweiterung der Denkfähigkeit dem Zwange der Tatsachen voraus: noch ist keine Abweichung der Dreieckswinkelsumme entdeckt, und schon sind wir für den Fall der Entdeckung mit einer Theorie gerüstet. Aber die Theorie steht durch ihre Grundbegriffe auf dem Boden eines linearen (ebenen) Raumes, der also als Basis aller Raumtheorie nie in Frage kommen, vielmehr allein sich als unzureichend erweisen kann. Wenn also Erdmann (S. 170.) sagt, für jenen Fall würde eine berichtigte Raumvorstellung den Inhalt der geometrischen Untersuchung bilden, so stellt er damit die Sache in ein unrechtes Licht, als ob eine Vertauschung der euklidischen Geometrie mit einer andern in eventueller Aussicht stünde. Einen linearen Raum kann keine Geometrie, auch die Bolyai'sche nicht umgehen. Ob wir die dritte Dimension zur Grundlegung entbehren könnten, und nicht etwa die analytischen Raumbegriffe auf solcher Basis zu beschränkt ausfallen würden, mag unentschieden bleiben; jedenfalls erleichtert uns die mit Hülfe der Gesichtseindrücke erworbene Dreidimensionen-Anschauung die Bildung der Grundbegriffe. Diese Hülfe hört auf, sobald wir mehr als dreifache Mannichfaltigkeit untersuchen, und die aus der dreifachen herrührenden Begriffsbeschränkungen übertragen sich auch auf alle Erweiterungen. So stellt sich das sachliche Verhältniss überall anders dar, wenn man die Genesis der Vorstellungen und Begriffe zu Rate zieht, als es nach der oberflächlichen Kant'schen Logik erscheint. Letztere vermag wol darzutun, was auf dem Boden der vulgären Meinung steht, aber nicht über Principien zu entscheiden. Dies wird gewiss der Verfasser empfunden haben: so vielen richtigen Urteilen man auch in der Schrift begegnet, die

einen der vulgären Meinung nicht entsprechenden, tiefern Einblick kund geben, so ist doch kein einziges zur Evidenz gebracht, jedes erscheint als persönliche Ansicht; daher möchte auch eine Mitteilung der einzelnen der Sache nicht förderlich sein. Wer nur das reich gegliederte Inhaltsverzeichniss gelesen hat, muss das Vorstehende für einen sehr einseitigen Bericht halten. Allein von dieser Gliederung ist in der Ausführung nichts zu finden; auch die Schrift selbst bleibt bei dem einen, hier besprochenen Thema stehen. Hoppe.

Die Bedeutung der Pangeometrie. Mit Bezug auf den Aufsatz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, von Helmholtz, Berlin, April 1876". Von Schmitz-Dumont. Mit Holzschnitt im Text. Leipzig 1877. Erich Koschny. 47 S.

Das Beste, was diese Schrift enthält, ist entschieden die in den ersten Abschnitten an der Helmholtz'schen Darstellung geübte Kritik. Nach der früheren Schrift desselben Verfassers, „Zeit und Raum etc." (besprochen im 232. litt. Ber. S. 41.) in welcher er mit Waffen der speculativen Philosophie erfolglos gegen Gauss und Riemann polemisirte, musste es höchlich überraschen ihn hier auf den Boden der psychischen Beobachtung zu finden, wo es ihm leicht wird die Schwächen der Helmholtz'schen Betrachtungsweise zu enthüllen, leicht einmal weil er die fremde Beobachtung benutzt, dann weil er nicht wie Helmholtz damit ein positives Ziel verfolgt. Denn in der Tat unternimmt er mit keinem Worte die äusserst klar nachgewiesenen Mängel zu verbessern, sein Sieg über den Mathematiker soll bloss die Angriffe fern halten, denen er von dieser einen Seite sich ausgesetzt fand, ihn rechtfertigen, wenn er, wie im weitern geschieht, die Beobachtung verlässt und in die speculative Philosophie zurückverfällt. Ein näheres Eingehen auf seine Kritik hat der Verfasser dadurch sehr begünstigt, dass er die Stellen, auf die sie sich bezieht, in extenso wiedergiebt. An erster Stelle führt Helmholtz aus, wie Wesen, die auf einer Fläche lebten, ihrem Raume nur 2 Dimensionen zuschreiben, und unfähig sein würden sich von einem Heraustreten aus der Fläche, auf die sich alle Wahrnehmungen bezögen, eine Vorstellung zu machen. Er erklärt, was er unter „Vorstellung" versteht, fasst dieselbe jedoch als reine Reproduction auf. Schmitz-D. erinnert hiergegen, dass die Vorstellung auf transformirenden Geistesacten beruht, scheint aber gleichwie Helmholtz keine Ahnung davon zu haben, dass von der Wahrnehmung ganz dasselbe gilt. Er meint mit der Wahrnehmung die unmittelbar gegebene sinnliche Tatsache bezeichnet zu haben; hierauf nämlich allein stützt sich seine Unterscheidung von der Vorstellung. In Wirklichkeit werden aber nicht diese, sondern stets transformirte Gebilde, nahezu meist gleich der entwickeltsten Vorstellung, wahrgenommen,

und der Unterschied liegt vielmehr darin, dass die Wahrnehmung an der Tatsache haftet, die Vorstellung sich davon sofort unabhängig macht. Dies gehört so wesentlich zum Begriff in allen Beziehungen, dass man in diesem Punkte dem Philosophen keine Aenderung der Terminologie gestatten kann ohne alle Verständigung zunichte zu machen. Dass nun trotz der Täuschung, die der Unterscheidung zugrunde liegt, der Einwand in Kraft bleibt, lässt sich leichter in Verbindung mit dem Folgenden zeigen. Im zweiten Citat entwickelt Helmholtz die Gestaltung der geometrischen Begriffe für Wesen, die auf eine Kugelfläche beschränkt wären. Der Begriff der Aehnlichkeit würde ihnen ganz fehlen, und ihre Axiome würden andere sein, als die der Wesen auf der Ebene. Schmitz-D. zeigt, dass die Inconvenienzen (mit Unrecht nennt er's Widersprüche), in denen sich solche Wesen befänden, diese nach allerhand Versuchen dahin führen würden die dritte Dimension hypothetisch einzuführen und eine der Euklidschen adäquate Geometrie zu bilden. Helmholtz identificire fälschlich, hier wie oben, die Wahrnehmung mit der Vorstellung. Wahrnehmung ist hier das unrechte Wort; denn nach Erwerbung der Vorstellungsfähigkeit in 3 Dimensionen wird jede Wahrnehmung dieser gemäss ausfallen. Was er meint, ist der gegebene Sinneseindruck; nach dieser nominellen Berichtigung ist in der Tat ein wesentlicher Irrtum in der Helmholtz'schen Aufstellung enthüllt. Es ist nur auffallend, dass Schmitz-D. an zwei naheliegenden Punkten vorbeigeht, die seiner Ausführung eine reelle Stütze bieten, wie man sie bei seiner Argumentation in schwebenden Ideen wol noch vermissen möchte. Wäre es erstens apodiktisch richtig, dass Wesen von sphärischer Existenz keine Planimetrie schaffen könnten, so würden auch Wesen, die in sphärisch gekrümmtem Raume lebten, keine Euklid'sche Stereometrie bilden können. Da die Menschen eine solche besitzen, so hätte Helmholtz den Beweis geliefert, dass der wirkliche Raum ein linearer sein muss, was weder seiner Ansicht entspricht noch für erwiesen gelten kann. Zweitens ist der gedachte Fall ausschliesslich sphärisch gegebener Sinnlichkeit kein imaginärer, sondern der wirkliche. Unsere unmittelbar empfangenen Gesichtsbilder sind sphärisch geordnet und nur nach 2 Dimensionen ausgedehnt; dennoch bilden wir daraus die Vorstellung von 3 Dimensionen, und, wie gegen Schmitz-D. zu bemerken ist, auch die Wahrnehmungen sind der gleichen Transformation gemäss körperlich gestaltet. Auf die Betrachtung des Weges dieser Transformation, welche die ganze Frage klar legen würde, wollen sich leider beide Gegner nicht einlassen. Der Verfasser schliesst nun seine Widerlegung, mit der sein Ziel erreicht ist, und knüpft nur noch interessante Bemerkungen an H's. weitere Ausführungen. Viel schwächer zeigt sich seine Logik in den 3 letzten Abschnitten, wo er die Riemann'sche Raumtheorie eingehender be-

trachten will; oft scheint er den Sinn der Aufstellungen nicht zu verstehen, seine Bemängelungen sind resultatlos und endigen meist mit Berufung auf seine frühere Schrift, in der man dann das Behauptete noch weniger dargetan findet. Hoppe.

Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Raumanschauung. Von K. Rudel, Rector der kgl. Gewerbschule in Bamberg. Bamberg 1877. Schmidt. 28 S.

Die Schrift besteht aus 2 Teilen überschrieben: Betrachtungen vom Standpunkte 1) gewöhnlicher — 2) einer höheren Form der — Raumanschauung aus. Im ersten werden als Grundgebilde aufgeführt und erklärt: Punkt, Strahl, Ebene, Strahlen- und Ebenenbüschel, Punkt- und Strahlenbündel, Punktbund (räumliches Gebilde), und nach Annahme bestimmter genetischer Beziehung zwischen allen, und von einer unendlichen Anzahl n im Ebenenbüschel enthaltener Ebenen die Anzahlen der Elemente der übrigen Gebilde abgeleitet. Im zweiten Teil wird die Anzahl der Dimensionen von 3 definitiv auf 4 erweitert, es giebt nun eine Mehrheit dreifach ausgedehnter Räume und ein einziges vierfach ausgedehntes „All". Es werden dann die nähern Umstände der Lage der Gebilde im All, ihre Schnitte und ihre relativ unendlichen Anzahlen durch Analogie hergeleitet. Das Nachwort rechtfertigt die Betrachtungen des 2. Teils in vollkommen annehmbarer Weise. Nur gegen eine Aeusserung haben wir um so mehr Grund zu protestiren, weil die darin kühn proclamirte Ansicht von Vielen geteilt zu werden scheint. Wenn der Verfasser sagt, . . . Geometrie auf Grund directer Anschauung zu erfassen und zu betreiben müsse uns der Natur der Sache nach absolut und für immer versagt bleiben . . . und weiterhin specieller: „weil wir räumliche Wesen sind, darum ist uns jede reale Vorstellung von Gebilden höherer als dritter Dimension verschlossen" — so behauptet er mehr als er weiss. Wer überhaupt zeitweilige Grenzen der geistigen Fähigkeit zu ewigen macht, der masst sich ein Urteil über ein Gebiet an, dessen Kenntniss ihm nach eigenem Ausspruch verschlossen ist. Ein solches Urteil ist eben darum stets irrig, auch wenn es sich negirend verhält. Hier insbesondere liegt es sehr nahe, wie voreilig die Behauptung ist. In welchem Sinne sind wir räumliche Wesen? Die gegebene Räumlichkeit der Gesichtsempfindungen ist eine zweifach ausgedehnte; hypothetisch wird die dritte Dimension eingeführt; dennoch geht die intellectuelle Schöpfung (in frühster Kindheit) in scheinbar directe Anschauung über. Warum sollten wir unfähig sein ebenso hypothetisch die vierte Dimension einzuführen und uns die analoge Fertigkeit der Anschauung zu erwerben. Nur

der Antrieb zur Uebung fehlt uns und hat uns in der Kindheit gefehlt, weil alle sinnlichen Tatsachen in das eine lineare Raumsystem von 3 Dimensionen hineinpassten. Künftige Entdeckungen können uns diesen Antrieb liefern; nur solange als uns keine Tatsachen zur Erweiterung nötigen, werden wir die gewöhnliche Hypothese als einfachste festhalten. Hoppe.

Centrische und excentrische Dynamiden. Elementäre Beiträge zu einer rationellen Atomen-Lehre. Von Dr. Adolph Lederer, K. K. Fregattenarzte. Mit einer lithographirten Figurentafel. Wien 1877. Alfred Hölder. 61 S.

Der Verfasser kündigt an, dass er eine zur dynamischen Erklärung des Magnetismus und der Elektricität leitende Spur entdeckt habe. Anstatt aber seinen Gedanken so klar und einfach als möglich darzulegen, vexirt er den Leser durch endloses Hinundherschweifen in mannichfaltigen Betrachtungen ohne jegliche exacte Auffassung. Von oscillatorischen Bewegungen ist zwar viel die Rede, doch bleiben die Betrachtungen im Grunde von Anfang bis Ende statische und beruhen auch als solche teilweise auf unrichtiger Anschauung. Wissenschaftliche Untersuchung ist nicht vorhanden; dass ein ungelöstes Problem wie das vorliegende für populäre Darstellung ganz ungeeignet ist, versteht sich von selbst. H.

Die rationellen Formeln der Chemie auf Grundlage der mechanischen Wärmetheorie entwickelt von Baron N. Dellingshausen. Erster Theil. Unorganische Verbindungen. Heidelberg 1876. Carl Winter. 163 S.

Der Verfasser glaubt den Schwierigkeiten der chemischen Frage dadurch zu entgehen, dass er von der gewöhnlichen Annahme einer Grundverschiedenheit der Atome heterogener Stoffe zur Annahme völliger Gleichheit aller Atome übergeht. Die Verschiedenheit der Stoffe soll auf der blossen verschiedenen Vibration in stehenden Wellen beruhen, welche, wie er in seiner früheren Schrift: „Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie“ — entwickelt hat, das Wesen der Wärme ausmachen. Die Schrift bespricht das Verhältniss seiner Hypothese zu den chemischen Erscheinungen, geht aber auf dynamische Untersuchung mit keinem Worte ein und bleibt daher weit entfernt von der Frage, welche gelöst werden soll. H.

Das System der Philosophie als exacter Wissenschaft enthaltend Logik, Naturphilosophie und Geistesphilosophie. Von C. L. Michelet. Zweiter Band. Berlin 1876. Nicolai. 486 S.

Der Verfasser will den Tadel, der seine Vorgänger getroffen habe, dass sie die Fortschritte der empirischen Wissenschaften zu sehr ignorirt hätten und hinter ihnen zurückgeblieben wären, so gut als möglich von sich abwenden. Er räumt demzufolge auch ihren Methoden und Disciplinen eine kurze Besprechung ein. Es mag genügen einen Satz anzuführen, um zu zeigen, was er sich bei denselben denkt. Seite 9. sagt er: „Wenn dann freilich die hypothetische Erklärung mit dem Factum übereinstimmt, so müsste die Philosophie sie wol anerkennen; sie hörte damit aber auch auf, eine Hypothese zu sein“. Der schiefe Ausdruck einer vorher citirten physikalischen Autorität rechtfertigt zwar formell die Aeusserung, wenn man sie als die eines Unkundigen ansieht; immer aber beweist letztere die Beschränktheit seiner Begriffe von der Bedeutung einer Hypothese und dadurch die Einseitigkeit seiner Philosophie. Die Abschnitte sind: 1) die Mechanik (darunter die Mathematik, darunter der Raum, die Zeit, Einheit beider, dann die Mechanik als solche, die Astronomie), 2) die Physik. Gern würden wir, wenn unter der Menge nichtssagender Bemerkungen, die an Neuheit dem 2 mal 2 ist 4 gleichen, sich eine charakteristische Aeusserung gefunden hätte, dieselbe an's Licht ziehen. Da dies nicht ist, so schliessen wir mit einer Antwort auf den Ausspruch in der Vorrede: wie die Philosophie nie des Empirismus, so werde dieser ebensowenig der Philosophie entbehren können. Die Möglichkeit, dass die empirischen Wissenschaften, und mit ihnen die Mathematik, welche der Verfasser als „Form der Mechanik“ zu ihnen zählt, durch die Philosophie ergänzt und regenerirt werde, bleibe unbestritten, und obwol die Regeneration naturgemäss von innen heraus vor sich geht, so soll auch der Fall nicht ausgeschlossen sein, dass einmal der Anstoss von aussen kommt. Doch von welcher Philosophie ist die Rede? Der hier dargebotenen wird schwerlich jemand eine solche Kraft zuschreiben. Der traditionellen Philosophie, die heutzutage gelehrt wird, haben wir keinen Grund vorzuwerfen, dass sie sich um die Fortschritte der Naturwissenschaften nicht bekümmerte — auf diese lenkt sie vielmehr in neuster Zeit mehr und mehr den Blick — wol aber, dass sie ihrer eigenen Regeneration mit der Taktik des Todtschweigens aller Fortschritte auf ihrem Gebiete widerstrebt, um ihr sinkendes ererbtes Ansehen kümmerlich noch für einige Jahrzehnte aufrecht zu erhalten. Diese schon längst in einer Zeitfrage nach der andern, praktischen so wie wissenschaftlichen, jedesmal ohnmächtig befundenen Katheder-doctrin kann und soll keinen Einfluss auf die exacten Wissenschaften üben; sie mag vielmehr daran denken, erst Wissenschaft zu werden, indem sie ihre Aufangsgründe der Differenz der Schulansichten enthebt.

Hoppe.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Par G. Dostor, Docteur ès Sciences, Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris, Membre de la Société mathématique de France. Paris 1877. Gauthier-Villars. 352 S.

Das vorliegende Buch umfasst allseitig die Principien der Determinantentheorie mit reichhaltiger Zuziehung des Wissenswerten, und ist überdies mit besonderer Sorgfalt und viel Geschick für leichtes und gründliches Verständniss der Anfänger bearbeitet, so dass es sich in hohem Grade für Schul- und Selbstunterricht empfiehlt. Die gewandte und concinne Darstellung, die Einfachheit des Stiles und die sichere Logik, welche die früheren Arbeiten des Verfassers auszeichnen und angenehm machen, bewähren sich auch in der gegenwärtigen. Besonders im Anfang bei der Begriffserklärung findet Berücksichtigung verschiedener Auffassung und Methode statt, und es wird dieselbe Sache von mehreren Seiten beleuchtet und abgeleitet; weiterhin hat sich der Verfasser mehr und mehr für eine ausschliessliche Methode entschieden. Im allgemeinen hat er den grossen Vorzug der directen Schlüsse aus vollen Determinanten vor der Rechnung mit Unterdeterminanten gehörig gewürdigt. Es leuchtet ein, dass man zwar leicht in Unterdeterminanten zerlegen, aber nur mit Mühe dieselben mit gehörigem Vorzeichen einfügen kann, dass, ferner die directen Schlüsse weit belehrender sind als das mechanische Zerlegen, sich also für den Unterricht mehr eignen, während die Nachprüfung durch Unterdeterminanten dem Schüler überlassen bleiben kann. Warum der Verfasser trotzdem bei der Addition der Determinanten und der Auflösung der Systeme linearer Gleichungen der Methode der Unterdeterminanten vor den weit einfachern directen Schlüssen den Vorzug gegeben hat, ist nicht wol ersichtlich. Das ganze Werk besteht aus 4 Büchern: Theorie der Determinanten, Anwendung auf Algebra und Trigonometrie, Anwendung auf analytische Geometrie, Discriminanten und Invarianten. Die Theorie hat die 3 Capitel: Allgemeine Eigenschaften, Combinationen und Eigenschaften entsprechend gewissen Bedingungen, Multiplication, das erste die Paragraphentitel: Definition und Bezeichnung, Transformation, Unterdeterminanten, Entwickelung, das zweite: Addition, Eigenschaften von Determinanten mit Elementen null, abgekürzte Rechnung mit numerischen und algebraischen Determinanten. Die Behandlung der Gleichungen findet sich im 2. Buch. Manche Sätze sind Entdeckungen des Verfassers. Die Litteratur ist unmittelbar jedem Satze beigefügt. H.

Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten vermittelst geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen. Von Dr. Wilhelm Matzka, jubil. k. k. ord. Univers.-Professor, k. k. Regierungsrath, ordentl. Mitglied der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. (Aus den Abhandlungen der k. böhm. Ges. d. W. 6. Folge. 9. Band.) Prag 1877. Verlag d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 4°. 61 S.

Diese Arbeit ist ein methodischer Versuch jeder unmotivirten Aufstellung bei Beginn der Determinantenlehre zu entgehen. Es werden nun, um zur Determinantenbildung hinzuführen, aus einem System linearer Gleichungen nach einander 5 Unbekannte nach Subtractionsmethode mit Verbindung je zweier einander folgender Gleichungen eliminirt, und die Ausscheidung einer Determinante als gemeinsamen Factors gezeigt. Dies im successiven Verlauf immer complicirender werdende Verfahren führt jedoch nicht zum Ziele eines allgemeinen Nachweises des Fortschrittsgesetzes, welches durch viele Betrachtungen neuer Art schliesslich erreicht wird. Im ganzen ist viel Mühe aufgewandt ohne den geringsten Lohn. Der Antrieb dazu geht aus einer sehr gewöhnlichen Täuschung hervor. Nicht das Warum, sondern das Was muss die erste Frage sein. Der Grund der Anordnung wird leicht verstanden, nachdem man die Sache und ihren Erfolg kennen gelernt hat. H.

Ueber die Convergenz gewisser zur Darstellung willkürlicher Functionen dienender Reihen. Von M. Koppe. Programm der Andreas-Realschule. Berlin 1877. 4°. 31 S.

Der Verfasser verallgemeinert die Kugelfunctionen, indem er die Coefficienten $P_n{}^\varrho(x)$ der Entwickelung der Function

$$U_\varrho(\alpha, x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\varrho}$$

nach Potenzen von α untersucht. Cayley hatte schon das gleiche getan für solche ϱ, die Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind. Die Function U genügt einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung für die Unabhängigen α, x, aus der dann P als Speciallösung einer Gleichung 2. Ordnung für die Unabhängige x hervorgeht. Neben ihr tritt als zweite Speciallösung eine Function Q auf. Beide lassen sich als ganze Functionen $n$ten Grades einzeln von x und von ϱ darstellen. Es wird dann eine Relation der P entwickelt, dann Q auf einfachere Irrationalitäten reducirt, dann P für $n = \infty$ untersucht, dann P durch Eigenschaften eines davon abhangenden bestimmten Integrals definirt. Die folgenden Gegenstände sind: die Verteilung der Wurzeln von $P(\cos\varphi) = 0$ auf das Intervall 0 bis π, die Entwickelung einer Function von φ nach den $P^\varrho(\cos\varphi)$. H.

Litterarischer Bericht

CCXLIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo X. Roma 1877. Tipografia delle sc. mat. e fis.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

1. Heft. Ferdinando Jacoli. Ueber das Leben und die Arbeiten des Antonio Maria Lorgna.

2. Heft. Ferdinando Jacoli. Ueber Domenico Maria Novara's Bestimmung der Schiefe der Ekliptik.

3. Heft. Édouard Lucas. Untersuchungen über mehrere Werke von Leonardo di Pisa, und über verschiedene Fragen der höhern Arithmetik.

4. Heft. Fortsetzung.

5. Heft. Schluss. — B. Boncompagni. Ueber die Summe der vierten Potenzen der natürlichen Zahlen.

6. Heft. Antonio Favaro. Nikolaus Copernicus und das Universitäts-Archiv von Padua. Brief an D. B. Boncompagni. — M. Steinschneider. Berichtigung einiger Irrtümer in Betreff des arabischen Mathematikers Ibn Al-Banna. Auszug aus einem Briefe an D. B. Boncompagni.

Publicationsverzeichnisse im 2. 4. 6. Heft.

Methode und Principien.

Die Gesetze der Anfangsgeschwindigkeit in den Bewegungen der Weltkörper. Eine Darstellung der Himmelsbewegungen mit Hülfe der einfachsten Sätze der Mathematik. Von C. A. Werther, Dr. phil. Rostock 1877. Wilh. Werther. 112 S.

Was der Verfasser will, lässt sich nur teilweise erraten; eine deutliche Auskunft wird nicht gegeben, und aus den Resultaten ist kein Zweck ersichtlich. Im Anfang tadelt er, dass man den Begriff der Kraft zu eng fasse. Hätte er statt dessen nur seinen weiteren Begriff normirt, so würde ihm niemand das Recht bestritten haben. Es gefällt ihm nicht, dass die Anfangsgeschwindigkeiten der Planeten und Trabanten zufällig sein sollen; die blosse Attraction sei unzureichend, dieselben unter Gesetz zu stellen; er nimmt deshalb eine Repulsivkraft hinzu, worunter er die Centrifugalkraft zu verstehen scheint. Die auf S. 80. aufgeführten Gesetze der Anfangsgeschwindigkeit sind nichts weiter als Relationen nach Kepler'schen Gesetzen. Er scheint demnach seine Befriedigung darin gefunden zu haben, dass er von den Constanten auf Variabele übergegangen ist, welche ihm durch ihre Relationen den Eindruck der Gesetzmässigkeit machen.

H.

Geometrie.

Geometria dello spazio in coordinate tetraedriche secondo delle Vorles. über Geometrie di A. Clebsch saggio di studi del Dr. M. L. Albeggiani. Parte I. Palermo 1877. Pietro Montaina e Comp. 169 S.

Nach Angabe des Verfassers verfolgt das Gegenwärtige den Zweck, die Arbeiten von Clebsch unter den einzigen Gesichtspunkt des fruchtbaren Princips der Dualität zu stellen. In diesem 1. Teile, dem ein zweiter später folgen soll, scheiden sich 2 Abschnitte, Analysis und Synthesis. Der erste Abschnitt, in 4 Capitel geteilt, untersucht besonders die 4 geometrischen Fundamentalformen des Raumes, in reciproker Weise, nämlich Capitel I. II. Punkt und Ebene, Cap. III. IV. die Geraden unter doppelter Betrachtung, der Axen oder der Strahlen; Cap. V. lässt sich als Anhang zu den 2 letzten betrachten und bezieht sich auf die ebenen Curven oder auf die von beiden Arten Gerader erzeugten konischen Flächen. Der 2. Abschnitt, d. i. Cap. VI., geht aus den Ergebnissen des ersten hervor, und zwar aus dem Begriff der Complexen (Feld oder Gruppe), die Zugehörigkeit unterschieden durch I und C, so dass die Elemente I ebene Curven, die

C konische Flächen erzeugen. Der Connex der Complexen beider Arten von Elementen ergiebt eine Gleichung, die des Systems vom Index 2 im Raume von 3 Dimensionen, sie ist nur die analytische Darstellung nach deren Entstehung aus den 4 geometrischen Fundamentalformen *S* des Raumes, ein besondrer Fall davon ist die Gleichung der Geraden (42). Die letzte Numer enthält Betrachtungen der projectiven Geometrie, welche das Ziel haben, in allgemeinster Weise die Beziehung zwischen verschiedenen Oertern oder deren Elementen festzustellen. Die Coordinaten, von denen Gebrauch gemacht worden ist, sind die homogenen tetraedrischen; die des Punktes und der Ebene sind wie bei Clebsch definirt, die der Geraden nach den Definitionen von Battaglini, Clebsch, Klein u. A. Ausser diesen sind Cremona, D'Ovidio, Plücker, Salmon u. A. benutzt und citirt. Der 2. Teil soll sich mit Untersuchung der Eigenschaften der Flächen vom Exponenten 2, dargestellt durch die Gleichung $(SS) = 0$, d. i. der Flächen 2. Ordnung oder 2. Classe, erzeugt durch die 4 geometrischen Fundamentalformen des Raumes von 3 Dimensionen beschäftigen.

H.

Die Curven (Folia) von der Form

$$\frac{x \sin\varphi - y\cos\varphi}{x\cos\varphi + y\sin\varphi} = -\frac{ry}{x^2 - rx + y^2}$$

Eine analytisch-geometrische Studie von Dr. Gottfr. Schmauss, kgl. Regierungs- und Kreismedicinal-Rath in Augsburg. Augsburg 1877. Math. Rieger. 4⁰. 14 S. 1 Fig.-Taf.

Die untersuchte Curve wird erzeugt vom Durchschnitt der 2 Transversalen eines gleichschenkligen Dreiecks, welche von den Enden der Grundlinie aus die Gegenseiten $(= r)$ unter constantem Winkel $(= \varphi)$ schneiden, während bei festem einen Schenkel der andre um die Spitze rotirt. Aus dieser geometrischen Bestimmung wird erst die Gleichung hergeleitet, dann die Maxima und Minima, die Tangenten und Asymptoten, die Wendepunkte, und für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ der Flächeninhalt gesucht. Zugleich wird die Variation der Curve mit φ in Betracht gezogen.

H.

Das Ellipsoid elementar bearbeitet von Aug. Jenny. Basel 1877. Schweighauser. 32 S. 2 Fig.-Taf.

Die Arbeit beschäftigt sich ausschliesslich mit dem Inhalt ebener Flächenstücke und von Körpern. Was darin gegeben wird, ist in der leichtfasslichsten Weise entwickelt und dargestellt. Nur findet sich darin ein haarsträubender Fehler, der leicht genug zu berichtigen ist. Die Ellipse wird nämlich aus dem Kreise durch proportionale Ver-

kürzung oder Verlängerung der Ordinaten abgeleitet, dann von ihr das bzbw. längliche oder platte Rotationsellipsoid erzeugt. Anstatt nun analog aus dem Rotationsellipsoid das dreiaxige durch proportionale Reduction einer Coordinate abzuleiten, werden unmittelbar die vorher gleichen 2 Dimensionen ungleich gesetzt, das heisst dann nach allem Vorausgehenden: das Ellipsoid ist dreiaxig, wenn einmal $a > a$. Von Ellipse und Ellipsoid werden ausser der ganzen Figur die Segmente, gerade und schräg geschnittene, behandelt, auf Kreis- und Kugelsegmente reducirt und die Kugelsegmente für sich kubirt.

H.

Einiges aus der Theorie der Curven zweiter Ordnung. Von Jos. Eilles, k. Professor. Programm der kgl. bayer. Studien-Anstalt Landshut. 1877. Mit 2 Figurentafeln. 4°. 58 S.

Die Schrift beginnt mit einer einfachen Herleitung des Hesse'schen Satzes vom vollständigen Vierseite. Die folgenden Gegenstände sind die Brennpunkte und die imaginären Elemente. Alles ist nach der Methode der neuern synthetischen Geometrie behandelt, und eine grössere Reihe resultirender Sätze dualistisch aufgestellt. H.

Beiträge zur Geometrie des Dreiecks. Von R. O. Consentius. Carlsruhe 1877. G. Braun. Mit 1 Figurentafel. 34 S.

Vom beliebigen Dreieck ausgehend wird eine „allgemeine" (d. h. Gesammt-) Figur construirt, indem die ein-, um- und anbeschriebenen Kreise und viele damit in Verbindung stehende Gerade hinzugefügt werden. An dieser Figur wird dann in synthetischem Connex, ohne Hülfe der neuern Geometrie, eine längere Reihe von Sätzen entwickelt, und zum Schluss 49 Constructionsaufgaben gestellt. H.

Anfangsgründe der neueren Geometrie für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Von Dr. F. X. Stoll, Lehrer der Mathematik am Grossherzoglichen Gymnasium zu Bensheim. Mit 16 Figurentafeln. Bensheim 1872. Ehrhard u. Comp. 111 S.

Der Verfasser will die neuere Geometrie weder an die Stelle der euklidischen Elementargeometrie setzen noch mit ihr verschmelzen, sondern nach Vollendung derselben als besonderen Cursus einführen; wol aber dürfte nach seiner Ansicht der sonst in höheren Classen übliche, weniger instructive Unterricht in den Anfängen der analytischen Geometrie dafür in Wegfall kommen. Wenn auch der angeführte Grund gegen letztere nicht zutrifft, so ist doch die Aeusserung,

dass deren Resultate dem Schüler isolirt und zusammenhanglos erscheinen, aus dem andern Grunde sehr annehmbar, weil der Zweck ihrer Einführungen fast ganz jenseit des Schulunterrichts liegt. Die hiermit der neuern Geometrie angewiesene Stellung ist für die Gestaltung der Doctrin eine äusserst günstige. Sie hat eine deutliche, sichere Grundlage auf klaren Begriffen; es ist ihr dadurch gestattet sich rein auf ihren specifischen Inhalt zu beschränken und sich so in einheitlicher Form darzustellen. Hiervon ist in vortrefflichster Weise Gebrauch gemacht. Der Vortrag ist musterhaft wol geordnet und leicht verständlich; die Form ist die aus dem gewöhnlichen geometrischen Unterricht bekannte in Erklärungen, Lehrsätzen und Aufgaben. Der Umfang ist weniger wichtig, da nur eine Einführung und Vorbildung für das Studium der höhern synthetischen Geometrie in der Absicht liegt. Für den Fall einer Aufnahme in den Schulcursus lässt sich das Buch als Hülfsmittel sehr empfehlen. H.

Neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Von Dr. H. L. Rottok, Rector am Realgymnasium in Rendsburg. Mit 51 Figuren im Text. Schleswig 1877. Julius Bergas. 62 S.

Auch hier wie beim Vorgenannten wird ein getrennter Cursus in der neuern Geometrie, der sich auf den vollendeten Unterricht in der Elementargeometrie stützt, in Aussicht genommen. Die Methode unterscheidet sich von jener dadurch, dass sie zur Herleitung der Sätze Trigonometrie und überhaupt mehr Rechnung anwendet. Der Vortrag ist klar und leicht verständlich, so dass das Buch seinen Zweck sehr wol zu erfüllen vermag. H.

Die Elemente der darstellenden Geometrie, als Lehrmittel für Lehrer und Schüler an Real-, höhern Bürger-, Industrie-, Gewerb-, Bau-, Handwerker- und Fortbildungsschulen, und andern gewerblichen und technischen Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Von G. Delabar. Mit 100 Figuren auf 20 lithographirten Zeichnungstafeln. (Zweiter Theil der Anleitung zum Linearzeichnen.) Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Freiburg im Breisgau 1877. Herder. Quer-8°.

Das jetzt erschienene erste Heft des genannten 2. Teiles enthält nach allgemeiner Einleitung in die darstellende Geometrie überhaupt, welche 3 Projectionsarten aufweist, die Lehre von der rechtwinkligen Projection. Es werden in erläuterndem Vortrag die Darstellungen von Punkten, Geraden, krummen Linien, begrenzten ebenen Flächen, Ebenen, ebenen Figuren in gegebenen Ebenen, krummen Flächen,

der einfachen Körper, der Prismen und Pyramiden und deren Netze, der regulären Polyeder, der 3 elementaren runden Körper, und der gewundenen Körper behandelt. Der Ausdruck ist durchweg correct, und gute Ordnung nicht zu vermissen. H.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Handbuch der niederen Geodäsie. Von Friedrich Hartner, ord. Professor in Wien. Fünfte, vermehrte Auflage. Bearbeitet von Josef Wastler, o. ö. Professor der Geodäsie an der k. k. Technischen Hochschule in Graz. Mit 397 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien 1876. L. W. Seidel u. Sohn. 710 S.

Die neue Auflage unterscheidet sich von den früheren einesteils durch die Umrechnung in Metermass, die nur beim Kataster noch nicht ausgeführt werden konnte, und die durch die neue Instruction des österreichischen Katasters bedingten Aenderungen und Neuerungen in der Triangulirung, anderenteils durch erhebliche Vermehrungen, welche den neuesten Fortschritten der technischen Praxis und theoretischen Geodäsie entsprechen. An Instrumenten und Vorrichtungen sind hinzugekommen das Steinheil'sche Heliotrop, die Messräder, der anallatische Distanzmesser von Porro, der Theodolit von Breithaupt, das Universal-Nivellir-Instrument von Ertel. In Betreff des Verfahrens und der Theorie ist neu aufgenommen Ausführliches über die Genauigkeit der Längenmessungen, die Untersuchung über die Excentricität des Höhenkreises, die Untersuchung des Fehlers im Höhenwinkel wegen Schiefstehens der Rotationsaxe, das Abstecken langer gerader Linien, das Ausstecken von Kreisbogen, die Untersuchung über die Genauigkeit der Längen- und Horizontalwinkelmessungen, das Gewicht einer $n$fachen Repetition, die Untersuchung über die Aneroide von Goldschmid, die ausführliche Behandlung des Detail-Nivellements und der Querprofile, das Präcisions-Nivellement, ein Anhang über Tachymetrie. Dagegen ist die Markscheidekunst als entbehrlich für den gegenwärtigen Zweck weggeblieben. Die Hauptabteilungen des Buchs sind die Feldmesskunst und die Höhenmesskunst; in ersterer wird gehandelt von der Aufnahme, von der Berechnung und Teilung aufgenommener Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung, von der Ausfertigung der Pläne, in letzterer vom Höhenmessen und vom Nivelliren. Sowol der Vortrag der Theorie als auch die Beschreibung des Verfahrens und der Instrumente ist grösstenteils klar und für die mit der Technik nicht Vertrauten verständlich.

H.

Ueber die Genauigkeit der Längenmessungen mit Messlatten, Messband, Messkette und Drehlatte. Von Franz Lorber, o. ö. Professor der praktischen Geometrie an der k. k. Bergakademie in Leoben. Wien 1877, Alfred Hölder. 66 S.

Nachdem der Verfasser die Formeln zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung der Fehler verschiedener Natur entwickelt und rücksichtlich der constanten Fehler die mittlere Abweichung vom mittleren Fehler in Betracht gezogen hat, handelt es sich um Entscheidung zwischen 2 Hypothesen, hier ausgedrückt mit den Worten: Erstere sagt, der mittlere Fehler einer Längenmessung ist proportional der gemessenen Länge, letztere, der Länge selbst. Er findet erstere durch die Theorie gerechtfertigt und für die meisten Fälle durch die Beobachtung bestätigt, letztere soll für gewisse Fälle näher zutreffen.

H.

Praktische Mechanik.

Magazin der neuesten mathematischen Instrumente des mathematisch-mechanischen Institutes von F. W. Breithaupt und Sohn in Cassel. VI. Heft mit 13 lithographirten Tafeln. Cassel 1876. Selbstverlag des Institutes. 4°. 95 S.

Das gegenwärtige Heft behandelt nach einander: Einfache Winkelmesser, Theodolite zu geodätischem Gebrauche, Universalinstrumente, Theodolite zu astronomischem Gebrauche, Gruben-Theodolite und Tachymeter, speciell astronomische Instrumente, und im Anhang die Bussolen-Instrumente mit Fernröhren; von diesen einzeln verschiedene Arten; von jeder wird die Beschreibung, die Prüfung und die Anwendung dargelegt. Voraus geht eine Einleitung enthaltend die Grundprincipien über die Construction des Theodoliten, die Elimination der Fehler durch die Anordnung der Beobachtungen, die Kreisteilung und die Methoden der Ablesung, die Methoden der Beobachtung, die Gruppirung der Theodolite nach ihrer Verwendung. Die Erörterung setzt die technischen Kenntnisse in vollem Masse voraus. Ob die im ganzen ziemlich kärglichen Angaben genau die notwendigen sind, möchte etwas zweifelhaft scheinen; doch wird hierüber der Gebrauch entscheiden. H.

Erläuterungen und Zusätze zu F. Reuleaux's Kinematik. In gedrängter Kürze aufgestellt von M. Nieman. Mit einer Figurentafel. Berlin 1877. Mayer und Müller. 24 S.

Der Verfasser knüpft nur in geringem Masse an die citirte Schrift an, will vielmehr die Gegenstände unabhängig entwickeln. Es handelt sich um Fixirung des Begriffs der Kinematik und der dazu gehörigen Begriffe. Hier scheint er sich eine klare, geordnete Darlegung dadurch sehr zu erschweren, dass er in den Begriff schon alle Umstände, die erst Folge der Anwendung sind, hineinlegen will. Anstatt den einfachen mathematischen Begriff zu Grunde zu legen und von da aus die Fälle der Verwendung, die in Maschinen vorkommen, übersichtlich zu ordnen, betrachtet er vielmehr die Kinematik als ein Erzeugniss der Technik, welches er nur approximativ zur mathematischen Auffassung hinführt, Es werden 20 Fälle der Bewegung, nicht übersichtlich aufgestellt, sondern nur angedeutet. In Betreff der Begriffe von „Receptor und Werkzeug", „Motor und Werkstück" wird ausgeführt, dass dieselben sämmtlich ihre Berechtigung haben, und sich im einzelnen leicht genug scheiden, wenn man auch manchmal nur den Ort angeben kann, wo jedes sich befindet. Dies sowol wie jene 20 Fälle wird auf der Figurentafel durch Beispiele veranschaulicht. H.

Astronomie und Meteorologie.

Die Regenverhältnisse Deutschlands. Von Dr. Jac. van Bebber. München 1877. Theodor Ackermann. 122 S.

Die Schrift beginnt mit einer allgemeinen Erörterung der atmosphärischen Wasservorgänge und ihrer Abhängigkeit von der Landesbeschaffenheit, namentlich der Höhenverhältnisse. Indem sie dann speciell auf Deutschland übergeht, nimmt sie die Ursachen zum Ausgangspunkt und lässt die Beobachtungsresultate nachfolgen. Zuerst wird eine übersichtliche Gruppirung der deutschen Gebirge gegeben. Das Folgende handelt von der Regenmenge und zwar vom Einfluss der Gebirge, von der räumlichen Verteilung, der Verteilung in der jährlichen Periode und nach der Höhe, von den Regentagen und der Regenwahrscheinlichkeit, der Regendichte und der Beziehung des Waldes zu den Regenverhältnissen. Die Schrift enthält zahlreiche Tafeln und Diagramme über die Regenmengen. H.

Physik.

On the equilibrium of heterogeneous substances. First part. By Willard Gibbs, Professor of mathematical physics in Yale College, New Haven, Conn. (Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. III. part I.). 141 S.

Die Schrift behandelt ein allgemeines Thema aus der mechanischen Wärmetheorie, entwickelt zuerst die allgemeinen Grundsätze und führt sie dann in verschiedenen Combinationen durch. Es wird von den Begriffen der Energie und Entropie Gebrauch gemacht, erstere bezeichnend die Summe von Arbeit und Wärme, letztere die Summe der durch die Temperatur dividirten von aussen herein übergegangenen Wärmeelemente. Als Kriterium des Gleichgewichts wird aufgestellt: Zum Gleichgewicht eines isolirten Systems ist es notwendig und hinreichend, dass bei allen möglichen Variationen des Zustands des Systems, welche seine Energie nicht ändern, die Variation seiner Entropie verschwinde oder negativ sei — wofür man auch sagen kann, dass bei constanter Entropie die Variation der Energie null oder positiv sein muss. Die nächste Frage bilden die Gleichgewichtsbedingungen heterogener Massen in Berührung ohne Einwirkung von Schwere, Elektricität, Verdrehung und capillaren Spannungen, dann Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den anfänglich existirenden homogenen Teilen, dann Bedingungen für die mögliche Bildung von Massen unähnlich ihrer vorhergehenden Existenz, dann Einfluss der Festigkeit aller Teile, dann Einfluss hinzutretender Bedingungsgleichungen, dann Einfluss eines Diaphragma's, u. s. w. H.

Die Entstehung des Chlorophylls in der Pflanze. Eine physiologische Untersuchung von Dr. Julius Wiesner, o. ö. Professor der Anatomie und Physiologie der Pflanzen an der Wiener Universität. Wien 1877. Alfred Hölder. 120 S.

Es werden die Bedingungen untersucht, unter denen das Chlorophyll, derjenige bis jetzt nicht darstellbare Stoff, welcher der Pflanze die grüne Farbe giebt, und durch dessen Vorhandensein die Umwandlung der unorganischen Nahrung in organische Verbindungen bedingt ist, entsteht. Hauptsächlich ist die Untersuchung auf den Einfluss der Licht- und Wärmestrahlen gerichtet. Die Chlorophyllerzeugende Kraft des Lichtes beginnt erst im Rot zwischen den Fraunhofer'schee Linien *A* und *B* und wohnt von hier an allen Strahlen des sichtbaren Spectrums inne. Die dunkeln Wärmestrahlen haben das Vermögen, eine beginnende Wirkung desjenigen Lichtes, welches zur Chlorophyllerzeugung geeignet ist, fortzusetzen. H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXIV. 1876—77. Serie terzia. Transunti, volume I. Roma 1877. Salviucci.

Die dritte Serie beginnt mit dem December 1876. Jeden Monat erscheint ein Heft. Jedes Heft enthält die Sitzungsberichte der 2 Classen, der naturwissenschaftlichen und historischen, getrennt, dann ein Publicationsverzeichniss und meteorologische Beobachtungen. Die Sitzungsberichte geben nach einander erst die geschäftlichen Verhandlungen, dann wissenschaftliche Mitteilungen und Vorlesungen, dann die Verhandlungen des geheimen Comites. An Mitteilungen mathematischen Inhalts finden sich in den 6 ersten Heften folgende.

H. 1. Marco: Die Ursache der rotirenden Bewegung der Lichtmühle im Radiometer von Crookes.

Brioschi: Ueber einige neue, von Herrn Klein erhaltene Resultate in der Auflösung der Gleichungen 5. Grades.

Cerruti: Ueber die kleinen Oscillationen eines starren, ganz freien Körpers. (Forts. im 2. H.).

H. 2. Smith: Ueber die vollen elliptischen Integrale.

H. 3. Smith: Ueber die Modulargleichungen.

Dini: Ueber eine Classe endlicher und stetiger Functionen, die keinen Differentialquotienten haben. (Forts. im 5. H.).

H. 4. Archer Hirst: Ueber die Correlation zweier Ebenen.

Bertini: Eine neue Eigenschaft der Curven $n$ter Ordnung mit einem $(n-2)$fachen Punkte.

H. 5. Betti: Ueber die Bewegung eines Systems beliebig vieler Punkte.

D'Ovidio: Die metrischen Fundamentalfunctionen in Räumen von beliebig vielen Dimensionen und constanter Krümmung.

De Paolis. Ueber die ebenen doppelten Transformationen.

Veronese und Cremona: Neue Sätze über das hexagrammum mysticum.

H. 6. De Gasparis: Ueber den Wert des Parameters in den elliptischen und parabolischen Bahnen.

Casorati: Untersuchungen über die Differentialgleichungen zu allgemeiner algebraischer primitiver Gleichung. H.

Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques. Par Nicolas Nicolaïdès, Docteur ès-sciences mathématiques, et Professeur à l'Université d'Athènes. Athènes. Pierre Perris.

Diese Zeitschrift erscheint in Lieferungen zu 2 Bogen in französischer Sprache. Gauthier-Villars übernimmt die Besorgung. Es sind bis jetzt 19 Lieferungen erschienen. Die beiden letzten enthalten folgende Aufsätze.

Ueber eine neue Art der Erzeugung der Flächen.

Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen.

H.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Udgivet af Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars. Förste Bind. Kristiania 1876. Alb. Cammermeyer.

Der erste Band dieser neuen norwegischen Zeitschrift besteht aus 4 Heften. Sie soll nur wissenschaftliche Abhandlungen enthalten. Keine Sprache ist ausgeschlossen. Jährlich soll ein Band erscheinen. Die Mehrzahl der Aufsätze gehört der physischen Geographie an. Mathematische Arbeiten hat bis jetzt allein Lie selbst geliefert. Sie sind in deutscher Sprache und haben die Titel:

Theorie der Transformations-Gruppen (1. und 2. Heft).

Resumé einer neuen Integrations-Theorie (3. und 4. Heft).

H.

Nouvelle Correspondance Mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès-sciences, Professeur à l'Université de Liége, avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome troisième. Liége 1877. E. Decq.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte an Abhandlungen ist folgender.

Éd. Lucas: Ueber die Anwendung eines neuen Princips der Zeichen in der Geometrie. (Schluss) — H. Brocard: Rollcurven der Kegelschnitte. (Forts.) — P. Mansion: Identität der linearen Transformation mit der projectivischen Transformation. — Emil Ghysens: Ueber den Flächeninhalt des Ellipsoids. — C. Le Paige: Ueber eine Differenzengleichung. — Éd. Lucas: Ueber das Stiefelsche Theorem. — H. Brocard: Eigenschaft des Dreiecks. — Éd. Lucas: Ueber die Verallgemeinerung zweier Sätze von Hermite und Catalan. — Mister: Ueber den Bweis des Taylor'schen Satzes. — P. Mansion: Beweis des Tautochronismus der Cykloide und des Neumann'schen Satzes, nach der Schrift von Huygens betitelt: Horologium Oscillatorium. — E. Roche: Ueber die barymetrische Formel

von Laplace. — E. **Catalan**: Ueber verschiedene Artikel von Mansion. — De **Coatpont**: Ueber ein Problem von Busschop. — A. B. **Kempe**: Ueber die Bewirkung genau geradliniger Bewegung mittelst durch Gelenke verbundener Stäbe. Aus dem Englischen übers. von V. **Liguine**. — H. **Brocard**: Ueber verschiedene Artikel der Nouv. Corr. (Forts.) — C. **Le Paige**: Ueber die Multiplication der Determinanten. — **Gelin**: Ueber den Satz des Nikomachos. — **Gelin**: Ueber die Frage 220. — G. de **Longchamps**: Ueber die harmonische Reihe. — **Jules Freson**: Sätze über die Transversalen. — S. **Realis**: Ueber verschiedene, in der Nouv. Corr. gestellte Aufgaben. — E. **Ghysens**: Ueber eine Eigenschaft der algebraischen ebenen Linien. — P. **Mansion**: Ueber die Theorie der Reihen, aus Anlass eines Artikels von Catalan. — De **Coatpont**: Ueber die Geometrie des Lineals. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Eisenlohr, A., e. mathemat. Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind d. British Museum) übersetzt u. erklärt. Fol. m. Commentar. 4. Leipzig, Hinrichs. 63 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, G. Müller, A. Wangerin. 7. Bd. J. 1875. 3. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 5 Mk. 20 Pf.

Methoden und Principien.

Deussen, P., d. Elemente d. Metaphysik. 8. Aachen, Mayer. 4 Mk.

Paschen, M., üb. d. sogenannte Quadratur d. Kreises. 4. Neisse, Graveur. 1 Mk.

Scheffler, H., d. Naturgesetze u. ihr Zusammenhang m. d. Prinzipien d. abstrakten Wissens. 2. Thl. 2. Lfg. 8. Leipzig, Förster. 12 Mk.

Ule, O., Warum u. weil. Physikalischer Thl. 4. Afl., hrsg. v. F. Langhoff. 8. Berlin, Klemann. 2 Mk. 75 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Becker, J. K., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 1. Thl. Lehrbuch d. Arithmetik u. Algebra f. d. Schulgebrauch. 2. Buch: Das Pensum der Prima. 8. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Herr, J. B., Lehrb. d. höheren Mathematik. 3. Afl. 1. Bd. 8. Wien, Seidel & S. 12 Mk.

Lettau, O., algebr. Aufg. m. Berücksicht. d. neuen Münzsystems. 4. Afl. 8. Langensalza, Schulbuchh. 2 Mk. 70 Pf.

Lipschitz, R., Lehrb. d. Analysis. 1. Bd. 8. Bonn, Cohen & S. 15 Mk.

Löser, J., Elemente d. Mathematik f. Gymn. Real- u. höhere Bürgerschulen. 2. Thl. Geometrie d. Ebene. 8. Weinheim, Ackermann. 2 Mk. 80 Pf.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl. 5. Lfg. 8 Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Mikoletzky, J., Aufg. aus d. darst. Geometrie. 8. Wien, Hölzel. 1 Mk.

Reeb, W., Auflösgn. zu d. algebr. Uebungsbuche. 8. Giessen, Roth. 80 Pf.

Schrön's, L., siebenstell. gemeine Logarithmen d. Zahlen von 1 bis 108000 u. d. Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten von 10 zu 10 Secunden. 16. Afl. Tafel I u. II. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 20 Pf.

— dass. Tafel III. 8. Ebd. 1 Mk. 80 Pf.

Steck, F. H., & J. Bielmayr, Resultate f. d. 4. Afl. d. arithmet. Aufg. 8. Kempten, Kösel. 50 Pf.

Wallentin, F., methodisch geordnete Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus d. Arithmetik. 8. Wien, Gerold's S. 3 Mk.; Resultate 1 Mk.

Wittstein, Th., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 2. Bd. 2. Abth. Stereometrie. 4. Afl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk. 10 Pf.

— fünfstell. logarithmisch-trigonometr. Tafeln. 8. Afl. 8. Hannover, Hahn. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Boymann, J. R., Lehrb. d. Arithmetik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Lehranst. 1. Thl. Geometrie der Ebene. 8. Afl. 8. Cöln, Schwann. 2 Mk.

Büttner, A., d. Elemente d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 3. Afl. 8. Berlin, Stubenrauch. 2 Mk. 40 Pf.

Günther, S., Lehrb. d. Determinanten-Theorie. 2. Afl. 8. Erlangen, Besold. 5 Mk.

Kunerth, A., neue Methoden z. Auflösg. unbestimmter quadrat. Gleichgn. in ganzen Zahlen. 8. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Orelli, J., Lehrb. d. Algebra f. Industrie- u. Gewerbeschulen. 2. Afl. 2. Thl. 8. Zürich, Schmidt. 5 Mk.

Pick, A. J., Arithmetik f. d. untern Klassen d. Mittelschulen. 1. Thl. 8. Prag, Tempsky. 1 Mk. 40 Pf.

Rapp, J. N., Lehrb. d. Arithmetik m. d. nöthigen Uebungs-Aufg. f. Latein- u. Gewerbschulen. 8. Ingolstadt, Ganghofer. 1 Mk. 60 Pf.

Schmidt, J. P., d. Elementar-Arithmetik u. deren Anwendg. 4. Afl. 8. Trier, Lintz. 2 Mk. 25 Pf.

Stegemann, M., Grundriss d. Differential- u. Integral-Rechng. m. Anwendungen. 2. Thl. Integral-Rechng. 3. Afl., bearb. v. J. F. Meyer. 8. Hannover, Helwing's V. 6 Mk.

Winckler, A., üb. d. Integration d. linearen Differentialgleichgn. zweiter Ordng. 8. Wien, Gerold's S. 90 Pf.

Geometrie.

Buttel, P., Raumlehre f. d. Volksschule, Mittelschule u. Fortbildungsschule. 8.* Kiel, Homann. 1 Mk. 20 Pf.

Consentius, R. O., Beiträge zur Geometrie d. Dreiecks. 8. Carlsruhe, Braun. 1 Mk. 20 Pf.

Escherich, G. v., die reciproken linearen Flächensysteme. 8. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Frischauf, J., Elemente d. Geometrie. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Hattendorff, K., Einleitg. in d. analyt. Geometrie. 2. Afl. 8. Hannover, Schmorl & v. S. 4 Mk.

Kleklcr, K., d. Methode d. darstell. Geometrie z. Darstellg. d. geometr. Elemente u. Grundgebilde. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 40 Pf.

Müller, H., Leitfaden d. Stereometrie. 1. Thl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 40 Pf.

Pelz, C., üb. e. allg. Bestimmungsart der Brennpunkte v. Contouren d. Flächen zweiten Grades. 8. Wien, Gerold's S. 2 Mk.

Rottok, H. L., neuere Geometrie f. d. oberen Klassen d. Realschulen u. Gymnasien. 8. Schleswig, Bergas. 1 Mk. 50 Pf.

Sonndorfer, R., Lehrb. d. Geometrie f. d. oberen Klassen d. Mittelschulen. 2. Thl. 2. Afl. 8. Wien, Braumüller. 3 Mk. 60 Pf.

Wiegand, A, 2. Cursus d. Planimetrie. 9. Afl. 8. Halle, Schmidt. 1 Mk.

Trigonometrie.

Hössrich, A., Abriss der ebenen Trigonometrie. 2. Afl. 8. Saalfeld, Wiedemann. 80 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Afl. 2. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 5 Mk.

Koppe, C., die Aneroid-Barometer v. Jakob Goldschmid u. das barometr. Höhenmessen. 8. Zürich, Schulthess. 3 Mk.

Kraft, G., d. Anfangsgründe d. Theodolithmessg. u. d. ebenen Polygonometrie. 2. Afl. 8. Hannover, Helwing's V. 4 Mk.

Nehls, C., üb. graph. Integration u. ihre Anwendung in d. graph. Statik. 8. Hannover, Rümpler. 8 Mk.

Schell, A., Distanzmesser m. der Basis an d. Instrumente. 8. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Schlesinger, J., d. geodät. Tachygraph u. d. Tachygraph-Planimeter. 8. Wien, Faesy & F. 3 Mk. 60 Pf.

Mechanik.

Boltzmann, L., üb. d. Aufstellg. u. Integr. d. Gleichgn., welche d. Molecularbewegg. in Gasen bestimmen. 8. Wien, Gerold's S. 70 Pf.

Neumann, C., Unters. üb. d. logarithm. u. Newton'sche Potential. 8. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Ott, E., Elemente d. Mechanik. 8. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

Wernicke, A., Lehrb. d. Mechanik fester Körper. 3. Afl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 9 Mk.

Optik.

Happe, L., üb. d. physiolog. Entwickelungsgang d. Lehre v. d. Farben. 8. Leipzig, Veit & C. 1 Mk. 40 Pf.

Lang, V. v., Theorie d. Circularpolarisation. 8. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Afl. 15—21. Lfg. 8. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Lockyer, N., Astronomie. Deutsche Ausg. besorgt v. A. Winnecke. 16. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

Mädler's, v., Wunderbau d. Weltalls od. populäre Astronomie. 7. Afl. Neu bearb. v. W. Klinkerfues. 1. Lfg. 8. Berlin, Bichteler & Co. 90 Pf.

Sirius. Hrsg. v. R. Falb. J. 1877. 7. Hft. 8. Leipzig, Scholtze. Halbjährl. 5 Mk.

Ule, O., d. Wunder d. Sternenwelt. 2. Afl. 9. Hft. 8. Leipzig, Spamer. 80 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 1877. 2. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Bohn, C., Ergebnisse physikal. Forschg. 1. Lfg. 8. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Lorberg, H., Lehrb. d. Physik f. höhere Lehranst. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Reidt, F., Sammlg. v. Aufg. u. Beisp. a. d. Trigonometrie u. Stereometrie. 1. Thl. Trigonometrie. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Reis, P., neue electr. Maschinen, insbesondere d. magnet.-electr. Maschinen u. deren Anwendgn. 8. Leipzig, Quandt & H. 2 Mk. 25 Pf.

Strott, G. K., Physik f. d. unteren Klassen d. Schulen f. Bauhandwerker, Maschinenbauer u. s. w. 8. Holzminden, Müller. 1 Mk. 80 Pf.

Tait, P. G., Vorlesgn. üb. einige neuere Fortschritte d. Physik. Autoris. deut. Asg. v. G. Wertheim. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Classe. J. 1876. 2. Abth. Enth. d. Abh. aus d. Geb. d. Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie u. Astronomie. 8—10. Hft. 8. Wien, Gerold's S. 3 Mk. 40 Pf.

— dass. 2. Abth. 75. Bd. 1—3. Hft. 8. Ebd. 8 Mk.

Litterarischer Bericht

CCXLIV.

Methode und Principien.

Das Münz-, Mass- und Gewichtssystem im Rechenunterricht für alle Rechenlehrer dargestellt von Dr. Albert Kallius, Lehrer am Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster. Oldenburg 1877. Gerhard Stalling. 34 S.

Was den Menschen durch beständigen Gebrauch geläufig ist, pflegt wenig beachtet zu werden. Kommt es dann auf ungewohnte Weise in Anwendung, so tritt oft ein auffallendes Ungeschick zutage. Dies gilt vom Decimalsystem, und der Umstand ist wol ein Hauptgrund, warum die mit dem neuen Münz-, Mass- und Gewichtssystem verbundene Erleichterung des Rechnens noch so wenig gekannt und gewürdigt wird. Der Verfasser sieht hierin einen Anlass dem Unterricht im Decimalrechnen eine grössere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Nach seiner Erfahrung und Nachprüfung ist die Unbekanntschaft der Schüler mit der näheren Bewandtniss im ganzen noch sehr gross. Die Schrift erteilt Ratschläge, wie dem abzuhelfen sei. An diesen ist es sehr zu billigen, dass sie nicht, wie es häufig zum Nachteil geschieht, den Schülern Mühe zu ersparen, sondern eher durch Hinzufügung von Mühe die Aufmerksamkeit auf das bisher Unbeachtete zu lenken suchen. Ist auch Manches nicht gerade neu, so ist doch der Gegenstand ziemlich vielseitig productiv behandelt.

H.

Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Mannheim. Erster Theil. Mit 145 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Weidmann. 295 S.

Das vorliegende Werk ist eine entfaltete Darlegung der Principien der Geometrie nach ihrem logischen Inhalt. Um das vorgesetzte Ziel zu erreichen, ist der pädagogische sowie der systematische Gesichtspunkt ganz bei Seite gelassen. Die Aufgabe stellt zu grosse Anforderungen, als dass sie ohne vorgängige Trennung der Gesichtspunkte gelöst werden könnte. Manche Versuche in gleichem Sinne sind in neuster Zeit zu Tage getreten. Die gegenwärtige Bearbeitung möchte wol eine vor allen früheren hervorragende Leistung zu nennen sein. Es sind darin die gesammten principiellen Fragen aus dem Versteck ans Licht gezogen, in vortrefflicher Klarheit, ohne Entstellung der Tatsachen durch eingemischte Strebungen, aufgefasst und in einfachster Form durch didaktische Aufstellungen gelöst. Der Verfasser räumt gern die Möglichkeit von Irrungen ein, indem er sich trotzdem bewusst ist einen gesicherten Fortschritt getan zu haben; denn sein Werk ist kein künstlicher Bau, der zusammenbricht, wenn eine Stütze versagt; nichts ist auf die Spitze des Wortes gestellt, vielmehr alles im freien Gedanken, den Gegenstand und die Aufgabe vor Augen, zur Reife gebracht, dann erst in die geeignete Darstellungsform gebracht. Es tritt uns darin die grosse Ueberlegenheit derjenigen Logik, welche erst denkt, dann spricht, über die gewöhnliche formelle Logik, welche nur innerhalb der oft sehr zufälligen Grenzen des Wortes zu denken vermag, recht deutlich entgegen. In Verbindung hiermit steht wol auch die Ansicht des Verfassers über die Axiome, dass, wofern sie nur sind, was sie sein sollen, nämlich von selbst einleuchtend, wir nicht so wenige, sondern so viele als möglich statuiren müssten. Er stellt deren 7 oder 8 auf; ist aber stets bereit ein neues hinzuzufügen. Auf die Genesis der Begriffe und der den Axiomen zugrunde liegenden Erfahrungen geht er nicht ein, nimmt vielmehr deren Resultate auf, sofern die Deutlichkeit eines jeden unbestritten ist; gleichwol ist in den Herleitungen die Leitung durch die Genesis oft zu erkennen. Der Stoff des Buches, in welchem Planimetrie und Stereometrie ungetrennt erscheint, ist zu ausgedehnt und mannichfaltig, um den besondern Inhalt vorführen zu können; vieles ist darin originell instructiv, manches sogar unmittelbar für die Schule verwendbar. Zu letzterem ist die Erklärung des Winkels zu rechnen. Es wird unbedenklich ausgesprochen: Der Winkel ist die Winkelfigur; mit der Länge der Schenkel macht man sich nur nichts zu tun — unbedenklich und mit Recht, denn die Grösse des Winkels

muss unter allen Umständen durch die Bedingung der Gleichheit und Ungleichheit besonders definirt werden. Mit diesem sonst fast überall bewährten klaren Blicke ist es nun kaum vereinbar, wie dem Verfasser die Einwände gegen seinen Beweis des Parallelensatzes — es ist der bekannte Scheinbeweis mittelst der Winkelblätter — so ganz unverstanden bleiben konnten. Er sagt, man wendete ein, ein Winkelblatt sei, weil unendlich, keine Grösse und könne nicht ein Teil sein oder Teile haben, und verteidigt das Recht dasselbe Grösse und Teil zu nennen. Glaubt der Verfasser wirklich mit einem Namen eine Kluft überbrücken zu können, deren Vorhandensein sowie die Bemühungen der Mathematiker sie zu bewältigen ihm doch sehr wol bekannt sind? Zunächst ist der Einwand undeutlich ausgedrückt. Sagen wir statt „unendlich“ lieber „unvollständig begrenzt“ und statt „Teil“ lieber „Region“; statt „könne nicht Teil sein“ lieber „bedürfe um als Teil behandelt zu werden neuer Definitionen und Beweise“. Denn, da ein Winkel innerhalb eines gleichen Winkels bei gleich gerichteten Schenkeln construirt eine Region des letztern ausser sich übrig lässt, so passen die Begriffe vom Teile nicht auf die Region. Jeder Versuch aber die verlangten Definitionen und Beweise zu liefern führt uns auf den Parallelensatz selbst zurück, der stets dazu vorausgesetzt werden muss. Ungenügend ist ferner die Definition der Proportion. Durch sie wird zwar das Verhältniss als Function einer Variabeln bestimmt, aber sie ist kein Kriterium für eine einzelne Proportion, was doch in der Elementarmathematik gefordert werden muss. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Mannheim. Erstes Buch: Das Pensum der Tertia und Secunda. Zweites Buch: Das Pensum der Prima. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. 370 S. (Jedes Buch einzeln käuflich.)

Der erstere Cursus umfasst das Rechnen mit ganzen Zahlen, die Teilbarkeit der Zahlen, das Rechnen mit rationalen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, die algebraischen Gleichungen 1. und 2. Grades nebst Proportionen. Die Methode ist die rein arithmetische. Die Behandlungsweise zeichnet sich durch richtige Logik und allseitige Berücksichtigung der Erfordernisse, Genauigkeit des Ausdrucks ohne Ueberladung mit Worten in hohem Grade aus. Ist es auch nicht am Orte die vielen sehr gewöhnlichen Misgriffe bei

einer Arbeit zu erwähnen, welche sich eben durch deren Meidung verdienstlich zeigt, so möge doch wenigstens ein Hauptpunkt genannt werden. Die algebraische Operation ist keine Auswertung, sondern eine Transformation. So wichtig diese Lehre für das Verständniss ist, und so sehr sich auch die Bemerkung aufdrängt, dass durch die Behandlung der Operation als Transformation die Auffassung erleichtert, der Blick erweitert und in gleichem Masse der Umfang des receptiv zu erlernenden Stoffes verringert wird, so haben es doch die meisten Bearbeiter von Lehrbüchern vorgezogen, der Gewohnheit des gedankenlosen Rechnens Rechnung tragend der Operation den Anschein einer Auswertung zu geben. Die vorliegende Bearbeitung gehört zu den wenigen, welche in diesem Punkte richtig zu Werke gehen, und zwar geschieht dies nicht bloss durch vorübergehende Berücksichtigung, sondern es ist durchgehendes Princip mit ausgedehntester Anwendung. Anfänglich wird darauf hingewiesen, dass man Rechnungen in verschiedener Ordnung vollziehen kann; hieran schliessen sich allgemeine Sätze, die dann in Formeln dargestellt immer Anwendung nach 2 Seiten hin gestatten, und in dieser Gestalt ausführlich ausgesprochen werden. So gelangt das System der Sätze zu einer Uebersichlichkeit, wie sie dem Verfahren gewiss allgemeine Zustimmung erwerben wird. Um auf das Einzelne einzugehen, so ist der Passus über die Grundbegriffe musterhaft. Ueber diesen und das Nächstfolgende ist Besonderes nicht hinzuzufügen. Weiterhin aber folgt ein Abschnitt über positive und negative Zahlen, der entschieden verfehlt ist. Im Grunde war die Lehre von den algebraischen Zahlen in der Lehre von den algebraischen Summen *implicite* enthalten; es war nur nötig das Innere nach aussen zu kehren und die erforderlichen Aufstellungen zu machen, wozu bereits alles eingerichtet war. So wäre eine leichtfassliche Theorie, Begriff und Rechnungsverfahren, nach einheitlicher Methode hervorgegangen. Der Verfasser jedoch zerreisst den Nexus und nimmt einen neuen, heterogenen Ausgang in den entgegengesetzten Qualitäten, auf welche der Begriff entgegengesetzter Zahlen allein gebaut erscheint. Da der Begriff der negativen Zahlen ein allgemein gültiger, seine Anwendung nicht auf die Fälle der Darstellbarkeit in entgegengesetzten Qualitäten beschränkt ist, so ist es an sich unrichtig letztere zur Grundlage zu nehmen. Noch schlimmer ist es, dass von dieser ausgehend die Begründung der Multiplicationsregel nie zu rechter Deutlichkeit gelangt, während dieselbe sich doch unmittelbar aus der Multiplication der algebraischen Summen ergiebt. Die negativen Zahlen haben Bedeutung, sofern die Rechnung mit ihnen zu positiven Resultaten führt. Kein theoretisches Resultat aber ist letztes Resultat, sondern erwartet weitere Verwendung. Folglich hat das negative Resultat oder die resultirende Zahl von unbekanntem Vorzeichen gleichfalls immer Be-

deutung. Nur beim Beispiel aus der Wirklichkeit würde das negative Resultat die Unmöglichkeit der Data anzeigen. Hier erst ist es an der Stelle, durch Einführung der entgegengesetzten Qualitäten auch für einige solche Fälle Bedeutung für die Wirklichkeit zu gewinnen und so den Datis Gültigkeit zu verleihen. Bei der im übrigen so rühmlich beobachteten Vollständigkeit muss es auch als ein Mangel angemerkt werden, dass nirgends von dem Falle die Rede ist, wo ein Buchstab eine negative Zahl bedeutet, ein Fall der doch hernach bei Auflösung der Gleichungen nicht ausgeschlossen werden kann. Es ist eine entschiedene Discontinuität in der Doctrin, wenn erst die negativen Zahlen nur einen auf Fälle beschränkten Sinn haben, dann plötzlich Zeichen in allgemein algebraischer Bedeutung auftreten, ohne dass vorher eine Erklärung darüber gegeben wird. Analog verhält sich die Sache in der Lehre von den Brüchen. Es entspricht der Einheitlichkeit der Methode, vereinfacht dieselbe, erweitert den Blick und begünstigt die Uebersicht, dass man den Bruch gleich anfangs als Rechnungsgrösse auffasst, gerechtfertigt durch das ganzzahlige Resultat, sei dieses vorliegend oder der Anwendung vorbehalten. Diese suspendirte Rechtfertigung ist der wirklichen Praxis des Rechnens ganz gemäss; die Statistik führt uns auf den Fall, wo auch die gebrochene Personenzahl Bedeutung hat; nie aber hat man während des Rechnens die Construction der Zahl im Sinne. Dass nun der Verfasser es gleichwol vorgezogen hat, den Begriff des Bruches auf seine Darstellung durch veränderte Einheit zu gründen, ist insofern von geringerem Nachteil, als sich alle notwendigen Sätze daraus einfach genug herleiten lassen. Im übrigen ist zu bemerken, dass innerhalb der allgemein theoretischen Behandlungsweise, welche dabei immer den Grundzug des Ganzen bildet, eine grosse Bevorzugung der Praxis und des Decimalsystems zu Tage tritt. Einigermassen wird dadurch die systematische Gestaltung beeinträchtigt; doch soll hierauf kein grosses Gewicht gelegt werden. Auf jeden Abschnitt folgt eine grössere Anzahl von Fragen und Uebungsaufgaben. Zum Selbstunterricht empfiehlt der Verfasser das Buch ausschliesslich für Begabtere; die Bearbeitung habe nur den Schulgebrauch im Auge gehabt.

Der Cursus des 2. Buchs umfasst die Kettenbrüche und diophantischen Gleichungen, erstere hergeleitet durch Grenzeneinschliessung, letztere gelöst durch und ohne erstere, die arithmetischen und geometrischen Progressionen (Zinseszins- und Rentenrechnung), das Rechnen mit complexen Zahlen, ausgehend von der Construction, enthaltend die Anfangsgründe der Moivre'schen Theorie, jedoch ohne die Exponentialform, und einige Sätze über höhere Gleichungen, ferner die Permutationen, Combinationen und Variationen mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, dann auf den polynomischen und bino-

mischen Lehrsatz, dann die ganzen algebraischen Functionen und die algebraischen Gleichungen mit Anwendung der Derivationen, die unendlichen nach Potenzen einer Grösse entwickelten Reihen und deren Convergenz, die Determinanten, und im Anhang eine auf Summation der höheren arithmetischen Reihen bezügliche Aufgabe. Die Determinantenlehre wird mit einer Vorbetrachtung über Auflösung simultaner linearer Gleichungen eingeleitet, doch ist die Behandlung davon unabhängig, gleich von Anfang allgemein und wenigstens zum Teil geeignet die Vorzüge der Theorie ins Licht zu stellen. Der Additionssatz wird durch Unterdeterminonten hergeleitet, obgleich seine schliessliche Formulirung auf den weit kürzeren und instructiveren Weg der Substitution hindeutet. Ein gleiches gilt von der Methode der Behandlung linearer Gleichungssysteme. Die Erörterungen sind ziemlich ausführlich; in manchen Punkten hätte sich wol durch kürzere Zusammenfassung ein leichterer Einblick erreichen lassen.

H.

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik. Bearbeitet von Dr. H. Suhle, Professor am Carls-Gymnasium zu Bernburg. Erstes Heft. Köthen. Paul Schettler. 94 S.

Das Vorliegende ist für den Unterricht in Quarta bestimmt. Es umfasst ausser den 4 Species, bei welchen Potenzen nur als Producte, Wurzeln gar nicht vorkommen, die Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Proportionen. Ein Anhang behandelt die Decimalbrüche und die Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Die Methode ist die rein arithmetische mit successiver Erweiterung des Zahlengebietes; auf die erneuerte Begründung der Operationen nach jedem solchen Schritte ist ohne grosse Weitläufigkeit sorgfältig Rücksicht genommen. Ueberhaupt lässt sich nicht verkennen, dass in denjenigen Punkten, die gemäss dem Standpunkte der Anfänger nicht erschöpfend erörtert und formulirt werden konnten, doch mit viel Geschick darauf geachtet worden ist, keine falschen Vorstellungen aufkommen zu lassen. Hiervon machen nur ein Hauptpunkt und ein nebensächlicher Ausnahmen. Drei Aeusserungen im Anfang veranlassen geradezu den Schüler $a+b$ für den Ausdruck zweier Zahlen zu halten, zuerst die unrichtige Erklärung des Begriffs Rechnen, dann der Satz: „Wenn das Resultat einer Rechnung selbst wieder als Zahl gelten soll u. s. w." (also $a+b$ ist nicht immer eine Zahl?) dann der Satz: „Die Addition ungleichnamiger Zahlenausdrücke kann nur ausgeführt werden, indem man dieselben durch das Additionszeichen verbindet". Gegen den Irrtum ist im Folgenden nirgends ein Correctiv gegeben; denn die Fassung aller Operationssätze lässt beide Deutungen, die der Zahl-Veränderung und der Verwandlung bei

unverändertem Werte, zu, und von umgekehrter Anwendung einer Verwandlungsformel ist nur einmal beiläufig die Rede. Diese schöne Harmonie der Sätze mit seiner Erklärung mag vielleicht dem Verfasser Motiv gewesen sein. Sie besteht leider nur in der Schule; der Lehrer kann verändern lassen, die Forderungen des Lebens stimmen damit nicht überein. Zweitens ist zu erwähnen, dass vom Unendlichen eine ganz ungenügende Erklärung und falsche Anwendung gegeben. Hier war es an der Stelle zu sagen: Mit 0 kann man nicht dividiren.

H.

J. H. T. Müller's Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Zweite, gänzlich umgearbeitete Auflage, mit vielen dem Text eingedruckten Holzschnitten. Herausgegeben von Prof. Dr. K. L. Bauer, Lehrer der Physik und Mathematik am Realgymnasium in Karlsruhe. Dritter Theil. Halle 1877. Buchhdl. d. Waisenhauses. 223 S.

Der gegenwärtige Teil des Lehrbuchs umfasst die Proportionalität der Linien, vorbereitet durch einen Abschnitt über Messung und Proportionen, die Aehnlichkeit der ebenen Figuren, Teilung der Figuren, Einiges aus der neuern Geometrie und das Apollonische Problem. Der Umfang des Stoffes ist also im Vergleich mit dem des Buches gering, und letzteres scheint darauf berechnet, dass der Schüler in unbeschränkter Musse bei dem Thema verweilen soll. Die Behandlungsweise ist ausführlich, gründlich und reichhaltig, doch findet sich auch Vieles vielteilig gespalten vorgeführt, was sich aus einer einzigen Anschauung heraus verstehen lässt und man auch wol lieber in einen Satz zusammenfassen wird. Strenge Bündigkeit ist nicht zu vermissen; doch ist auch in eigentümlicher Weise dafür gesorgt, dass keine Lücken an den Tag treten können; in den principiellen Punkten, in denen viele Autoren fehlgegangen sind, werden nämlich anfangs die Elemente der Begründung in mehr als genügender Form entwickelt, nachher, wo sie in Anwendung kommen sollten, folgt ein blosser Hinweis, nach welchem der Schüler sich den Beweis selbst zusammensetzen muss. Einen solchen Pleonasmus enthält die Erklärung und Erörterung der Incommensurabilität. Diese ist eine Verbindung der Euklid'schen Grenzeneinschliessung und der Anwendung unendlich kleiner Differenz. Jedes von beiden allein reicht hin; nur ist erstere Methode in manchen Fällen sehr umständlich, letztere zwar bei richtiger Behandlung einfach und leicht fasslich, doch nicht so auf der Hand liegend, dass durchgeführte Beweise in den Fällen der Anwendung, z. B. bei der Kreismessung, entbehrt werden könnten. Unrichtig dem Wortlaut nach ist der Satz II. p. 338. Dass ein Kettenbruch nie abbricht, kann in manchen Fällen bewiesen werden, aber ein allgemein brauch-

bares Kriterium kann es offenbar nicht sein. Hier steht, der Umstand zeigte sich bei fortgesetzter Messung. Was nicht ist, kann man auch nicht finden wollen. Im übrigen ergiebt sich so ziemlich der Inhalt aus den Titeln der Abschnitte; alles dazu gehörige, alles notwendige sowol wie vieles ausserdem wissenswerte, wird man darin behandelt finden. H.

Lehrbuch der Geometrie im Umfange des vollen Gymnasialcursus Bearbeitet von A. Wohlgemuth, Inspector und Oberlehrer am Nicolai-Gymnasium zu Libau. Libau 1877. G. L. Zimmermann. 164 S.

Das Buch kann nur die Bestimmung beanspruchen, von allen Gegenständen der gesammten Schul-Geometrie, einschliesslich der ebenen und sphärischen Trigonometrie, in grösster Kürze eine Vorstellung zu geben und die Elemente der Berechnung von Raumgrössen aufzustellen. Dies ist in guter Ordnung geschehen. Die logischen Erfordernisse sind ganz bei Seite gelassen, die Ausdrücke vielfach schief und ungenau, für das selbständige Denken so gut wie nichts getan. Auch hier, wie noch in vielen Lehrbüchern, wird die Geometrie die Wissenschaft von den räumlichen Grössen genannt, eine Definition die sofort in auffallenden Widerspruch mit der Lehre selbst tritt, wenn unbegrenzte Linien, deren Schnitte u. s. w., die doch offenbar keine Grössen sind, sich als vornehmliche Gegenstände der Geometrie zeigen. Für den Parallelensatz ist ein falscher Beweis aufgestellt. Der Fall der Incommensurabilität von Linien ist anfänglich erklärt, weiterhin wieder vergessen. H.

Die Schule der Geometrie und Trigonometrie der Ebene. Von Professor C. Hellwig, Oberlehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Erfurt. Erster Cursus: Die einfachsten Betrachtungen über die ebenen geradlinigen Figuren und den Kreis. Zweite Auflage. Erfurt 1877. Carl Villaret. 48 S.

In der Tat ist, wie es der Specialtitel sagt, das Vorliegende mehr eine Reihe von Betrachtungen als ein eigentlicher, streng mathematischer Lehrcursus. Wenn gleich das deductive Element nicht ganz darin fehlt, so ist es doch von untergeordneter Bedeutung, und das Hauptgewicht auf die Beobachtung und die Fixirung der Merkzeichen zu legen, durch welche der Schüler im Gebiete der Elementargeometrie orientirt werden soll. Von dieser Seite angesehen lässt sich jedoch die Bearbeitung keineswegs musterhaft nennen. Die Begriffe sind manchmal nicht gehörig begrenzt und geschieden, der Ausdruck zweideutig, die Benennung abweichend sowol vom gewöhnlichen Gebrauch als von der natürlichen Deutung. Der Satz p. 2. z. B. „Die

einfachste Linie“ (Gerade) „wird durch 2 Punkte vollkommen und einzig bestimmt“ — ist zweideutig; die 2 Punkte bestimmen nicht die Gestalt, sondern nur bei fester Gestalt die Lage der Linie. Erstere Deutung, an der freilich der Kundige vorbeieilt, ist von Natur die nächst liegende und hätte durch den Wortlaut vermehrt werden müssen. Es war sehr leicht und durch Rücksicht auf den Schüler geboten durch Nennung des entscheidenden Wortes „Lage“ den Gedanken unmittelbar auf den, gar nicht so auf der Hand liegenden, richtigen Sinn zu lenken. Die Namen „Strahl“ und „Strecke“ werden anders als gewöhnlich gebraucht, gewöhnlich nämlich und mit vollem Grunde im Sinne einer, festen Richtung, hier ohne Beachtung der 2 entgegengesetzten Richtungen. Der Strahl der Geometrie ist nach dem Lichtstrahl benannt, der von einem Punkte ausgeht. Hiervon darf man ohne wichtigen Grund nicht abweichen um nicht Verwirrung herbeizuführen. Strahl für unbegrenzte Gerade ist ein zweiter Name für dieselbe Sache, mithin überflüssig und insofern irreleitend, als die Identität nirgends ausgesprochen, also der Leser veranlasst wird einen Unterschied zu vermuten. Was die Strecke betrifft, so würde der Verfasser wahrscheinlich die Notwendigkeit der Unterscheidung entgegengesetzter Strecken selbst empfunden haben, wenn er die Betrachtung, auf die sich seine Erklärung der Richtung stützt, fortgesetzt und den Ausgangspunkt mannichfaltig verlegt hätte; wie man in der Tat in manchen Lehrbüchern einen nachträglichen Uebergang zur einseitig gerichteten Strecke findet. Das Vorstehende möge als Vorschlag zu leicht auszuführenden Verbesserungen verstanden werden und soll die Brauchbarkeit des Buchs nicht herabsetzen. H.

Abriss der ebenen Trigonometrie. Für den Unterricht an höheren Lehranstalten bearbeitet von A. Hössrich, Professor an der Realschule 1. O. zu Saalfeld. Mit einer lithographirten Figurentafel. Zweite, revidirte Auflage. Saalfeld 1877. W. Wiedemann. 22 S.

Das Buch enthält nach einander die Goniometrie nebst Anwendung auf den irreducibeln Fall der kubischen Gleichungen, dann die Berechnung des rechtwinkligen, dann des schiefwinkligen Dreiecks. Der Vortrag ist der pragmatisch erläuternde. An Verständlichkeit, Bündigkeit und Vollständigkeit lässt sich im allgemeinen nichts vermissen. Nur die Erörterung der unendlichen Werte der goniometrischen Functionen ist ungenügend: in der Tabelle ist teils ∞, teils $(-\infty)$ aufgeführt; woher das letztere kommt, ist gar nicht erklärt, ebenso wenig die Angabe (-0). Da sich die Einführung des ∞ an die Betrachtung der Variation anschliesst, so gehörte nur eine geringe, aber sehr notwendige Beifügung hinzu, um alles zur Deutlichkeit zu bringen.

H,

Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen nebst einem Anhange mit Aufgaben über biquadratische Gleichungen. Ein Supplement zu jeder Sammlung algebraischer Aufgaben. Von Dr. Emil Lampe, Professor an der Luisenstädtischen Gewerbeschule und an der Königlichen Kriegsakademie zu Berlin. Berlin 1877. H. W. Müller. 112 S.

Dass die Herausgabe des gegenwärtigen Buchs einem anerkannten Bedürfniss entgegenkommt, dass damit den Lehrern der Algebra ein vortrefflicher Dienst geleistet wird, braucht kaum gesagt zu werden. Geometrische Aufgaben für kubische Gleichungen der Art zu finden, dass sowol die Stellung als auch die Lösung und die Deutung der Wurzeln einfach genug ist um sie als passende Uebung für Schüler gebrauchen zu können, ist nicht leicht; es scheinen solche den Bearbeitern von Aufgabensammlungen nicht zur Hand gewesen zu sein, denn man findet darin gewöhnlich bei den kubischen Gleichungen nur Zahlenbeispiele. Alle 3 Forderungen sind aber bei der vorliegenden Auswahl von 66 Beispielen für kubische und 11 Beispielen für biquadratische Gleichungen erfüllt. Sie sind nach dem Lehrstoff der *Geometrie*, auf welchen sie Bezug haben, geordnet; die ersten 6 beziehen sich auf Planimetrie, die folgenden 8 auf ebenflächige Körper, die nächsten 37 verbinden diese mit runden Körpern. Bei den biquadratischen Gleichungen treten auch Cykloiden, Epicykloiden und Hypocykloiden auf. Der Sammlung vorausgeschickt sind die nötigen Formeln. Auf jede Aufgabe und deren Lösung folgen 1 oder 2 Zahlenbeispiele. H.

L. A. Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von Dr. Hermann Amstein, Professor der höheren Mathematik und theoretischen Mechanik an der Academie in Lausanne. Halle 1877. H. W. Schmidt. 298 S.

Die Sammlung berücksichtigt reichlich und vielseitig das Bedürfniss der Anfänger im Studium der Integralrechnung durch zweckmässige Uebungsbeispiele aus allen Zweigen derselben, denen, soweit es erforderlich scheint, Anleitung zur Lösung nebst Resultat beigefügt, und die allgemeinen Grundsätze und Regeln des Verfahrens, jedesmal nach einer Methode, vorausgeschickt sind. Der erste Teil bezieht sich auf unbestimmte Integration, erst rationaler, dann irrationaler, dann transcendenter Differentiale von Functionen einer Variabeln, dann vollständiger Differentiale von Functionen mehrerer Variabeln, im zweiten Abschnitt ausgedehnt auf elliptische Integrale. Der zweite Teil enthält einfache bestimmte Integrale, näherungsweise Berechnung

bestimmter Integrale, Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie, Doppel- und dreifache Integrale. Dann folgt ein Anhang über Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung und über Variationsrechnung. Nach Aussage des Herausgebers hat die Sammlung in der neuen Auflage eine tiefgreifende Umwandlung erfahren. Sämmtliche Beispiele sind neu durchgerechnet und dabei eine grosse Zahl von Druckfehlern früherer Auflagen berichtigt worden. Bei der Bearbeitung sind die Werke von Frenet, Todhunter, Sellett und Stegmann benutzt worden. H.

Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Von Josef Mikoletzky, k. k. Professor der 1. deutschen Staats-Oberrealschule in Prag. Wien 1877. Eduard Hölzel. 57 S.

Das Vorliegende ist ein System von 186 Aufgaben, durch die Anordnung für einen zusammenhangenden Uebungscursus eingerichtet, indem sich die spätern Aufgaben häufig auf die frühern stützen. Die Lösung folgt unmittelbar nach jeder Aufgabe. Die Wahl der Data wendet nur in geringem Masse Specialisirung an, bleibt vielmehr grösstenteils im unmittelbaren Anschluss an die Theorie. Der erste Abschnitt betrifft Punkte, Gerade und Ebenen, der zweite Prisma und Pyramide; von ihnen unterscheidet sich der reichhaltigste, dritte nur dadurch, dass Kugel, Kegel und Cylinder teils bei der Lösung in Anwendung kommen, teils unter den Datis auftreten. H.

Tables for the formation of logarithms and antilogarithms to twenty-four or any less number of places; with explanatory introduction and historical preface. By Peter Gray, F. R. A. S., Honorary Membre of the Institute of Actuaries; and author of „Tables and formulae for the computation of life contingencies", „Tables for the formation of logarithms and anti-logarithms to twelve places", etc. London 1876. Charles and Edwin Layton. 92 S.

Die Logarithmen sind briggs'sche, sämmtlich auf 24 Stellen angegeben. Voraus geht eine Tafel der Logarithmen der Zahlen 2 bis 9 zur Reduction der Anfangsziffer der gegebenen Zahl auf 1. Dann folgt eine Tafel über

$$\log(1+0{,}001^k . n)$$

in 5 Columnen für $k=1, 2, 3, 4, 5$ und n von 1 bis 999. Die folgenden Columnen werden aus der 5ten entnommen durch Division mit 1000. Wie man mit Hülfe einer solchen Tafel den Logarithmus einer jeden einzelnen Zahl und diese aus jenem berechnen kann, ist deutlich und bekannt genug. Besondere Vorteile sind nicht in An-

wendung gebracht. Das Verfahren ist also, und das macht den Unterschied andern Tafeln zu gleichem Zwecke gegenüber aus, einfach, kunstlos und gleichmässig, so dass es sich ohne viel Ueberlegung üben lässt, und man vor principiellen Fehlern nicht auf der Hut zu sein braucht. H.

Tables de logarithmes à 12 décimales, jusqu' à 434 milliards, avec preuves. Par A. Namur, Secrétaire de l'École Moyenne de l'État, à Truin-sur-sambre. Précédées d'une introduction théorique et d'une notice sur l'usage des tables. Par P. Mansion, Professeur à l'Université de Gand, publiées par l'Académie royale de Belgique. Bruxelles 1877. F. Hayez. 51 S.

Die Logarithmen sind briggs'sche, angegeben auf 15 Stellen, also mit 3 überschüssigen. Das Princip ist eine Verbindung der Interpolation mit der Zerlegung in Factoren. Eine Tafel von 2 Seiten Umfang giebt zuerst die Logarithmen für ein kleines Zahlenintervall unmittelbar unterhalb des (mit 1 000 000 multiplicirten) *Moduls*, das Entree zu 6 Stellen. Die 6 übrigen Ziffern der 12stellig *gegebenen* Zahl sind dann mit der nebenstehenden Logarithmendifferenz zu multipliciren. Da diese Differenz hier durchgängig die Anfangsziffern 100 hat, so ist die Mutiplication nie mehr als dreiziffrig. Durch wiederholte Multiplication oder Division mit wenigen geeigneten und für leichte Rechnung ausgewählten Zahlen lässt sich jetzt das kleine Intervall zum ganzen erweitern, und man braucht wiederum nur einige kleine Tafeln, welche die Logarithmen dieser Zahlen geben. Bei Aufsuchung des Logarithmus zur gegebenen Zahl wird man die Division wählen, so dass letztere zu multipliciren ist, bei der inversen Aufgabe die Multiplication. Sucht man nun vom gefundenen Logarithmen wieder die Zahl, oder umgekehrt, so wird im allgemeinen die Haupttafel beidemal ganz ungleich benutzt, die 2 Rechnungen sind dann durchgängig unabhängig von einander, und eine bietet immer vollständige Controle der andern. Der Herausgeber hat den Tafeln eine theoretische Begründung und eine Gebrauchserklärung beigefügt.

H.

Hülfstafeln für barometrische Höhenmessungen berechnet und herausgegeben von Ludwig Neumeyer, Premierlieutenant und Sections-Chef im topographischen Bureau des kgl. bayer. Generalstabes. München 1877. R. Oldenbourg. 194 S.

Jede der 2 zur Höhenberechnung erforderlichen Tafeln hat 2 Entrees. Die erste giebt für jedes Mittel der Barometerstände von 779,5 bis 600,5 Millimeter, aufgeführt als Seitenüberschriften durch

alle Millimeter, und für jede Differenz der Barometerstände von 0 bis 25 durch alle Zehntel Millimeter die Nullhöhe, welche der Voraussetzung einer Temperatur von 0° C. entspricht, die zweite für jede Nullhöhe und jede Temperatursumme die Temperaturcorrection. Die Aufführung der Nullhöhen in der 2. Tafel erspart bloss die Multiplication derselben. H.

Tafeln zur Erleichterung der Anwendung der Sumner'schen Methode für den Seegebrauch. Mit Erläuterungen von Sir William Thomson, D. C. L., L. L. D., F. R. S., Professor der Naturwissenschaften an der Universität von Glasgow und Mitglied des St. Peters-Collegium Cambridge. Auf Veranlassung der Kaiserlichen Admiralität aus dem Englischen übersetzt und durch einige vom Verfasser nachgelieferte Zusätze erweitert. Berlin 1877. Ernst Siegfried Mittler und Sohn. Gr. 4°. 21 S.

Die Sumner'sche Methode bestimmt die Position eines Schiffes zu bekannter Zeit aus 2 successiven Sonnenhöhen als Durchschnitt der 2 Kreise auf der Erde, welche den constanten Sonnenhöhen entsprechen. Um die Zeichnung zu ersparen, hat der Verfasser eine Tafel über die in Betracht kommende Auflösung sphärischer Dreiecke gegeben, dieselben aber, weil sonst die Tafel zu gross ausfallen würde, in je 2 rechtwinklige sphärische Dreiecke zerlegt. Die Tafel steht auf 9 Seiten; voraus geht die theoretische Erörterung; es folgt ihr die Gebrauchserklärung. H.

